

**LA SCIENCE DU
CALCUL DES
GRANDEURS EN
GENERAL, OU LES
ELEMENS DES...**

Charles René Reyneau



5. 4. 358

5. 4.

5. 4.



1

1759

1759

LA SCIENCE DU CALCUL DES GRANDEURS EN GENERAL, OU LES ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

Par l'Auteur de l'Analyse Démontrée.

*Ad. R. P.
Nardi. Ordinarius
anno*



*Lib. Dondurici
Bibliotheca Dondurici
1797*

Bibliotheca S. Josephi P. Nardumanni Gloriosi

A VENISE,
CHEZ FRANÇOIS PITTERI.

MDCCXXXIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE.





PREFACE.

OÙ L'ON DONNE UNE NOTION GENERALE
DES MATHEMATIQUES:

On explique la methode qu'on y observe , qui
conduit toujours à la verité ; & l'on fait voir
leur usage pour la perfection de l'esprit.

Notion generale des Mathematiques.



ON comprend sous le nom *des Mathema-*
tiques toutes les Sciences qui ont pour
objet les rapports des grandeurs.

On appelle *Grandeur* tout ce qui est
capable du plus & du moins, c'est à
dire d'augmentation & de diminution , tout ce qui
pouvant être comparé à d'autres choses de même
nature peut leur être égal , ou inégal , c'est à dire ,
plus grand ou plus petit , & qu'on peut leur éga-
ler , quand il leur est inégal , en le diminuant de ce
qu'il a de surplus, s'il est plus grand ; ou en l'au-

gmentant de ce qui lui manque, s'il est plus petit.

Ainsi tout ce qui a des parties est une grandeur. Par exemple, les trois dimensions de l'étendue, c'est à dire, les Longueurs, les Surfaces, les Soliditez des corps sont des grandeurs : le Mouvement, la Vitesse, le Temps, les Poids, &c. sont des grandeurs.

Les comparaisons que l'on peut faire des grandeurs d'une même nature les unes avec les autres, en considérant combien de fois l'une contient l'autre, ou quelque partie déterminée de l'autre; ou en prenant garde de combien l'une surpasse l'autre; ces comparaisons, dis-je, s'appellent *les rapports des grandeurs*. Par exemple, si le Soleil contient la Terre un million de fois, le rapport du Soleil à la Terre est celui d'un million à l'unité.

Dans les Mathématiques on ne considère pas ordinairement les grandeurs en elles-mêmes; on sçait évidemment qu'elles sont composées d'une infinité de parties qu'on ne sçauroit épuiser. On cherche à découvrir les rapports des unes aux autres, Par exemple, dans la Geometrie on ne s'arrête pas à examiner le nombre infini des petites parties dans lesquelles une figure peut être divisée; on y cherche les rapports des lignes qu'on peut concevoir dans cette figure, les rapports qu'ont entr'elles & avec la figure entière les différentes parties dont elle est composée; enfin les rapports tant des parties de la figure que de la figure même avec les autres figures & grandeurs auxquelles elle peut être comparée.

On peut considérer les rapports des grandeurs

ou dans les grandeurs particulieres & sensibles dans lesquelles ils se trouvent, ou en general en regardant ces rapports sans faire attention aux grandeurs particulieres dans lesquelles sont ces rapports. Par exemple, les rapports qui forment les accords de la Musique s'expliquent dans cette science par les rapports qui sont entre les longueurs de deux cordes égales en grosseur, & qui sont également tendues sur un Instrument. Si on les pince, ou si on les touche avec l'archet ; quand le rapport des longueurs est égal, leurs sons formeront l'*unisson* ; si le rapport des longueurs est celui de 1 à 2, elles feront entendre l'*octave* ; si ce rapport est comme 2 à 3, on entendra la *quinte* ; si ce rapport est comme 3 à 4, elles feront entendre la *quarte* ; & ainsi des autres accords. On peut aussi considerer ces rapports détachez, pour ainsi dire, par l'esprit de toute grandeur particuliere & sensible ; c'est à dire, sans penser à aucune grandeur particuliere. Il est évident que ces rapports des grandeurs regardez ainsi en general peuvent être appliquez à toutes les grandeurs particulieres.

Ces deux manieres de considerer les rapports des grandeurs font distinguer les Mathematiques en deux classes. La premiere, contient les Sciences Mathematiques qui ont pour objet les rapports des grandeurs en general, & il y en a trois, la *Geometrie*, l'*Arithmetique* & l'*Algebre*. Nous comprenons les deux dernieres sous le nom de la *Science du Calcul des grandeurs en general* : Elles sont les Sciences generales des Mathematiques, & elles en contiennent les éléments.

La seconde classe comprend les Sciences Mathématiques particulières qui ont pour objet les rapports des grandeurs particulières & sensibles ; & il y en a un grand nombre ; ce qui vient non seulement du nombre des grandeurs sensibles , mais encore de ce qu'une même grandeur sensible (comme le mouvement , les rayons visuels , &c.) peut fournir de la matière à plusieurs sciences . On ne donnera ici qu'une légère idée de quelques-unes des plus utiles & des plus curieuses.

Dans la *Geometrie pratique* on apprend à mesurer toutes les longueurs , les surfaces & les soliditez des corps sensibles ; c'est à dire , à trouver leurs rapports avec leur unité sensible qui est un pied ou une toise ; & à tracer en petit sur un plan toutes les figures sensibles des corps , de façon que toutes les parties de la figure sur le plan aient en petit les mêmes rapports qu'ont en grand les parties correspondantes de la figure terrestre & sensible.

La *Mécanique des solides* enseigne les rapports que doivent avoir les parties dont les machines les plus nécessaires & les plus usitées dans les Arts sont construites , afin que telle force qu'on voudra , puisse , par le moyen de ces machines , élever ou surmonter telle autre force ou telle autre résistance qui pourra se présenter ; c'est à dire , elle explique les rapports que doivent avoir les parties des machines pour être propres à augmenter ou à diminuer les degrez d'une force déterminée si petite & si grande qu'on voudra , selon tous les rapports dont on peut avoir besoin dans l'usage.

La *Mécanique des fluides* fait connoître les rapports

qui se peuvent trouver dans les differens degrez des forces mouvantes des fluides, dans leur mouvement, dans leur pesanteur, dans la vertu de ressort des fluides qui en ont, dans la propriété qu'ont quelques-uns de pouvoir être dilatez & condensez. Elle explique les rapports des effets qui résultent des differens degrez de ces forces, lorsque ces fluides agissent les uns sur les autres, ou lorsqu'ils agissent sur les corps solides en les poussant, en les pressant, en leur résistant, ou de quelque autre manière que ce puisse être. Elle détermine aussi les rapports des parties dont peuvent être construites les machines utiles & curieuses qui doivent servir pour employer les forces mouvantes des fluides à produire les differens effets dont on peut avoir besoin.

On voit dans *la Musique* les rapports qu'ont entre eux les nombres des tremblemens ou vibrations de l'air faites en même temps, qui font entendre tous les accords & tous les tons de la Musique; comme aussi les rapports que doivent avoir les parties dont les Instrumens de Musique sont composés, pour les rendre propres à donner à l'air qui les environne (quand ils sont pincez, ou touchez, ou frappez, ou quand ils sont poussez par l'air qu'on y souffle) les tremblemens ou les vibrations qui font entendre les accords & tous les tons de la Musique.

Il y a quatre sciences sur *les rayons visuels*; c'est à dire, sur les rayons de la lumière, qui font apercevoir les objets. L'*Optique* découvre les rapports des parties de l'œil, & les rapports que les rayons visuels, qui viennent des objets, reçoivent dans les

trois humeurs de l'œil, pour leur faire peindre au fond de l'œil les images claires & distinctes des objets; & elle explique comment les differens rapports de ces images, des rayons visuels & des yeux font voir toutes les diversitez des objets, leur grandeur, leur éloignement, leur repos, leur mouvement, &c.

La Dioptrique détermine les rapports qui surviennent aux rayons visuels lorsqu'ils traversent differens milieux transparents, comme l'air, & l'eau, le verre, &c. Elle fait distinguer par ces differens rapports les sept especes de rayons contenus dans un même rayon de lumière qui font appercevoir les sept couleurs primitives, le rouge, l'orangé ou couleur d'or, le jaune, le vert, le bleu, le bleu obscur, & le violet. Elle marque les figures qu'il faut donner aux verres pour rendre à notre vûe tant d'objets perdus par leur trop grand éloignement, ou par leur extrême petitesse: ce qui a donné le moyen d'enrichir la Physique & l'Astronomie de tant de nouvelles découvertes.

La Catoptrique examine les rapports de rayons visuels réfléchis par des surfaces polies comme celles des miroirs, & les rapports des différentes images que font appercevoir ces rayons réfléchis suivant les differens rapports des différentes surfaces polies, suivant les rapports des situations des objets éclairés dont elles reçoivent les rayons de lumière & les réfléchissent, & suivant les rapports des différentes situations de l'œil qui reçoit ces rayons réfléchis.

Dans *la Perspectiv*e on suppose d'abord qu'on regarde au travers d'une glace transparente polée à
un.

un certain éloignement de l'œil tous les objets qui se présentent à la vûe, comme un Paysage & tout ce qu'il contient ; & l'on fait remarquer que les rayons visuels qui sont réfléchis par tous les points sensibles des objets qu'on apperçoit , & qui viennent en peindre les images au fond de l'œil , passent chacun par un point de cette glace ou de ce tableau qui est distingué de tous les autres points du même tableau . On suppose ensuite que chacun des points du tableau soit marqué par la couleur du rayon qui venant d'un point sensible de l'objet passe par ce point du tableau ; & que tout le tableau ayant la peinture des objets qu'on voyoit au travers , dont les traits sont exactement sur les mêmes points du tableau par où passoiént les rayons des objets ; que le tableau , dis-je , devienne opaque , sans que celui qui regardoit les objets en soit averti ; il s'imaginera voir encore les objets en eux-mêmes . On tire de ces deux suppositions les règles qu'on doit suivre dans la peinture des objets pour y placer tous les traits dans les rapports qui leur conviennent , suivant les éloignemens où les objets & l'œil peuvent être du tableau ; afin que celui qui regarde le tableau à une certaine distance , s'imagine voir en eux-mêmes les objets dont il ne voit que la peinture .

Dans l'*Astronomie* on fait d'abord considérer les mouvemens qui paroissent dans les Astres , & l'on fait distinguer les mouvemens qui paroissent leur être communs d'avec ceux qui paroissent propres & particuliers à chacun des Astres . Ensuite on fait imaginer dans le monde , qu'on regarde comme

un globe , les cercles où se font les revolutions communes des Astres , & les cercles où se font leurs revolutions particulieres ; on fait aussi imaginer les lignes qui servent d'essieux aux cercles des revolutions des astres , les points qui sont les extrêmités de ces essieux , & qui sont *les poles* de ces cercles ; comme aussi les points où le cercle de la révolution propre du Soleil , qu'on nomme l'*Ecliptique* , coupe le plus grand des cercles des revolutions communes qu'on nomme l'*Equateur* ; & de plus les points où les cercles des revolutions propres des planètes coupent l'Ecliptique . On fait imaginer les mêmes cercles , leurs essieux , leurs poles , & leurs points d'intersection sur la Terre , sur le Soleil & sur les Planètes qu'on regarde comme des globes . C'est par rapport à ces cercles , à ces lignes & à ces points , regardez comme des termes fixes , qu'on distingue tous les rapports de tous les astres & de tous les points du Ciel , tant comparez les uns aux autres que comparez à la Terre : c'est par ces termes regardez comme fixes qu'on distingue de même les rapports de toutes les parties du globe terrestre , composé de la Terre & de la Mer , les unes avec les autres , & leurs rapports avec tous les corps célestes ; & c'est de-là que se forme *la Géographie* .

Après cela on détermine , par le moyen des observations faites dans toute l'exactitude possible , avec le secours de la Geometrie & du calcul , les rapports qu'ont les corps célestes dans leurs mouvemens , dans les temps employez tant dans leurs revolutions entieres que dans toutes les parties de leurs revolutions , dans leurs distances , soit de la

terre, soit les uns des autres; dans leurs grosseurs; dans les comparaisons des temps des revolutions des planettes avec leurs distances du Soleil qui est comme le centre de leurs mouvemens; en un mot, on détermine tous les rapports utiles que peuvent avoir les Astres, & qu'on peut découvrir par les observations. On forme enfin, sur ces découvertes, des Regles fixes pour trouver exactement dans tous les momens, soit de l'avenir soit du passé, tous les rapports des situations des Astres; pour prévoir les momens où se trouvant plusieurs ensemble dans une même ligne avec la terre, les plus proches feront éclipser les plus éloignez, ou bien l'ombre de la terre fera éclipser la Lune, & pour retrouver dans le passé les momens fixes de ces éclipses.

C'est sur ces Regles certaines que l'Eglise a reformé le *Calendrier*, & l'a réduit à l'exactitude requise, afin que ses Fêtes Mobiles se retrouvassent aux temps précis des mêmes Saisons où l'Eglise les fixa dès son commencement, dont elles s'étoient écartées dans la longue suite des temps, par les petits défauts des premieres supputations.

C'est à ces Regles que la *Chronologie* doit ce qu'elle a de plus assuré pour regler dans la suite des temps depuis le commencement du monde, & depuis les *Epoques* les plus remarquables, les places de tous les événemens de l'Histoire; afin d'ôter la confusion des faits par la distinction exacte des temps où ils sont arrivez; & pour réduire à l'uniformité les différentes manieres de compter les années qui ont été en usage dans tous les âges du monde, & parmi toutes les différentes Nations.

On doit à ces mêmes Regles, en y joignant celles de la Perspective, *la construction des Globes Celestes, des Planispheres du Ciel, des Astrolabes* (qui sont des astronomies, pour ainsi dire, parlantes aux yeux) dans l'exactitude, & dans la perfection où ils sont à présent.

C'est encore des principes de l'Astronomie que *la Gnomonique, ou l'Art de décrire les Cadrans*, a tiré les methodes de tracer sur une surface plane ou courbe, avec le secours de la Geometrie, les lignes qui sont les intersections où cette surface est coupée par les cercles que le Soleil paroît décrire, par ceux qui partageant la revolution journaliere en vingt quatre parties égales, la distinguent en heures; enfin par ceux qui peuvent avoir tel rapport qu'on voudra avec tous les points où se trouve le Soleil pendant une année, qui est le temps du mouvement propre qu'il nous paroît avoir: De maniere que ces lignes ont de tels rapports entr'elles, & avec tous les points du Ciel par où passe le Soleil, que le mouvement de l'ombre de la pointe d'un stile, posé comme il le doit être sur cette surface, fait distinguer l'heure qu'il est tant à l'endroit où l'on est, que par toute la terre, la saison où l'on est, le jour de l'année, le temps qui est passé depuis le lever du Soleil, ce qui en reste jusqu'à son coucher, &c.

Les découvertes de l'Astronomie ont aussi donné le moyen de faire en tous les endroits de la terre des observations exactes des éclipses de la Lune, du Soleil, & des Satellites de Jupiter qui sont plus frequentes, dont on s'est servi pour déterminer

avec exactitude les differens rapports des parties de la surface de la Terre & de la Mer; & pour marquer les positions justes sur *les Globes terrestres*, & sur *les Cartes Geographiques*, tant des parties de la Terre, que des parties de la Mer. Ce qui a déjà réduit la *Geographie* à une plus grande exactitude, & ce qui donne lieu d'esperer qu'on la portera bientôt à la dernière perfection.

La Marine tire de la Boussole, c'est-à-dire, de l'Eguille aymentée, le fond de ses pratiques. C'est par l'usage de la Boussole qu'elle fait discerner à tout moment la route que doit tenir le Vaisseau; & en comptant exactement le chemin qu'il décrit sur cette route, elle fait connoître à tout moment par les supputations, ou par les Cartes réduites, le lieu de la Mer où est le Vaisseau, c'est-à-dire, le rapport de ce point à toutes les parties de la Terre & de la Mer. Mais la variation de l'Eguille aymentée, les courans de la Mer, & la diversité perpetuelle, & souvent peu sensible de la force du vent, & la dérive du Vaisseau, font perdre la certitude de ces pratiques, par les raisons de douter qu'elles y apportent. La Marine la fait retrouver cette certitude, par le secours de l'Astronomie. Elle fait employer les observations des hauteurs du Soleil, & des autres Astres, & celles des éclipses des Satellites de Jupiter, quand cela est possible; & l'on s'assure par là de la justesse de la route du Vaisseau, si les causes dont on vient de parler ne l'ont point altérée, ou bien l'on en corrige les défauts, s'il se trouve qu'elles y ayent produit des changemens.

Il est inutile de faire ici une plus longue énumé-

ration des Sciences Mathematiques particulieres; on en peut tous les jours inventer de nouvelles; & il y en a de très-utiles dont la découverte s'est faite, pour ainsi dire, de notre temps. Les notions qu'on vient de donner des plus communes, suffisent pour faire appercevoir aux Commençans, que les Sciences Mathematiques generales qui donnent la connoissance de tous les rapports qui peuvent se trouver entre toutes les grandeurs prises en general, & qui apprennent les Methodes de developper ces rapports, de les comparer les uns avec les autres de toutes les manieres possibles: en un mot, de les déduire les uns des autres; que ces Sciences, dis-je, contiennent, pour ainsi dire, toutes les Sciences Mathematiques particulieres.

Pour distinguer ces Sciences generales les unes des autres, & pour donner une notion, on fera remarquer trois manieres d'exprimer les grandeurs en general, & tous leurs rapports.

La premiere, qui est le plus à la portée des sens, & de l'imagination, est de les exprimer par les lignes, & par les figures; car il n'y a point de rapport possible entre les grandeurs, qui ne puisse être exprimé par le rapport des lignes droites, puisqu'on peut prendre des lignes droites qui soient entr'elles en tel rapport qu'on voudra. On peut aussi imaginer des figures soit rectilignes, soit courbes, soit en partie rectilignes, & en partie courbes, dans lesquelles on peut concevoir des lignes droites terminées par la figure, qui aient entr'elles tous les rapports possibles, & qui puissent représenter tous les rapports des grandeurs. Enfin on peut compa-

ter les parties des figures, tant les unes avec les autres, qu'avec les figures entieres dont elles sont les parties, & même les figures entieres les unes avec les autres; on peut, dis-je, les comparer de maniere qu'on y trouve tous les rapports possibles; & par consequent elles peuvent servir à représenter en general tous les rapports possibles des grandeurs.

La seconde maniere est d'employer les expressions des nombres. Pour le faire concevoir clairement, on fera remarquer que nous avons naturellement les idées claires & distinctes de l'unité, & de tous les nombres possibles composez de l'unité: que pour appliquer aux grandeurs particulieres & sensibles les idées des nombres, on prend dans chaque espece de grandeur une partie déterminée pour l'unité, par exemple, un pied dans les longueurs: un pied quarré dans les surfaces, un pied cubique dans les solides: une heure dans les temps: une livre dans les poids: un degré dans les mouvemens, & dans les vitesses, & ainsi des autres. Cette unité, étant une grandeur, est divisible à l'infini. Qu'on peut comparer toutes les grandeurs de différentes especes chacune à son unité, de trois manieres. 1^e. Il y en a qui contiennent exactement l'unité plusieurs fois; & ces rapports des grandeurs à l'unité, ou si l'on veut, les grandeurs qui contiennent exactement l'unité plusieurs fois, s'appellent *les Nombres entiers*. Les différentes Nations se sont servis de différents caracteres pour exprimer ces Nombres entiers; mais dans les Mathematiques on se sert *des chiffres* (qu'on a reçu des Arabes) pour les

exprimer. 2°. Il y a des grandeurs qui ne contiennent pas l'unité exactement plusieurs fois ; mais elles contiennent exactement une certaine partie déterminée de l'unité : par exemple, deux tiers de l'unité, trois quarts de l'unité, &c. Ces rapports des grandeurs aux parties déterminées de l'unité qu'elles contiennent, ou, si l'on veut, les grandeurs qui ne contiennent pas exactement l'unité, mais quelque partie de l'unité, se nomment simplement *rapports*, on les nomme aussi *fractions* ; on les appelle encore *des nombres rompus*. On les exprime ces rapports, ou ces fractions, par deux nombres posés l'un sur l'autre, & séparés par une ligne, de cette manière, $\frac{2}{3}$ (deux tiers), $\frac{3}{4}$ (trois quarts) &c. Le nombre d'enbas marque en combien de parties égales l'unité est divisée ; & celui d'enhaut, combien la fraction contient de ces parties de l'unité. Dans la fraction $\frac{2}{3}$ (deux tiers), 3 marque que l'unité est divisée en trois parties égales, ou en tiers ; & 2 exprime que cette fraction contient deux de ces tiers. 3°. L'unité matérielle & divisible peut être conçue divisée en tel nombre de parties égales qu'on voudra, & cela en allant de plus petites en plus petites, sans aucune fin. En quelque nombre de petites parties égales qu'on puisse concevoir l'unité divisée, il y a des grandeurs qui étant comparées avec l'unité, ne contiennent jamais exactement une de ces parties égales, quelque petites qu'elles soient, mais elles contiennent toujours, outre ces petites parties égales, un petit reste ; & quelque supposition que l'on fasse, que ces petites parties de l'unité soient elles-mêmes divisées de plus petites

petites en plus petites sans fin, il arrivera toujours que ces grandeurs ne contiendront jamais exactement ces plus petites parties égales de l'unité, un certain nombre de fois; mais il y aura toujours un petit reste moindre que l'une de ces parties égales. (On le démontrera dans la science du Calcul.) Ces grandeurs n'ont donc aucune mesure commune avec l'unité, & on nomme, à cause de cela, leurs rapports avec l'unité, *des rapports incommensurables*, ou si l'on veut, on nomme ces grandeurs, *des grandeurs incommensurables*: on leur donne des expressions propres qu'il seroit inutile de marquer ici, où elles causeroient de la difficulté aux Commencans. Or ces trois sortes de rapports des grandeurs avec l'unité, comprennent tous les rapports possibles. On peut les concevoir en general, sans penser aux grandeurs particulieres & sensibles. Ainsi on peut exprimer par leur moyen tous les rapports des grandeurs en general.

La troisième maniere d'exprimer les grandeurs en general, & tous leurs rapports, est de marquer les grandeurs & leurs rapports, par les lettres de l'alphabet, ce sont les caracteres les plus simples & les plus familiers. Cette maniere est la plus generale de toutes. On peut représenter par une lettre tous les nombres entiers, tous les nombres rompus, toutes les grandeurs incommensurables, en supposant que notre esprit peut substituer successivement à la place de cette lettre, tous les nombres entiers & rompus, & toutes les grandeurs incommensurables. On peut représenter de même par des lettres toutes les lignes, & toutes les

figures possibles, & tous leurs rapports, en supposant par notre esprit toutes ces lignes & leurs rapports, & toutes ces figures avec leurs rapports, substituées les unes après les autres à la place de ces lettres par lesquelles notre esprit les apperçoit toutes représentées. On peut de même concevoir toutes les grandeurs particulières & sensibles, avec tous leurs rapports, représentées par les lettres. Ainsi tout ce que l'on démontre par ces expressions littérales, & tout ce qu'elles font découvrir, convient nécessairement à toutes les grandeurs.

Ces trois manières d'exprimer les grandeurs en général, & tous leurs rapports, sont séparément l'objet des trois sciences générales des Mathématiques.

La Geometrie a pour objet les grandeurs en général, & tous leurs rapports, représentés par les lignes & par les figures; ou plutôt, quoique la Geometrie semble avoir pour objet particulier, les rapports des trois dimensions du corps, des longueurs, des surfaces, & des solides; comme ces rapports peuvent aussi exprimer tous les rapports de toutes les grandeurs particulières & sensibles, la Geometrie est une science générale des Mathématiques, qui doit précéder les Mathématiques particulières & sensibles, & elle les contient éminemment.

L'Arithmetique a pour objet les grandeurs en général, & tous leurs rapports représentés par les expressions des nombres, c'est à dire, toutes les grandeurs numériques.

L'Algebre a pour objet toutes les grandeurs, & tous leurs rapports représentés de la manière la

plus generale qu'on puisse concevoir par les lettres de l'alphabet ; ce qui les fera nommer *les grandeurs litterales*.

Ces deux sciences l'Arithmetique & l'Algebre , ont une liaison naturelle ; elles enseignent à faire des operations semblables, l'une sur les grandeurs numeriques, l'autre sur les litterales ; elles se prêtent des secours & des éclaircissemens reciproques . La grande universalité de l'Algebre surprend d'abord l'esprit des Commencans , & le tient comme en suspens . Ils ne savent à quoi ils doivent déterminer ces idées si generales des expressions de l'Algebre . L'Arithmetique les fixe par les idées immuables des nombres qui sont familiers à tout le monde . Ils peuvent d'abord supposer des nombres entiers déterminez à la place des lettres , & ensuite en supposer d'autres tels qu'ils voudront ; & la verité generale que leur presente l'expression litterale, se trouvera convenir à tous ces nombres . Après cela ils peuvent supposer des nombres rompus tels qu'il-leur plaira, au lieu des lettres de l'expression generale , puis des grandeurs incommensurables quelles qu'elles puissent être ; & voyant toujours que la verité generale de l'expression litterale se trouve convenir à toutes ces grandeurs dont le nombre est infini ; ils s'éleveront enfin à l'entiere universalité des expressions litterales , & ils s'accoutumeront à voir toutes les grandeurs possibles avec leurs rapports , representées par les expressions litterales ; & que les resolutions que fait découvrir le calcul des grandeurs litterales , sont generales , & conviennent à toutes les grandeurs

possibles. Enfin ces deux Sciences mêlent souvent ensemble leurs expressions dans les mêmes opérations. Ces raisons ont porté à ne faire qu'une même Science generale de ces deux là, à laquelle on donne le nom de *La science du Calcul des grandeurs en general*. On y explique à fond l'une & l'autre; on a tâché de n'y oublier aucun des principes, ni aucune des opérations de l'une & de l'autre. C'est par cette Science qu'on doit commencer à apprendre les Mathematiques. Elle en contient les Elemens, ou plutôt elle les comprend toutes par son universalité, & elle donne la Methode la plus simple, la plus facile, la plus sûre, & qui est la plus proportionnée à l'étendue bornée de l'esprit, pour les apprendre avec plaisir, comme si on les découvroit soi-même. En voici une notion en peu de mots.

On donne dans cette Science des expressions, par le moyen des chiffres, & par le moyen des lettres, aux grandeurs considerées en general, & à tous les rapports qu'elles peuvent avoir entr'elles. On en donne aux grandeurs entieres, aux grandeurs rompues, & aux grandeurs incommensurables, qui les distinguent les unes des autres. Cependant l'universalité des expressions litterales est cause que les expressions litterales des grandeurs entieres, & toutes les opérations faites sur ces expressions, conviennent aussi aux grandeurs rompues, & aux grandeurs incommensurables; mais les differens degrez de composition des rapports des grandeurs, & les différentes comparaisons qu'il faut faire des uns avec les autres, obligent aussi de donner des expressions propres aux grandeurs rompues, & aux gran-

deurs incommensurables. On enseigne ensuite à faire sur ces trois sortes d'expressions, toutes les opérations qu'on nomme addition, soustraction, multiplication, division, formation des puissances, extraction des racines, &c. Ces opérations le nomment aussi du nom commun de *Calcul* des grandeurs. Les règles de ce Calcul sont si sûres, si justes, & si lumineuses, que pourvu qu'on observe l'ordre & la justesse qu'elles prescrivent, en quelque quantité que puissent être les grandeurs sur lesquelles on opere, & quelque composition qu'il y ait dans leurs rapports, on voit clair dans tout le chemin que l'on suit; on est assuré qu'on ne s'écarte point, & qu'on arrive à la fin avec une entière certitude. Le Calcul littéral a cependant ce grand avantage sur le Calcul numérique, qui est plus simple, plus facile, plus court, plus général, qu'il demande bien moins de temps, qu'il ménage tout autrement la capacité de notre esprit, & qu'il augmente, pour ainsi dire, à l'infini l'étendue de la vue qui est si bornée, en lui présentant sous l'expression la plus simple qu'on puisse imaginer une infinité d'objets. Mais ce qu'il faut principalement remarquer pour appercevoir le grand usage du calcul des grandeurs en général par rapport aux découvertes des Mathématiques, c'est qu'il consiste en des signes arbitraires ordonnez par la Science du calcul à marquer tous les raisonnemens dans l'ordre & dans la suite naturelle qu'ils doivent avoir entr'eux; à marquer, dis-je, tous les raisonnemens clairs, distincts & suivis que doit faire notre esprit, pour déduire des grandeurs connues & de leurs rapports connus, en quelque

quantité qu'ils puissent être, & de quelque degré de composition qu'ils soient, tous les rapports qui peuvent s'en déduire nécessairement. Cela fait voir que celui qui employe le calcul fait par-là tous les raisonnemens naturels, exacts & dans l'ordre qu'ils doivent avoir, qu'on doit faire pour déduire des grandeurs & des rapports de ces grandeurs qui lui sont connus, les rapports qui s'en peuvent déduire nécessairement. C'est ce qui a fait faire tant de progrès aux Mathématiques depuis qu'on y a employé le calcul: c'est ce qui y a fait faire tant de découvertes si utiles; c'est ce qui les a rendues si faciles, & ce qui en a ôté ce qu'elles avoient de rebutant, en les faisant apprendre avec le plaisir de les découvrir soi-même, à ceux qui se sont rendu le calcul familier, & qui en ont acquis l'habitude. Car c'est par les expressions littérales que fournit le calcul qu'on saisit un Problème ou une question sur toutes sortes de grandeurs générales & particulières, & sur leurs rapports, avec toutes les conditions qui y entrent & qui la déterminent. Et ensuite sans partager la capacité de l'esprit par la vue de la quantité des objets, & de la composition des rapports qui entrent dans la question, par la considération de toutes les lignes ou de toutes les figures, souvent en grand nombre, qui peuvent entrer en la question, dont l'impression sensible occuperoit toute l'étendue de l'esprit, ou la plus grande partie, & seroit trouver la question embarrassée & rebutante, quelque utilité qu'il y aperçût; sans, dis-je, toutes ces considérations fatigantes que cette methode rend inutiles, il suffit

de ne faire attention qu'au calcul , qui étant familier , laisse à l'esprit toute son étendue ; & l'appliquant , ce calcul , à l'expression de la question , la plume seule conduit directement à la résolution ; & si la question a plusieurs résolutions , elles viennent toutes se présenter . L'expression littérale de la résolution d'une question qu'on a découverte devient elle même une Règle generale qui donne la résolution de toutes les questions semblables sur toutes sortes de grandeurs . Les résolutions littérales portent encore avec elles leur démonstration , sans qu'il en faille d'autres , qui ne serviroient qu'à faire voir évidemment par des raisonnemens suivis qu'on y est arrivé , & les raisonnemens exprimez par le calcul sont eux-mêmes très certains & très évidens par les démonstrations des Règles du calcul qu'on enseigne la Science du calcul . Ces résolutions & l'expression de la question contiennent aussi tous les Corollaires qui en peuvent dépendre . On les en tire par le calcul , & l'on a le plaisir de voir que chaque trait de plume produit des découvertes . Il arrive même souvent qu'une seule expression littérale qui n'est composée que de peu de lettres qui ne feroient pas une ligne , contient une science entiere dont on a le plaisir de développer par le seul calcul toutes les parties les unes après les autres . Enfin l'universalité de cette Science a une si grande étendue , & l'art qu'elle donne de présenter à l'esprit une infinité d'objets differens sous une simple expression abrégée , va si loin qu'il fait réduire , en plusieurs occasions , à une seule expression littérale très simple , un nombre infini d'autres expressions

littérales, dont chacune est elle-même une Règle generale pour des résolutions de Problèmes; & toutes ces expressions se tirent par le seul calcul de celle qui les représente toutes. On en verra des exemples dans le second Volume de la Science du calcul.

On explique & on démontre dans ce premier Volume tous les calculs des grandeurs entieres tant littérales que numériques, des grandeurs rompues, & des grandeurs incommensurables, qu'il faut sçavoir pour apprendre ou pour découvrir soi-même les Mathématiques. On y explique aussi tout ce qu'il faut sçavoir des rapports simples & des rapports composés, & de toutes les différentes comparaisons qu'on peut faire des uns & des autres. Ce sont là les seuls principes ou les seules connoissances que suppose l'*Analyse démontrée*. Les Commencans pourront l'entendre sans y trouver aucune difficulté qui les arrête. Ils y verront que les calculs qu'ils auront appris dans ce premier Volume sont la clef qui ouvre l'entrée à toutes les découvertes.

*Explication de la Methode qu'on observe dans les
Mathématiques qui conduit toujours
à la vérité.*

Les Mathématiques se sont toujours distinguées par leur certitude: Elles ne contiennent que des veritez sans aucun mélange d'opinion ni d'erreur. C'est une prérogative qui leur est propre de l'aveu de tout le monde, & elle ne leur a jamais été contestée. Cette certitude leur vient de deux causes.

La

La premiere est qu'elles ne s'appliquent qu'à des objets dont on a des idées claires & distinctes ; car il n'y a pas d'objets dont on ait des idées plus claires & plus distinctes que celles que nous avons des nombres , des trois dimensions de l'étendue , & de toutes les grandeurs dont on cherche à connoître les rapports dans les Mathematiques , & l'on peut toujours voir clair dans les déductions que l'on peut faire de ces rapports les uns des autres . La seconde cause de la certitude des Mathematiques est que l'on y suit toujours , sans jamais s'écarter , une methode qui conduit infailliblement à la verité .

Pour faire clairement concevoir cette methode aux Commencans , & pour faire voir qu'elle conduit avec une entiere certitude à la verité les démarches de l'esprit qui la suit , on leur fera faire attention aux démarches que fait notre esprit dans la recherche de la verité .

Quand notre esprit cherche à découvrir quelque verité , il s'applique aux objets qui en sont le sujet ; il les considere avec attention chacun en particulier ; & plus il s'applique , & plus son attention est forte ; plus aussi ces objets s'approchent , plus ils lui paroissent clairs ; il en voit clairement toutes les faces ; il distingue l'une après l'autre toutes les choses que ces objets renferment , & rien ne lui en échape .

Ces premieres démarches de l'esprit dans la recherche de la verité , s'appellent de *simples perceptions* , ou de *pures perceptions* .

Après avoir apperçu clairement & distinctement les objets , il faut donner , pour ainsi dire , à chacun

sa marque qui le distingue de tous les autres, & qui soit tellement liée à cet objet clairement apperçu, que quand cette marque se présente, cet objet se présente en même temps à notre esprit sous une vûe claire & distincte. Ces marques sont d'elles-mêmes des signes arbitraires, mais elles deviennent des signes propres aux objets, & elles servent à les présenter à l'esprit par l'union qu'on en a faite à ces objets, & par l'habitude qu'on a acquise de les unir ensemble. Les paroles dont on se sert pour déterminer un mot ou une autre marque à signifier un objet dont on a une idée claire & distincte, s'appelle *une définition*: en voici une: *Un nombre entier est celui qui contient exactement l'unité plusieurs fois.*

2°. Notre esprit après avoir considéré attentivement les objets sur lesquels il veut découvrir des veritez, il les compare les uns avec les autres, il en apperçoit par son attention les rapports; c'est à dire il voit clairement s'ils sont égaux les uns aux autres, s'ils sont inégaux; si les uns contiennent ou ne contiennent pas les autres, &c. Ce sont ces rapports clairement apperçus entre les objets présents à l'esprit & comparez ensemble, qu'on appelle *des veritez*. Car puisque ces rapports sont clairement apperçus par l'esprit, ils sont tels qu'ils sont apperçus, puisque le neant ne sçauroit être apperçu. Les veritez sont les rapports réels entre les objets. L'erreur ou la fausseté n'est rien. La verité peut bien être apperçue, car elle est, c'est un rapport réel; mais l'erreur ou la fausseté ne sçauroit être apperçue, car elle n'a aucune réalité, elle n'est rien, & le neant ne sçauroit être apperçu; appercevoir

rien, & ne point appercevoir, c'est la même chose.

Quand notre esprit acquiesce aux rapports qu'il apperçoit ou qu'il s'imagine appercevoir, en jugeant que ces rapports sont tels qu'il les apperçoit, cet acquiescement de notre esprit s'appelle un *Jugement* ; par exemple, notre esprit apperçoit le rapport d'égalité qui est entre 2 fois 2 & 4, il acquiesce à ce rapport, & il juge que ce rapport est vrai, en affirmant que 2 fois 2 sont 4. Ces Jugemens ou ces acquiescemens de notre esprit aux rapports qu'il apperçoit, sont les secondes démarches que fait notre esprit dans la recherche de la vérité.

Il est bon de faire distinguer deux choses dans les secondes démarches de notre esprit : la première est la perception des rapports sans acquiescer encore à ces rapports, sans juger qu'ils sont vrais. Cette perception doit précéder les jugemens, & elle est une pure perception, la seconde chose est l'acquiescement à ces rapports. C'est dans l'acquiescement aux rapports que consiste, à proprement parler, le jugement ou la seconde démarche de notre esprit dans la recherche de la vérité. Cette remarque fera distinguer la vérité de l'erreur. Car ce qu'on apperçoit clairement, étant nécessairement & réellement tel qu'il est apperçu, il ne peut y avoir d'erreur dans les pures perceptions ; on ne sauroit appercevoir que la vérité, que ce qui est tel qu'il est apperçu. On ne sauroit donc se tromper, c'est à dire on ne sauroit tomber dans l'erreur, quand on n'acquiesce qu'à ce qu'on apperçoit clairement. L'erreur ne peut donc venir que de ce qu'on juge qu'on apperçoit, ce qu'on n'apperçoit

point; de ce que le jugement sur un rapport précède la perception de ce rapport. Par exemple, si l'on juge qu'il y a un rapport d'égalité entre 2 fois 2 & 5, on tombe dans l'erreur, parceque ce jugement prévient la perception de l'esprit; l'esprit n'apperçoit point un rapport d'égalité entre 2 fois 2 & 5. Si donc on ne jugeoit d'un rapport qu'après l'avoir clairement apperçu, on ne le tromperoit point; & l'erreur ne vient que de ce qu'on juge d'un rapport qu'on n'a pas auparavant apperçu. C'est donc nous qui faisons l'erreur en jugeant de nous-mêmes qu'il y a de certains rapports que notre esprit n'a pas apperçu avant de porter notre jugement. Mais nous ne faisons pas la vérité, nous ne faisons que l'appercevoir, & la découvrir telle qu'elle est en elle même.

Les paroles dont on se sert pour exprimer chacun de nos jugemens, s'appellent une *Proposition*. En voici une. 12 contient 3 pris quatre fois.

3°. Après que notre esprit a comparé les objets de ses perceptions les uns avec les autres, qu'il en a apperçu les rapports, & qu'il en a porté son jugement; pour avancer dans la recherche de la vérité, il compare ces rapports mêmes les uns avec les autres, & en s'appliquant avec attention à ces comparaisons des rapports, il apperçoit clairement les liaisons qu'ils ont entr'eux: il voit que les uns se déduisent nécessairement des autres; & en suivant la perception qu'il en a, il déduit les rapports les uns des autres. Cette troisième démarche de l'esprit, par laquelle il déduit une vérité d'une ou de plusieurs autres dont il apperçoit qu'elle doit suivre

nécessairement, s'appelle *un raisonnement* ; en voici un. 3 pris quatre fois est égal à 12 ; 6 pris deux fois est aussi égal à 12. Par conséquent 6 pris deux fois est égal à 3 pris quatre fois. La déduction que fait notre esprit de la troisième vérité des deux autres dont elle est une suite nécessaire, est un raisonnement.

On doit faire distinguer dans cette troisième démarche de l'esprit, comme on a fait dans la seconde, la pure perception de la suite nécessaire qui se trouve entre un rapport & d'autres rapports dont il se déduit, d'avec la déduction que fait notre esprit de ce rapport en le tirant des autres, & en acquiesçant à cette déduction. Car notre esprit ne sauroit se tromper en appercevant clairement les liaisons qui sont entre les rapports, & qu'on peut les déduire les uns des autres ; puisque si cette liaison nécessaire est apperçue clairement, elle est telle qu'elle est apperçue, elle est vraie ; le neant ne sauroit être apperçu. On ne tombe donc dans l'erreur en faisant des raisonnemens dans la recherche de la vérité, que lorsque l'on déduit un rapport d'autres rapports avant d'avoir vu clairement que cette déduction est nécessaire. L'action de l'esprit, par laquelle il fait cette déduction, & y acquiesce sans l'avoir apperçue clairement, est la cause de l'erreur, qui consiste en ce qu'il croit qu'un certain rapport est une suite nécessaire d'autres rapports ; & cependant dans la vérité cette suite n'est point, & elle ne sauroit être apperçue.

Pour rendre sensibles aux Commencans ces trois démarches de notre esprit dans la recherche de la

verité, on en va faire voir l'application à un exemple sur le mouvement des corps. On supposera qu'on veut découvrir comment on peut faire que deux boules sur un plan horizontal poli en allant en ligne droite l'une contre l'autre, se rencontrent avec des forces égales, ou avec des forces qui soient en tel rapport qu'on voudra.

1°. Notre esprit doit considerer avec attention l'idée des deux corps, en quoi consiste leur mouvement lorsqu'ils vont l'un contre l'autre; qu'est-ce qui fait la quantité de leur mouvement; comment un mouvement peut augmenter ou diminuer, être plus fort ou plus foible. Les connoissances de toutes ces choses conduiront à la resolution de la question.

On voit d'abord que chaque boule est un corps composé de parties de même nature, qu'on nomme à cause de cela *homogenes*; & l'assemblage ou le nombre de ces parties qui se meuvent toutes ensemble, se nomme *la masse* du corps.

Pendant qu'un corps ne change point de place, & qu'il conserve les mêmes rapports de proximité & de distance avec les corps qui l'environnent, l'esprit n'y voit aucun mouvement: Mais s'il change sans cesse de place, s'il change successivement les rapports de distance qu'il a avec les corps qui l'environnent, en un mot s'il est transporté d'un lieu en un autre en passant successivement par les milieux qui sont entre deux, l'esprit voit clairement que ce corps est en mouvement. Ainsi dans un corps en mouvement notre esprit n'y apperçoit que du transport, en ne faisant attention qu'à ce qui est dans un

corps en mouvement, & point du tout à la force extérieure qui lui donne le mouvement, dont la considération seroit ici inutile. Notre esprit n'attache donc pas d'autre idée au terme le mouvement d'un corps, que l'idée de transport de ce corps.

L'esprit apperçoit encore clairement, que si un corps qui a parcouru une certaine longueur, comme dix toises en un certain temps comme deux minutes, venoit à parcourir une double longueur, comme 20 toises dans le même temps de deux minutes, il auroit dans le second cas le double du transport ou du mouvement qu'il avoit dans le premier cas. Ou bien encore, si le même corps avoit parcouru 10 toises dans le temps de deux minutes, & qu'il vint à parcourir ces 10 toises dans la moitié du temps, c'est à dire en une minute, l'esprit voit clairement qu'il auroit dans le second cas, le double du transport ou du mouvement qu'il avoit dans le premier cas.

La longueur du chemin que parcourt un corps par son mouvement ou par son transport, comparée au temps pendant lequel cette longueur est parcourue, est ce qu'on nomme *la vitesse*. Par exemple, si deux corps égaux se meuvent, & que l'un parcoure une plus grande longueur que l'autre en un même temps, il a plus de vitesse que l'autre. Comme encore si deux corps égaux parcourent la même longueur ou des longueurs égales, & que le temps que le premier emploie à parcourir cette longueur, soit plus petit que le temps que le second emploie à parcourir la même longueur, le premier a plus de vitesse que le second.

Notre esprit apperçoit donc clairement qu'il y a plus de transport, ou plus de mouvement dans un corps, lorsqu'il y a une plus grande longueur parcourue dans le même temps, ou bien lorsque la même longueur est parcourue en moins de temps; & que dans ces cas la vitesse du mouvement est plus grande.

Notre esprit voit encore clairement qu'en concevant la masse d'un corps qui se meut, partagée en une infinité de petites parties égales, chacune de ces parties égales a son transport ou son mouvement propre. Et comme on suppose que le corps se meut en ligne droite, le transport ou le mouvement de l'une des parties est égal au mouvement de chaque autre partie égale, & la vitesse du transport d'une partie est égale à la vitesse du transport de chaque autre partie. Ainsi on voit évidemment que plus il y a de parties dans un corps qui se meut en ligne droite, & plus il y a de mouvement.

2°. Après ces perceptions, notre esprit porte ces jugemens: Puisque le mouvement n'est que le transport d'un corps; plus il y a de transport, plus il y a de mouvement.

Plus il y a de vitesse dans le transport d'un corps qui se meut, & plus son mouvement est grand.

Quand un corps se meut en ligne droite, la vitesse du transport de chacune des petites parties étant égale, la quantité totale du mouvement est la vitesse de chaque petite partie, répétée autant de fois, ou prise autant de fois que la masse contient de fois chaque partie; c'est ce qu'on nomme la vitesse multipliée par la masse.

La

La force d'un corps en mouvement n'est que la quantité de son mouvement, & suivant le jugement précédent, c'est la vitesse de son transport multipliée par sa masse.

3°. Après ces secondes démarches, notre esprit n'a plus que cette troisième à faire pour résoudre la question. Pour faire mouvoir deux corps l'un contre l'autre avec des forces égales, il n'y a qu'à donner à chacun une égale quantité de mouvement. Mais pour leur donner cette égale quantité de mouvement, il faut donner à chacun une vitesse qui soit telle, que la vitesse du premier corps étant multipliée par la masse du premier corps, le produit qui en viendra soit égal à celui qui naîtra de la vitesse du second multipliée par la masse du second. D'où l'on conclut qu'il n'y a qu'à donner aux deux boules des vitesses telles, que la vitesse de chacune étant multipliée par sa masse, il en résulte un produit égal; & les boules se rencontreront avec des forces égales.

Après cela il n'y a plus qu'à déterminer le rapport des masses des boules pour déterminer les vitesses. Si, par exemple, elles sont égales, il faut donner à chacune une égale vitesse. Si l'une est double de l'autre, ou triple, ou quadruple, &c. il faut donner à la plus petite une vitesse double, ou triple, ou quadruple, &c. de la vitesse qu'on donnera à la plus grande.

Si l'on veut que les forces des deux boules qui se meuvent l'une contre l'autre soient en tel rapport qu'on voudra, par exemple, que l'une soit double, ou triple ou quadruple, &c. de l'autre, &c

que les boules soient égales, il faut donner une vitesse double, triple, &c. à celle qui doit avoir une force double, triple, &c.

Si les boules sont inégales, il faut régler la vitesse qu'on leur doit donner par rapport à leur masse, & par rapport au degré de force qu'on veut donner à chacune des boules : par exemple, si l'on veut qu'une boule, qui n'est que la moitié d'une autre, vienne rencontrer cette autre (qui a un degré de vitesse) avec une force double, il faut lui donner quatre degrés de vitesse.

Les trois démarches de notre esprit que l'on a expliquées, & qu'on vient de rendre sensibles par un exemple, suffisent pour découvrir les veritez qui ne sont pas fort composées. Mais quand on veut s'appliquer à la recherche d'un grand nombre de veritez qui dépendent les unes des autres, par exemple, à la recherche des veritez que renferme une science entiere comme celle du mouvement, ou comme la Geometrie, &c. Il y a un si grand nombre d'objets auxquels il faut s'appliquer avec attention pour les appercevoir clairement ; il y a tant de veritez à découvrir, & tant de raisonnemens à faire pour les déduire les unes des autres, qu'il est necessaire d'observer un certain ordre dans toute la suite des démarches de notre esprit qui les conduise toujours sûrement à la verité. Cet ordre s'appelle *Methode*, & il y en a de deux sortes.

L'une se nomme la *Methode synthetique ou de composition*. Cette Methode prescrit de commencer par les veritez les plus simples ; d'en déduire les veritez qui ne dépendent que des premieres, & qui ont

avec elles une liaison nécessaire; de déduire de ces secondes veritez celles qui ne dépendent que des premieres & des secondes, & qu'on peut nommer les troisièmes veritez; enfin d'avancer ainsi par ordre des veritez plus simples à celles qui les suivent immédiatement. Cette Methode est propre pour enseigner une science entiere.

L'autre Methode s'appelle *Methode analytique ou de resolution*. Elle sert sur tout pour la resolution des questions particulieres. Voici ce qu'elle preteit. Quand on veut résoudre une question; après l'avoir bien conçue, il faut supposer qu'elle est résolue, c'est à dire, il faut supposer que ce qui est en question est vrai, ou même quelquefois on peut supposer qu'il est faux. Il faut déduire de cette supposition les consequences qui s'en peuvent déduire; de ces premieres consequences en déduire de secondes; des troisièmes de ces secondes; & continuer ainsi de raisonner jusqu'à ce qu'on soit arrivé à quelque proposition dont la verité est évidente, ou qui est évidemment fausse. Dans le premier cas, ce qui étoit en question qu'on a supposé vrai, l'est effectivement, puisqu'il conduit nécessairement à une verité évidente, d'où l'on peut retourner par la Methode synthetique à ce qu'on a supposé être veritable. Si l'on avoit supposé que ce qui étoit en question fût faux, & que cela eût conduit à une proposition évidente, il est clair que ce qui auroit été supposé faux, le seroit effectivement, & qu'on pourroit démontrer par la Methode synthetique en retournant de la proposition évidente où on étoit venu, à celle qui étoit en question, que ce que l'on

avoit supposé faux, seroit tel qu'on l'avoit supposé. Dans le second cas, où l'on arriveroit par des conséquences toujours évidentes à une proposition évidemment fausse, il est visible que ce que l'on avoit supposé être vrai, se trouve faux.

La connoissance qu'on vient de donner des démarches que fait notre esprit dans la recherche de toutes les veritez, tant les plus simples que les plus composées, servira à faire comprendre aux Commencans les Regles de la Methode que l'on observe exactement dans les Mathematiques, & à leur faire voir clairement que ces Regles conduisent les démarches de l'esprit infailliblement à la verité.

Regles sur les perceptions. 1. On ne doit former aucun jugement, ni aucun raisonnement sur les objets de ses applications, que l'on n'ait auparavant des perceptions claires & distinctes de ces objets, des rapports de ces objets, & des déductions par lesquelles on les tire les uns des autres, c'est à dire, des suites & des dépendances nécessaires qu'ont ces rapports les uns des autres : Et l'on doit toujours conserver l'évidence dans toutes les démarches de l'esprit en la recherche de la verité.

2. Comme l'évidence dans nos perceptions est absolument nécessaire pour découvrir la verité, on doit être exact à pratiquer les moyens qui procurent cette évidence. Le premier est d'apporter toute l'attention dont nous sommes capables aux objets de nos applications, & de ne point nous laisser de les considérer jusqu'à ce que nous ayons clairement & distinctement connu tout ce qu'ils contiennent, ou du moins ce qui nous paroitra nécessaire pour

la résolution de la question qui est le sujet de notre application. Le second est de nous rendre si familière la perception claire & distincte des objets en nous y appliquant plusieurs fois, que nous n'y puissions plus penser qu'ils ne se présentent à notre esprit avec une entière évidence. (Ce moyen est plus important qu'on ne le pense ordinairement.) Le troisième est que, puisqu'on doit distinguer les objets que nous avons apperçus clairement par des marques, ou des signes, ou des paroles qui leur soient tellement liées, que ces marques ne puissent se présenter que les objets ne se présentent en même temps sous une vue claire & distincte; il faut par des définitions, donner des noms à tous les objets que nous avons apperçus clairement & distinctement; c'est à dire, il faut attacher ces objets à des noms qui en réveillent les idées claires & distinctes; & il faut bien prendre garde de ne se servir que de noms qui soient attachez, ou par l'usage, ou par des définitions de nom, à signifier des objets dont on a des idées claires & distinctes, car on tomberoit dans l'erreur si l'on se servoit de mots équivoques, c'est à dire qui réveillent plusieurs idées différentes, & qui peuvent être pris tantôt en un sens, & tantôt en un autre; ou de mots qui excitent des idées obscures, c'est à dire qui n'ont pas de signification claire & distincte.

Règles sur les propositions. 1. On doit admettre pour vraies, sans preuve, les propositions qui expriment des rapports que l'on voit clairement & distinctement; comme celles-ci. Le tout est plus grand qu'une de ses parties: Un tout est égal à toutes les parties

prises ensemble : Deux grandeurs égales à une troisième sont égales entr'elles ; & les autres semblables qui expriment des rapports qu'on apperçoit avec une entière évidence. Ces sortes de propositions s'appellent des *axiomes*. 2. Toute proposition qui exprime un rapport qu'on n'apperçoit pas avec évidence , ne doit pas être admise qu'on ne l'ait auparavant démontrée, c'est à dire, qu'on n'ait fait voir évidemment qu'elle se déduit nécessairement d'autres propositions évidentes.

Règles sur les raisonnemens. Il y a deux choses à considérer dans les raisonnemens ; les propositions qui précèdent les conséquences d'où sont tirées ces conséquences ; la déduction des conséquences des propositions qui les précèdent. 1. *Règle*. On ne doit mettre parmi les propositions dont on tire les conséquences, que des propositions qui soient dans la dernière évidence, ou par elles-mêmes, (c'est à dire qu'étant simples, il suffise de les considérer avec attention pour en voir clairement la vérité ;) ou parcequ'elles ont déjà été démontrées, & qu'elles sont devenues évidentes par la déduction nécessaire qu'on en a faite d'autres propositions évidentes. 2. *Règle*. Il faut qu'on voye clairement en déduisant les propositions les unes des autres, que celles qui sont déduites sont des suites nécessaires des propositions dont elles sont déduites.

On n'admet dans les Mathématiques aucunes preuves qui ne soient conformes à ces deux Règles, & c'est à ces seules preuves qu'on donne le nom de *Démonstrations*.

Quand on fait la recherche de veritez fort com-

posées, ou d'un grand nombre de veritez qui dependent les unes des autres, & qu'il faut pour les decouvrir beaucoup de perceptions, de jugemens & de raisonnemens; il faut mettre bien de l'ordre entre toutes ces démarches de l'esprit, & employer *la Methode synthetique*, ou *la Methode analytique*, ou mêler l'une avec l'autre. Voici.

Les Regles communes à ces deux Methodes. 1. Il faut partager le sujet de son application en toutes les parties qu'il peut avoir, en faisant des divisions exactes qui comprennent tout le sujet. Il faut ensuite examiner avec attention toutes ces parties une à une, en commençant par les plus simples, & allant selon l'ordre naturel aux plus composées, en mettant même de l'ordre parmi celles qu'il paroît indifferent d'examiner les unes plutôt que les autres; & ne point passer des unes aux autres, qu'on n'ait reconnu distinctement celles que l'on quitte pour s'appliquer aux suivantes, & sans se les être rendues très familières: il faut retrancher après cela toutes les choses qu'on verra clairement être inutiles à decouvrir la verité qu'on cherche. 2. Dans toute la longue suite des propositions & des raisonnemens qui sont decouvrir une verité composée, on doit voir clairement la verité de chacune des propositions en particulier, & que toutes les deductions que l'on fait de ces veritez, les tirant les unes des autres, sont nécessaires.

La Regle particuliere à la Methode synthetique, est qu'il faut toujours commencer par les choses les plus simples & les plus connues, & n'établir pour principes dont on doit se servir dans les raisonnemens, que

des propositions entièrement évidentes. Il faut ensuite aller suivant l'ordre naturel des choses les plus simples aux plus composées sans faire de saut, c'est à dire, il faut en allant des premiers principes aux dernières veritez, passer par toutes les veritez qui sont comme les milieux, chacun en son rang naturel, entre les premiers principes & les dernières veritez, sans omettre aucun de ces milieux; & conserver toujours l'evidence dans tout le passage.

Les Regles particulieres à la Methode analytique, sont; la 1^{re}, qu'il faut concevoir clairement & distinctement l'état de la question qu'on veut résoudre, c'est à dire, qu'il faut avoir des idées distinctes des termes de la question, afin de pouvoir les comparer, & découvrir le rapport que l'on cherche; & ne pas perdre de vue l'état de la question dans toutes les démarches que fait l'esprit pour la résoudre, afin de n'en pas faire d'inutiles.

Dans chaque question ou Problème, il y a toujours trois choses à distinguer; 1^{re}. des grandeurs inconnues qu'on cherche à découvrir; 2^{re}. des grandeurs connues, & 3^{re}. des rapports connus entre les grandeurs connues & les inconnues; & ces rapports sont les conditions de la question qui la déterminent. Il est ordinairement facile de distinguer, comme le prescrit la premiere Regle, les grandeurs connues & les inconnues de la question; mais il y a bien des questions où l'on ne voit pas d'abord les rapports déterminez entre les grandeurs connues & les inconnues qu'on cherche, qui sont nécessaires pour résoudre la question, & qui la déterminent; & c'est souvent la difficulté de trouver ces rapports,

rapports, qui fait tout la difficulté de la question.

La seconde Regle est (quand l'énoncé de la question n'exprime pas tous les rapports qui déterminent la question) d'employer tout ce qu'on peut avoir de sagacité, & de chercher par quelque effort d'esprit dans les propriétés des grandeurs qui sont les termes de la question, les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues qu'on cherche, qui déterminent la question, & qui sont nécessaires pour la résoudre; & que ces rapports soient clairement & distinctement connus.

Dans les questions sur les nombres, quand les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues, qui déterminent la question, ne sont pas bien énoncés dans la question, ce qui arrive rarement, on les cherche ces rapports dans les propriétés des nombres quand la question est de Geometrie, ou du moins quand on y peut faire entrer des figures de Geometrie (ce qui arrive dans la plupart des Problèmes) on cherche les rapports entre les grandeurs connues & les inconnues, qui déterminent la question, dans les propriétés des figures propres à la question: Quand la question est sur les grandeurs sensibles, on doit chercher les rapports qui déterminent la question dans les propriétés des grandeurs sensibles. Voici un exemple qui fera voir la maniere d'appliquer la seconde Regle. Supposé qu'on veuille résoudre le Problème qui fut proposé à Archimede, & qu'il resolut, que voici. *Trouver si un ouvrage qui paroît être d'or, & que l'ouvrier assure être de pur or, n'est point mêlé d'argent, sans l'endommager.* La premiere Regle s'applique sans peine, & l'énoncé

du Problème fait voir nettement l'état de la question. Il s'agit de s'assurer si l'ouvrage qui paroît d'or, & que l'ouvrier assure être de pur or, n'est point un composé ou un mélange d'or & d'argent. La condition qui y est ajoutée de ne point endommager l'ouvrage, entre aussi dans l'état de la question, & la rend ce semble plus difficile, en excluant tous les moyens de découvrir s'il y a ou s'il n'y a pas de mélange en endommageant l'ouvrage. Il faut donc par la seconde Regle, chercher les rapports qui détermineront la question, & qui donneront le moyen de la résoudre, dans les propriétés de l'or pur, de l'argent, & d'un mélange d'or & d'argent. C'est une propriété des métaux, qu'en prenant des volumes de différens métaux, chacun d'un égal poids, tous ces volumes également pesans, seront inégaux en étendue, & le volume d'or sera le moindre de tous. Par exemple, un volume d'or pesant 10 livres, & un volume d'argent du poids de 10 livres sont inégaux en étendue; & le volume d'or est moindre que le volume d'argent. Cette propriété fournit le rapport qu'on cherche pour déterminer la question: car le poids de l'ouvrage qui est le sujet du Problème, étant par exemple, supposé d'une livre, en prenant un lingot d'or pur d'une livre, il faut chercher le rapport de la grandeur du volume d'or à la grandeur du volume de l'ouvrage, & s'ils sont de même grandeur, il n'y a point de mélange; si le volume d'or pur est moindre que le volume de l'ouvrage, il y a du mélange. Et ce rapport est conforme à la condition de ne point endommager l'ouvrage; puisque, pour connoître le rapport des volu-

mes du lingot d'or pur & de l'ouvrage, il ne faut que tremper le lingot d'or pur & l'ouvrage dans de l'eau contenue dans un vaisseau qui ait sur un de ses cotéz des marques qui fassent connoître la quantité d'eau que fait élever dans le vaisseau, ou que fait sortir du vaisseau, le corps plongé dans l'eau, laquelle quantité d'eau élevée dans le vaisseau, ou sortie du vaisseau, est égale au volume de ce corps.

Les métaux ont une autre propriété, dont la raison se tire de la propriété précédente, laquelle donne encore plus facilement le rapport qui détermine la question, & qui en fait découvrir la résolution. La voici. Des volumes égaux en pesanteur de différens métaux, perdent, étant plongez dans l'eau, une partie chacun de leurs poids; ces parties perdues sont inégales, & l'or en perd moins que les autres. On tire de cette propriété le rapport qui détermine la question. Il faut chercher, en pesant dans l'eau un lingot d'or pur du poids de l'ouvrage, & en pesant de même l'ouvrage, le rapport des parties de leur poids que perdront dans l'eau le lingot d'or pur & l'ouvrage. Car si les parties du poids perdues se trouvent égales, l'ouvrage est d'or pur; & si elles sont inégales, il y a du mélange. On trouveroit la quantité de ce mélange en comparant ensemble les parties que perdroient de leur poids dans l'eau l'ouvrage; un lingot d'or pur, un lingot d'argent, tous trois d'un même poids. Mais cette recherche seroit ici inutile; ce qu'on a dit de la manière de trouver le rapport qui détermine la question proposée par le moyen des propriétés des grandeurs qui entrent dans la question, suffit pour faire concevoir la seconde Règle.

Quand on a bien distingué dans une question les grandeurs inconnues qu'on cherche, les grandeurs connues, & qu'on a les rapports des unes avec les autres, qui sont les conditions du Problème qui le déterminent, *La troisième Règle* est qu'il faut supposer la question comme résolue, & déduire de cette supposition les conséquences qui s'en peuvent déduire; de ces premières en déduire de secondes, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la résolution évidente de la question.

Voici la manière dont on emploie cette troisième Règle dans la résolution des Problèmes des Mathématiques. Regardant le Problème comme s'il étoit résolu, on marque les grandeurs connues de la question ordinairement par les premières lettres de l'alphabet; on marque les inconnues de la question communément par les dernières lettres de l'alphabet, quoique cela soit arbitraire. En considérant les grandeurs inconnues comme si elles étoient connues, on les compare avec les grandeurs connues, suivant les rapports connus qu'elles ont ensemble; on marque ces rapports par les expressions littérales suivant les Règles du calcul, & on les réduit à une seule expression, qui consiste en deux parties égales, qu'on appelle à cause de cela *une équation*, ou *une égalité*. Cette équation est une expression littérale de tout le Problème, & de tous les rapports ou de toutes les conditions qui le déterminent; c'est aussi l'expression littérale de la supposition qu'on fait que le Problème est résolu. Voici comment on tire des conséquences de cette supposition par le moyen du calcul, jusqu'à la résolution évidente du

Problème. Les grandeurs inconnues sont mêlées avec les grandeurs connues, & quelques fois entre elles dans les deux parties égales de l'équation, qu'on appelle aussi les deux membres de l'équation. On applique sur ces deux parties égales les opérations du calcul, par lesquelles on fait sur chaque partie égale des changemens égaux; ce qui n'ôte point l'égalité entre les deux parties égales; & cependant on arrive par ces calculs à dégager les inconnues, c'est à dire à faire en sorte que les inconnues se trouvent égales à des grandeurs connues; ainsi on arrive à une résolution évidente du Problème, & on y arrive en tirant de la supposition qu'on a faite que le Problème étoit résolu, des conséquences nécessaires; puisque les opérations du calcul sur l'expression du Problème sont autant de raisonnemens justes & suivis, par lesquels on tire des rapports représentés par l'expression du Problème, d'autres rapports qui s'en déduisent nécessairement, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la résolution évidente du Problème, qui est la dernière conséquence évidente & nécessaire à laquelle on tendoit pendant toute la résolution.

L'explication qu'on vient de faire des Regles de la Methode qu'on suit dans les Mathematiques, suffit pour faire voir clairement aux Commencans qu'elle conduit infailliblement à la vérité. Car la vérité n'est qu'un rapport réel soit simple, soit composé. Or la Methode conduit de telle sorte les démarches de notre esprit, qu'en la suivant il ne doit admettre que des rapports réels, soit simples, soit composés; puisqu'il ne doit admettre que les rap-

ports qu'il apperçoit clairement & distinctement. La Methode conduit donc infailliblement notre esprit à la verité.

C'est ici le lieu de faire distinguer la vraie Methode qu'on suit dans les Mathematiques, qui vient d'être expliquée, d'avec la seule apparence de cette Methode, dont on peut abuser pour faire illusion aux simples & à ceux qui n'y regardent pas de près. Ce n'est pas assez pour traiter une matiere suivant la Methode des Mathematiques, que de donner aux propositions les noms d'Axiomes, de Définitions, de Suppositions, de Theorèmes, de Lemmes, en un mot tous les noms semblables à ceux dont on se sert dans les Mathematiques; & de donner de même aux preuves le nom de Démonstrations. Ce n'est là que l'exterieur & l'apparence de la Methode des Mathematiques, & ce n'est pas là la vraie Methode qui conduit infailliblement à la verité, quand on raisonne sur des matieres dont on n'a pas des idées claires & distinctes; quand les propositions, qu'on nomme Axiomes, ou suppositions sont obscures, & ne se font pas admettre par leur évidence; quand dans les preuves à qui donne le nom de Démonstrations, l'esprit n'apperçoit pas d'évidence dans les propositions, ni dans les déductions par lesquelles elles sont tirées les unes des autres.

*De l'utilité des Mathematiques pour perfectionner
notre esprit.*

On ne parlera pas ici de l'utilité des Mathematiques par rapport à toutes les commoditez qu'elles fournissent aux besoins des hommes, par rapport à

ce qu'elles contribuent à la perfection des Arts, ni par rapport aux secours qu'en tirent les Sciences, & sur tout la Physique, qu'on ne sçauroit apprendre à fond, ni traiter avec quelque exactitude sans les Mathematiques; on déduira simplement comme un Corollaire de la Methode qu'on suit dans les Mathematiques, les grands avantages qu'on peut tirer de ces Sciences pour perfectionner notre esprit; c'est le principal usage qu'on doit faire des Mathematiques: c'est aussi le principal motif qui doit porter les jeunes personnes à s'y appl.quer.

La premiere qualité de l'esprit de l'homme, la plus necessaire, celle qui s'étend à toutes les actions, toutes les applications, tous les emplois, toutes les affaires, toutes les entreprises, celle qui doit diriger toutes les autres qualitez, en un mot celle, qui étant jointe à la droiture du cœur qu'elle doit mettre en œuvre, & qu'elle doit conduire par sa lumiere, fait toute la perfection de l'homme, c'est *la justesse d'esprit*. C'est par elle qu'il distingue en toutes choses le vrai du faux, le juste de l'injuste, le bon parti du mauvais; c'est par cette estimable qualité que l'homme juge de toutes choses selon leur valeur, qu'il place toutes choses dans le rang qui leur convient; c'est par elle qu'il est judicieux dans toute la conduite; en un mot c'est par elle qu'il est raisonnable, & qu'il découvre en toutes choses ce que prescrit le bon sens ou la raison.

Il ne suffit pas pour avoir cette justesse d'esprit, de sçavoir les Regles qui conduisent infailliblement à la verité; elle consiste dans l'habitude même de suivre ces Regles en toutes rencontres; elle suppose

avant toutes choses un vrai desir de n'être pas trompé, & un ardent amour de la verité; elle réunit en elle les habitudes suivantes; 1°. une force d'esprit qui lui fasse apporter à tous les sujets sur lesquels il doit juger, toute l'attention qu'ils demandent pour en juger selon la verité, sans se rebuter de la peine qui s'y peut rencontrer; 2°. une grandeur ou une étendue d'esprit qui dans les questions composées l'ait accoutumé à regarder d'une simple vue la suite de plusieurs principes qui conduisent tous ensemble à la verité qu'il cherche; 3°. une fermeté d'esprit qui l'empêche de se laisser emporter par les premières vrai-semblances, qui ne lui permette pas de se rendre aux seules apparences de la verité, qui lui fasse rettenir & suspendre son jugement dans les choses naturelles, & qui sont du ressort de la raison, jusqu'à ce qu'il soit forcé de le porter par une évidence entière, & qui ensuite l'attache constamment à la verité clairement connue, & le retienne inébranlable; 4°. une netteté d'esprit ou une habitude à mettre un tel ordre dans toutes les pensées, un tel arrangement dans toutes les parties du sujet de son application, qu'il puisse aisément faire toutes les comparaisons nécessaires pour trouver la verité; 5°. une sagacité qui fasse découvrir dans les questions les plus difficiles & les plus embarrassées, les moyens les plus simples & les plus propres pour les résoudre; 6°. enfin une habitude qu'il doit se faire de la connoissance claire & distincte des principes les plus simples, les plus généraux, & les plus féconds sur chaque matière qui peut être d'usage dans la vie; de façon que ces principes soient toujours
présens,

presens, & servent de lumiere à l'esprit dans toutes les occasions qui peuvent se presenter, & qu'il n'ait plus qu'à en tirer les conséquences, pour juger sainement de la plupart des choses qui se rencontrent le plus ordinairement. C'est le concours de toutes ces habitudes qui forme celle qu'on nomme justesse de l'esprit.

Cette excellente habitude s'acquiert comme les autres par la pratique continuelle des actes qui la produisent. Et il est évident par l'explication qu'on a fait de la Methode qu'on suit toujours dans les Mathematiques, que l'on y pratique continuellement les actes qui forment cette habitude. D'où suit évidemment l'utilité des Mathematiques pour former le jugement & perfectionner l'esprit.

Car la seule qualité de l'esprit necessaire pour apprendre les Mathematiques, est d'être capable d'attention. Un esprit attentif y fera un progrès prodigieux. C'est par la seule attention qu'il découvrira toutes les veritez que ces Sciences contiennent, & qu'il se fera jour au travers des obscuritez dont elles paroissent environnées aux esprits incapables d'attention, dans tout ce qu'elles semblent avoir de plus caché & de plus secret. Ainsi l'étude de ces Sciences est le moyen le plus propre à acquérir la force d'esprit, & à le rendre maître de son attention. Il n'y en a pas aussi de plus capable de lui donner l'étendue dont il a besoin lorsqu'il faut qu'il s'applique à des questions fort composées, & où il doit envisager d'une seule vûe un grand nombre de principes d'où dépend la resolution. Car les veritez que ces Sciences expliquent sont

toutes liées les unes aux autres, & un seul principe répand une telle lumière sur toutes les veritez qu'il renferme, que l'esprit voit d'une simple vûe toute la suite qu'elles ont entr'elles jusqu'à la dernière, pour ainsi dire, qui les suppose toutes. C'est dans ces Sciences que se forme le goût de l'esprit pour la verité; qu'il s'accoutume & se familiarise, pour ainsi parler, avec elle; qu'il la distingue, dans les choses qui sont du ressort de la raison, par son propre caractère qui est la lumière & l'évidence. Le bel ordre que mettent ces Sciences entre toutes les veritez qu'elles enseignent, qui en fait une des plus grandes beautés, & en quoi consiste le principal de leur excellente Methode, sert à former la netteté de l'esprit, & à l'accoutumer à arranger ses pensées dans tous les sujets de ses applications, de la manière la plus naturelle & la plus propre tant à découvrir la verité qu'à l'expliquer aux autres. L'artifice ingénieux qu'elles employent sans cesse pour résoudre les questions les plus embarrassées par les moyens les plus simples & les plus naturels, est ce qu'il y a de plus propre à donner à l'esprit la sagacité qui lui est de si grand usage dans toutes les occasions où il doit s'appliquer à des questions difficiles, & trouver de lui-même les moyens les plus propres à les résoudre. Enfin les Mathematiques dépendent d'un très petit nombre de principes généraux qu'on ne fait, pour ainsi dire, que développer dans toutes ces Sciences, & elles sont très propres à faire acquérir à l'esprit l'habitude de la connoissance des principes les plus seconds sur les matieres les plus d'usage dans la vie, & d'en juger solidement en suivant leur lumière.



AVERTISSEMENT.

LA Méthode d'apprendre les Mathématiques par le moyen du calcul littéral & numérique, est la plus aisée. En ôtant tout l'embarras & tout ce qu'il y avoit de rebutant dans cette étude, elle y substitue le plaisir de les apprendre comme si on en faisoit soi-même la découverte. Elle est la plus courte, & demande incomparablement moins de temps pour s'en rendre maître. Elle est plus lumineuse & plus féconde, en conduisant par tout à des résolutions générales, & faisant naître par chaque trait de plume des découvertes. Enfin elle est plus proportionnée à l'esprit borné de l'homme, en ménageant admirablement sa capacité, & augmentant son étendue à l'infini par le bel ordre qu'elle met dans le grand nombre d'objets qu'il doit regarder d'une simple vue, & dans tous les raisonnemens qu'il doit faire pour les comparer les uns avec les autres afin d'arriver à la vérité, & par l'art d'abréger ses idées, & de lui représenter une infinité d'objets sous l'expression la plus simple qui soit possible. Il n'en faut pas d'autre preuve que le prodigieux progrès qu'ont fait les Mathématiques depuis qu'on les a traitées par le calcul. Ceux qui veulent apprendre les Mathématiques à fond en peu de temps, d'une manière aisée & qui leur fasse plaisir, entendre les excellens Ouvrages sur ces Sciences faits de notre temps, ou elles sont traitées par le cal-

cul, & se mettre en état d'y faire eux-mêmes des découvertes, doivent commencer par apprendre le calcul, & se le rendre très familier. Mais il ne faut pas que le calcul leur conduise comme des aveugles, ou comme des artisans qui suivent des Regles dont ils ne savent pas les raisons, ou comme par un heureux hazard, aux veritez que contiennent les Mathematiques, qui ne seroient pas des veritez pour ceux qui ne verroient pas clairement leurs liaisons & leur enchaînement nécessaire avec les premiers principes connus de tout le monde; ils doivent apprendre en même temps les raisons sur lesquelles est fondé le calcul. Ils doivent voir clairement que les expressions litterales & numeriques, & toutes les operations du calcul sur ces expressions, sont des signes simples & faciles, déterminez par la science du calcul à marquer par ordre tous les raisonnemens clairs, distincts, solides, naturels & suivis, que fait l'esprit pour déduire des rapports connus des grandeurs, tous les autres rapports qu'on en peut déduire. Que ces calculs étant appliquez aux figures de la Geometrie, representent les rapports qui sont entre les lignes contenues dans ces figures, ceux qui sont entre les parties de ces figures comparées entr'elles ou avec les figures entieres dont elles sont les parties; ceux qui sont entre les figures mêmes comparées les unes aux autres: qu'ils representent de même les rapports que toutes les grandeurs particulieres peuvent avoir entr'elles, & qu'ils representent de plus les raisonnemens exacts que fait notre esprit dans les comparaisons de ces rapports pour aller des uns aux autres; qu'enfin dans la resolution de chaque question ils marquent distinctement tous les raisonnemens justes que fait l'esprit pour déduire ce que l'on veut connoître dans la question, de toutes les choses qui y sont connues.

La Science du calcul des grandeurs en general ; qu'on donne ici , est faite pour les Commensans , pour ceux qui n'ont encore aucune connoissance des Mathematiques , & qui veulent les apprendre à fond . On a tâché de l'expliquer avec une telle clarté , qu'ils pussent l'apprendre d'eux-mêmes sans le secours d'un Maître . On n'y a oublié aucun des calculs qui sont nécessaires pour entendre l'Analyse Démontrée & les nouvelles Methodes trouvées de notre temps , & qui sont expliquées dans l'Analyse Démontrée . On y a donné des démonstrations de tous les calculs : & comme la multiplication & la division des grandeurs litterales entieres doit convenir à toutes sortes de grandeurs , c'est à dire aux grandeurs rompues & aux grandeurs incommensurables , on a été obligé pour démontrer cette étendue , de donner dans la premiere Section , la notion des rapports & des proportions , & de démontrer les plus simples & les plus generales proportions d'où se déduisent toutes les autres . Les Commensans pourront les passer ces premieres proportions dans une premiere lecture , & sur tout les démonstrations particulieres pour les rapports incommensurables , le cas des incommensurables étant clairement contenu dans le cas des rapports commensurables par la notion de l'infini . On n'a mis ces démonstrations particulieres aux incommensurables , que pour ne laisser aucune proposition sans une démonstration dans la rigueur mathématique , à ceux mêmes qui auroient quelque peine dans ces premiers commencemens , d'admettre la notion de l'infini .

Les Commensans pourront même , (afin de n'être pas rebutés par la theorie , c'est à dire par les démonstrations , & par tous les principes établis pour les démonstrations) se contenter dans une premiere lecture , d'apprendre bien le

seul calcul des grandeurs entieres & rompues , & de se le rendre très familier , c'est à dire l'addition , la soustraction , la multiplication , la division , la formation des puissances , & l'extraction des racines des grandeurs numeriques & litterales entieres , & les mêmes opérations sur les grandeurs rompues avec les réductions qui leur sont particulieres.

Quand ils se seront rendus ces calculs familiers , ils liront l'ouvrage tout de suite , en joignant la theorie à la pratique ; ils apprendront tout ce qui regarde la comparaison des rapports simples & composez , & le calcul des grandeurs incommensurables .



AVERTISSEMENT

Sur la réduction des moindres especes aux plus grandes par rapport aux produits qui viennent de la multiplication des nombres de différentes especes les uns par les autres, expliquée dans l'article 87 page 62, qui doit être ajouté à la page 108 après la ligne 2°.

QUAND on a deux nombres, qui contiennent chacun différentes especes, à multiplier l'un par l'autre; & qu'on les réduit chacun à la moindre especes, & qu'ensuite on multiplie ces deux nombres, ainsi réduits à la moindre especes, l'un par l'autre, suivant la regle de l'art. 87. Voici la methode pour réduire le produit qui est venu de cette multiplication à la plus grande especes que l'on cherche. Il faut prendre, 1°, l'unité de la plus grande especes de l'un des deux nombres & la réduire à la moindre especes. (Dans l'exemple de l'art 87, il faut réduire 1 livre, qui est l'unité de la plus grande especes du premier nombre, en la plus petite especes qui est des deniers, & cette unité réduite sera le nombre 240) 2°. Il faut de même réduire l'unité de la plus grande especes du second nombre, en la plus petite especes. (Dans l'exemple il faut réduire 1 toise, qui est l'unité de la plus grande especes du second nombre, en pouces qui est la plus petite especes du second nombre, & cette unité réduite sera 72 pouces) 3°. Il faut multiplier les deux nombres, auxquels ces deux unités de la plus grande especes de chacun des deux nombres proposez sont réduites, l'un par l'autre. (Dans l'exemple il faut multiplier 240 par 72) Le produit qui viendra de cette multiplication (lequel dans l'exemple est 17280,) est le nombre par lequel il faut diviser le produit qu'on a trouvé par la regle de l'art. 87, (lequel produit dans l'exemple est 3707892.)

En faisant la division, le quotient qu'on trouvera exprimera le nombre de la plus grande especes que l'on cherche, c'est à dire, qu'on réduira par cette division le produit à la plus grande especes que l'on cherche. (Dans l'exemple on

trouvera le quotient entier 214 livres avec la fraction $\frac{2272}{2710}$. Cette fraction se réduira aux moindres especes prises de suite par la methode de l'art. 274.)

Comme cette methode de multiplier les nombres qui contiennent différentes especes expliquée dans l'art 87, est très embarrassante, il ne faut point du tout s'en servir, ni de la division des nombres qui contiennent différentes especes expliquée dans l'art. 137, dans laquelle pour réduire le quotient à la plus grande espece, il faut réduire l'unité du dividende à la plus petite espece, & réduire de même l'unité du diviseur à la plus petite espece, ensuite diviser l'unité du dividende réduite à la moindre espece par l'unité du diviseur aussi réduite à la moindre espece, ce qui donnera un quotient: Enfin, diviser le quotient que l'on aura trouvé par la methode de l'art 137, par le quotient qu'on vient de former; & faisant la division, le quotient qu'on trouvera exprimera la plus grande espece que l'on cherche, c'est à dire, qu'on réduira par cette division le quotient à la plus grande espece que l'on cherche.

Mais quand on aura deux nombres, qui contiennent chacun différentes especes, à multiplier, ou à diviser l'un par l'autre, il faudra réduire chacun de ces nombres en parties décimales par la methode de l'art. 276; multiplier ensuite ou diviser ces deux nombres réduits en parties décimales l'un par l'autre; & l'on aura, dans les produits ou dans les quotients, les nombres entiers que l'on cherchoit, & de plus des parties décimales, qu'on réduira par l'article 276 aux moindres especes prises de suite des nombres proposés.



LA SCIENCE DU CALCUL DES GRANDEURS EN GENERAL.

L I V R E I

Où l'on explique le calcul des grandeurs
entières.

SECTION I.

*Où l'on explique les noms des principales Propositions dont
on se sert dans les Mathématiques, les axiomes généraux
des ces sciences, les principes dont on déduira les premières
Règles du calcul, & enfin la division de ce Traité.*

*Explication des noms des principales Propositions des
Mathématiques.*

I.



DEFINITION est l'explication de ce que
signifie un mot ; ou bien c'est l'expression dont
on se sert pour attacher un nom à un objet
dont on a une idée claire & distincte, & pour
déterminer ce nom à signifier cet objet. Par
exemple cette proposition : Un nombre entier
est celui qui contient plusieurs fois exactement l'unité, est
une définition. Quoique les définitions des noms soient ar-

A

* LA SCIENCE DU CALCUL

bitraires, elles n'en sont pas moins incontestables; car on ne peut pas contester à celui qui l'a fait, qu'il n'attache à un tel nom l'objet auquel il détermine ce nom.

2.

Axiome est une proposition si évidente par elle-même, qu'elle n'a pas besoin de preuve, comme celle-ci. Une chose ne peut pas être & n'être pas en même temps; ou comme cette autre, le rien, ou ce qui ne participe point du tout à l'être, ne sauroit être aperçu. Car apercevoir rien, & ne point apercevoir, est évidemment la même chose. Il suffit, afin qu'une proposition soit un axiome, qu'en y apportant de l'attention on voye avec une entière évidence la vérité ou le rapport qu'elle exprime.

3.

Supposition ou *demande* est une proposition qui n'est pas tout à fait si évidente qu'un axiome, mais qui néanmoins est incontestable; ainsi on ne peut pas s'empêcher de l'accorder. Par exemple, on suppose que tous ceux qui apprennent l'addition & la soustraction des nombres, savent ajouter ensemble tout nombre moindre que dix, avec tout autre nombre aussi moindre que dix; & retrancher un nombre moindre que dix de tout autre nombre plus grand, & trouver le nombre qui reste & qui en fait la différence. On suppose de même dans la Geometrie, que deux points étant donnez sur un plan, on peut tirer avec une regle une ligne droite de l'un à l'autre. Comme aussi, qu'un point étant donné sur un plan, & une ligne droite qui part de ce point, on peut tracer avec le compas ouvert de la grandeur de cette ligne, une circonference qui ait ce point pour centre. On peut voir par là que ces sortes de suppositions ou de demandes sont incontestables, & n'ont pas besoin de preuve. On n'en fait pas d'une autre sorte dans les sciences generales des Mathematiques, qui ont pour objet la grandeur en general, où tout doit être démontré dans la dernière rigueur. Mais dans les sciences particulieres des Mathematiques, qui ont pour objet les grandeurs sensibles, on est quelquefois obligé de faire des suppositions qui ne sont pas si incontestables que celles des sciences generales: comme dans l'Astro-

nomie on est obligé, pour expliquer les mouvemens & les autres apparences des Astres, de supposer, ou que la Terre tourne autour du Soleil, ou que le Soleil tourne autour de la Terre; parcequ'on ne peut pas avoir de démonstration de l'une ni de l'autre de ces suppositions. On déduit ensuite des suppositions que l'on a faites par des conséquences évidentes tout ce que renferment ces sciences particulières; & les suppositions étant une fois admises, tout le reste, qui en est une suite évidente, est démontré.

On n'admet *Aus* preuve dans les Mathématiques que les trois sortes de propositions qu'on vient d'expliquer. Toute autre proposition doit être démontrée en la déduisant des axiomes, des définitions & des suppositions, ou bien la déduisant d'autres propositions qui ont déjà été démontrées, & qui par là sont devenues claires & incontestables. Voici l'explication des noms qu'on donne aux propositions qu'il faut démontrer.

Théorème est une proposition qu'il faut démontrer, & qui ne prescrit rien à faire, comme si l'on proposoit de démontrer cette proposition: Le nombre 9 tant ajouté à lui même tant de fois que l'on voudra, les chiffres qui exprimeront cette addition, feront toujours ensemble exactement neuf une ou plusieurs fois. Comme 2 fois 9 font 18: or 1 & 8 font exactement 9. De même 3 fois 9 font 27: or 2 & 7 font exactement 9. &c. cette proposition seroit un *théorème*.

Problème est une proposition qui prescrit quelque chose à faire, & il faut démontrer, quand on l'a résolu, qu'on a fait ce qui étoit prescrit: par exemple, voici un *Problème*. Plusieurs grands nombres étant donnez, les ajouter tous ensemble, c'est à dire trouver le nombre qui doit venir de l'addition de tous ces nombres donnez.

Corollaire est une proposition qui suit d'une autre. Ainsi quand on a démontré une proposition, & qu'on en déduit ensuite d'autres propositions, on les appelle des *Corollaires* de cette proposition.

Lemme est une proposition qu'il faut démontrer; mais qu'on ne met dans le lieu où elle est, que pour servir de preuves à d'autres propositions qui la supposent, & on ne la mettroit pas si l'on n'en avoit pas besoin pour démontrer ces autres propositions.

4 LA SCIENCE DU CALCUL

On ajoute quelquefois des *Remarques* après des propositions, les Anciens les nommoient des *Scholies* : ce sont ordinairement des éclaircissements.

Les Axiomes généraux des Mathématiques.

1.

1. **U**N tout est égal à toutes ses parties prises ensemble ; il est plus grand que l'une de ses parties ; & supposé qu'il n'ait que deux parties, un tout moins l'une de ses parties est égal à l'autre partie.

2.

2. Les grandeurs égales à une même grandeur, ou à des grandeurs égales, sont égales entr'elles.

3.

3. Les grandeurs doubles, triples, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, sont égales ; comme aussi les grandeurs qui sont la moitié, le tiers, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, sont égales ; & réciproquement les grandeurs sont égales, dont d'autres grandeurs égales sont le double, le triple, &c. ou la moitié, le tiers, &c.

4.

4. Si l'on ajoute des grandeurs égales à des grandeurs égales, ou si de grandeurs égales l'on retranche d'autres grandeurs égales plus petites, les grandeurs qui viendront de ces additions ou de ces retranchemens seront égales.

5.

5. Si l'on ôte d'une grandeur la même grandeur ou une grandeur égale, il ne reste rien.

6.

6. Si des grandeurs sont égales, toute autre grandeur plus grande ou moindre, que l'une de ces grandeurs est aussi plus grande ou moindre que chacune des autres. Et si une grandeur est plus grande ou moindre qu'une autre, toutes les grandeurs égales à la première, sont plus grandes ou moindres que la seconde.

7.

7. Si à des grandeurs égales l'on ajoute des grandeurs inégales, ou si de ces grandeurs égales l'on en retranche d'inégales, les grandeurs qui en naîtront seront inégales; & celles auxquelles on aura ajouté les plus grandes, comme aussi celles dont on aura ôté les moindres, seront les plus grandes.

8.

8. Si à des grandeurs inégales l'on ajoute des grandeurs égales, ou si de ces grandeurs inégales l'on en retranche d'égales, les grandeurs qui en viendront seront inégales; & celles qui étoient les plus grandes avant l'addition ou le retranchement, le seront encore après.

Voula les principaux axiomes des Mathématiques; quand on aura besoin des autres, ils se présenteront si clairement & si naturellement à l'esprit, qu'il est inutile de les mettre ici.

AVERTISSEMENT.

Les Chifres qu'on verra à la marge au commencement des principales propositions de ce Traité, ne sont marquez que pour les citer dans les endroits où ces propositions servent de preuves. Or pour les citer on met cette marque *; ainsi quand on trouvera dans la suite cette marque * dans le Traité, & à la marge vis à vis la même marque * avec un nombre; cela signifiera que la preuve que l'on cite est dans la proposition ou dans l'article à qui convient le nombre, qui est à la marge à côté de la marque *.

*Principes dont on déduira les démonstrations des premières
Regles du Calcul pour les grandeurs numériques.*

DÉFINITIONS.

1.

ON prend dans toutes les espèces de grandeurs une de leurs parties qu'on determine, à qui on attribue l'idée de l'unité: c'est à dire, on la considere par rapport aux grandeurs de même espece, comme l'unité par rapport aux nombres. Par exem-

A ij

ple, on prend dans les longueurs une longueur déterminée pour l'unité qu'on nomme un pied; dans les largeurs, une largeur d'un pied carré; dans les solides, un corps solide d'un pied cubique; dans les poids on prend une livre; dans les temps, une heure; dans les mouvemens, un degré de mouvement; dans les vitesses, un degré de vitesse, & ainsi des autres.

2.

9. On compare ensuite les grandeurs avec leur unité, & on leur attribue les idées des nombres. Quand une grandeur contient son unité exactement plusieurs fois, on la nomme *un nombre entier*; ainsi 4 pieds, 4 livres, 4 heures, &c. sont des nombres entiers.

La manière de marquer les nombres est arbitraire, on en voit de différentes parmi les différentes Nations, la plus commode, que l'on a reçue des Arabes, est de marquer les nombres par les *chifres*. La voici.

3.

10. 1 signifie *un*; 2, *deux*; 3, *trois*; 4, *quatre*; 5, *cinq*; 6, *six*, 7, *sept*; 8, *huit*; 9, *neuf*. Il n'y a que ces neuf caractères qu'on nomme *chifres*, pour marquer les nombres, & ils suffisent pour cela, comme on le verra dans la définition suivante; mais on remarquera que l'on se sert encore d'un dixième caractère 0, qu'on nomme *zéro*, & qui signifie *rien*; c'est à dire, que là où l'on marque 0, il n'y a aucun nombre, ni aucune unité, ni aucune grandeur.

4.

11. Pour marquer tous les nombres entiers, quelque grands qu'ils puissent être, avec les seuls dix caractères précédens, on écrit ces nombres dans une ligne droite en allant de droite à gauche, & l'on marque dans le premier rang à droite le chiffre qui exprime les unités de ces nombres au dessous de dix; dans le second rang, le chiffre qui exprime combien ces nombres contiennent de dizaines d'unités au dessous de dix; dans le troisième rang, le chiffre qui marque combien ils contiennent de dizaines de dizaines, qu'on nomme des centaines d'unités, au dessous de dix; dans le quatrième rang, le chiffre

qui marque combien ils contiennent de dizaines de centaines qu'on nomme des mille, & ainsi de suite en allant de droite à gauche, comme on le voit dans cet exemple; & l'on doit remarquer que quand il n'y a point de chiffre à mettre dans un rang, & qu'il y en a cependant dans les rangs suivans vers la gauche, on marque o dans ce rang là, tant pour exprimer qu'il n'y a point de nombre convenable à ce rang, que pour distinguer l'ordre des rangs des chiffres qui sont vers la gauche.

300 ^e rang.	Centaines de 3-milliers.	300
290 ^e rang.	Dizaines de 3-milliers.	29
280 ^e rang.	3-milliers.	8
270 ^e rang.	Centaines de millions de 2-milliers.	7
260 ^e rang.	Dizaines de millions de 2-milliers.	6
250 ^e rang.	Millions de 2-milliers.	5
240 ^e rang.	Centaines de mille de 2-milliers.	4
230 ^e rang.	Dizaines de mille de 2-milliers.	3
220 ^e rang.	Mille de 2-milliers.	2
210 ^e rang.	Centaines de 2-milliers.	1
200 ^e rang.	Dizaines de 2-milliers.	0
190 ^e rang.	2-milliers.	0
180 ^e rang.	Centaines de millions de millions.	8
170 ^e rang.	Dizaines de millions de millions.	7
160 ^e rang.	Millions de millions.	6
150 ^e rang.	Centaines de millions.	5
140 ^e rang.	Dizaines de millions.	4
130 ^e rang.	Millions de millions.	3
120 ^e rang.	Centaines de mille de millions.	2
110 ^e rang.	Dizaines de mille de millions.	1
100 ^e rang.	Mille de millions.	0
90 ^e rang.	Centaines de millions.	9
80 ^e rang.	Dizaines de millions.	8
70 ^e rang.	Millions.	7
60 ^e rang.	Centaines de mille.	6
50 ^e rang.	Dizaines de mille.	5
40 ^e rang.	Mille.	4
30 ^e rang.	Centaines.	3
20 ^e rang.	Dizaines.	2
10 ^e rang.	Unité.	1

Pour exprimer facilement un grand nombre, il n'y a qu'à le partager par des points de trois en trois rangs, en allant de droite à gauche, & ensuite par des virgules de neuf en neuf rangs aussi de droite à gauche; & remarquer, 1^o, qu'en chaque ternaire le premier rang à droite ne contient que des unités, qui retiennent le nom d'unités dans le premier ternaire; mais que ces unités se nomment mille dans le second ternaire, & millions dans le troisième. Que dans le second rang de chaque ternaire ce sont des dizaines, & dans le troisième rang des centaines. 2^o, que dans le second novenaire (pour ainsi parler) les unités se nomment milliers; dans le troisième, bi-milliers, qu'on a ainsi marquées 2-milliers; dans le quatrième, tri-milliers, qu'on a ainsi exprimées 3-milliers, &c. Ainsi quelque nombre de rangs que puisse occuper un grand nombre, pourvu qu'on sache son dernier rang à gauche, qui est, par exemple, le trentième, on voit tout d'un

Corollaires de la quatrième & cinquième Définition.

COROLLAIRE I.

13. **D**IX unités d'un rang ne valent qu'une unité dans le rang qui est immédiatement plus à gauche. Dix centaines, par exemple, ne valent qu'un mille.

COROLLAIRE II.

14. **U**NE unité d'un rang vaut dix dans le rang qui est immédiatement plus à droite. par exemple, un mille vaut dix centaines.

Ces deux premiers Corollaires conviennent aux nombres entiers, & aux nombres qui contiennent des parties décimales.

COROLLAIRE III, pour les nombres entiers.

15. **S**i l'on recule d'un rang un nombre qui n'a que des entiers, on le fait valoir dix fois plus qu'il ne valoit; si on le recule de deux rangs, cent fois plus; si on le recule de trois rangs, mille fois plus, & ainsi de suite: par exemple, mettant deux zeros devant 53, on aura 5300, qui vaut cent fois plus que 53.

COROLLAIRE IV, pour les nombres entiers.

16. **S**i l'on ôte un rang à droite d'un nombre entier, on le fait valoir dix fois moins qu'il ne valoit; si l'on en ôte deux rangs, cent fois moins, & ainsi de suite. Ainsi ôtant deux rangs de 5300, on aura 53, qui vaut cent fois moins que 5300.

COROLLAIRE V.

Pour les nombres qui contiennent des parties décimales.

17. **P**OUR réduire un nombre entier en dixièmes, sans en changer la valeur, il n'y a qu'à ajouter un zero, en mettant un point entre le nombre & le zero que l'on ajoute. Pour le réduire en centièmes, il faut lui ajouter deux zeros, en millièmes, trois zeros, & ainsi de suite. De même, pour réduire un nombre qui exprime des parties décimales de l'unité, c'est à dire des dixièmes, centièmes, millièmes, &c. en parties décimales plus petites, il n'y a qu'à ajouter à ce nombre, qui

exprime des parties décimales, autant de zeros qu'il en faut pour lui donner le rang qui lui convient par rapport aux parties décimales plus petites auxquelles on le veut réduire. Ainsi pour réduire 0, 13^m, c'est à dire treize centièmes en millionièmes, il faut écrire 0, 130000^m.

- * 11. Ce Corollaire est une suite de la cinquième définition *. Car il est évident que chaque unité d'un nombre entier contient dix dixièmes, qu'elle contient aussi cent centièmes, &c. de même mille millièmes, &c. ainsi de suite. Par conséquent en faisant valoir chaque unité d'un nombre dix dixièmes, ou cent centièmes, ou mille millièmes, &c. on n'en change point la valeur. Or en mettant un zero, deux zeros, trois zeros, &c. devant un nombre, au devant du point qui distingue les parties décimales, on fait valoir, par la cinquième définition, * chacune des unités de ce nombre, c'est à dire ce nombre là même, des dixièmes, des centièmes, &c. On doit seulement remarquer qu'il faut être exact à marquer le point ou la virgule qui sépare les unités entières des parties décimales; & quand il n'y a que des parties décimales sans aucun nombre entier, qu'on doit mettre au devant vers la gauche, le nombre de zeros qu'il faut pour occuper les rangs jusqu'au nombre entier, &c. écrire un point ou une virgule au devant de ces zeros vers la gauche, & un zero au de-là du point ou de la virgule vers la gauche, pour faire connoître le rang où commenceroit le nombre entier, comme dans ces exemples : 0. 130000^m. 0. 000324^m. Le premier contient cent trente mille millièmes, &c. le second contient trois cents vingt quatre millièmes. Ainsi on remarquera qu'en ajoutant un zero, deux zeros, trois zeros, &c. au devant d'un nombre entier, sans mettre de point entre ce nombre & les zeros ajoutez, on fait valoir ce nombre dix fois plus, cent fois plus, mille fois plus, &c. qu'il ne valoit auparavant. Mais en mettant un point au devant de ce nombre, & écrivant au devant du point vers la droite un zero, deux zeros, trois zeros, &c. on ne change point la valeur de ce nombre; mais on le réduit par là à valoir des dixièmes, des centièmes, des millièmes, &c. de l'unité; c'est à dire, on exprime par là combien ce nombre vaut de dixièmes, de centièmes, de millièmes, &c. de l'unité; ou bien encore, on partage par là toutes les unités de ce nombre en dixièmes, centièmes, &c. car chaque unité contient dix

COROLLAIRE VI.

Pour les nombres qui contiennent des parties décimales.

18. SI dans un nombre décimal quelconque, par exemple, 132.456378^{re}, on avance le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers d'un rang vers la droite, le nombre 1324.56378^{re} vaudra précisément dix fois plus que le précédent, car chacun des chiffres vaudra par-là * dix fois plus * 25. qu'il ne valoit. Si l'on avance le point de deux rangs, le nombre 13245.6378^{re} vaudra précisément cent fois plus qu'il ne valoit, car chacun des chiffres vaudra par-là cent fois plus qu'il ne valoit. Si l'on avance le point de trois rangs, le nombre 132456.378^{re} vaudra mille fois plus qu'il ne valoit, & ainsi de suite.

Si au contraire on recule le point qui distingue les entiers d'avec les parties décimales vers la gauche d'un rang, de deux rangs, de trois rangs, &c. le nombre proposé vaudra par ces changemens dix fois moins, cent fois moins, mille fois moins, &c. qu'il ne valoit. * 16.

6^e DÉFINITION.

19. UN nombre qui ne contient pas l'unité exactement; mais qui contient un certain nombre de parties égales, dans lesquelles on conçoit que l'unité est divisée, s'appelle un *nombre rompu*, il s'appelle encore *une fraction*; ainsi un nombre qui contient deux tiers de l'unité, est un nombre rompu.

On marque chaque nombre rompu par deux nombres entiers de cette manière $\frac{2}{3}$. On tire une ligne, &c. l'on met au dessous le nombre qui exprime en combien de parties égales l'unité est divisée, & on appelle ce nombre le *dénominateur*, on écrit sur la ligne le nombre qui marque combien le nombre rompu contient de ces parties, & on nomme ce nombre le *numérateur*. Ainsi $\frac{2}{3}$ est une fraction, le dénominateur 3 marque que l'unité est partagée en trois parties égales qu'on nomme tiers, c'est à dire en trois tiers; & le numérateur 2 fait voir que la fraction $\frac{2}{3}$ contient deux de ces parties, c'est à dire deux tiers, ou deux fois $\frac{1}{3}$.

COROLLAIRE.

20. IL est évident que tous les nombres, soit entiers, soit rompus, ont entr'eux une mesure commune, qui est l'unité, ou quelqu'une des parties égales, dans lesquelles on peut concevoir que l'unité est divisée, par laquelle ils sont exactement mesurez.

7^e DÉFINITION.

21. ON démontrera dans la suite qu'il y a des grandeurs, qu'on peut représenter par des lignes droites, qui sont telles qu'en prenant l'une de ces grandeurs pour l'unité, en quelque nombre de parties égales qu'on puisse la concevoir divisée, jamais les autres n'auront pour mesure commune exacte aucune de ces parties égales. On nomme ces grandeurs *incommensurables*, ce qui signifie qu'elles ne peuvent avoir aucune mesure commune. Les grandeurs incommensurables ont des expressions particulières que l'on expliquera dans la suite.

Principes pour les grandeurs littérales, qu'on nomme aussi algébriques.

8^e DÉFINITION OU SUPPOSITION.

22. ON peut exprimer une grandeur quelconque par une lettre de l'alphabet : par exemple, on peut représenter une ligne droite donnée quelconque par la lettre *a* ; on peut exprimer une autre ligne droite différente par *b*. On peut de même exprimer un nombre quelconque donné par une lettre *a*, & un autre nombre par *b*. Il en est de même de toute autre grandeur.

Dans les Problèmes on représente les grandeurs connues par les premières lettres de l'alphabet *a, b, c, d, &c.* & les grandeurs inconnues que l'on cherche, par les dernières *x, y, z, &c.*

On nomme les grandeurs ainsi exprimées, *littérales*, & encore *algébriques*.

AVERTISSEMENT.

LES Commenceans ont d'ordinaire de la peine à se fixer dans l'esprit les grandeurs que l'on représente par les lettres ;

parcequ'en effet ces expressions littérales ne marquent pas des grandeurs particulières, mais des grandeurs considérées en general; & cela est cause que quand on leur apprend le calcul de ces lettres, ils s'imaginent ne le pas apprendre; & quoiqu'il soit le plus facile & le plus simple de tous les calculs qu'on peut imaginer, & qu'ils le conçoivent d'abord, ils s'imaginent ne le pas concevoir; parcequ'ils n'attachent pas les idées particulières des grandeurs particulières aux expressions littérales, & qu'à cause de cela ils n'en voyent pas l'utilité. Mais ils ne doivent pas se rebuter, ils verront dans la suite que la science de ce calcul littéral, & de la manière de s'en servir, est la clef pour s'ouvrir l'entrée à toutes les découvertes; qu'on a le plaisir d'apprendre par ce moyen toutes les Mathématiques, comme si on les inventoit soi-même; que les Mathématiques sont devenues si faciles, par l'invention de ce calcul & de la manière de l'employer, que chaque trait de plume donne naissance à des découvertes; qu'on a fait des progrès surprenans dans les Mathématiques depuis l'invention de ce calcul, & depuis qu'on l'applique à résoudre les Problèmes de ces sciences, qu'il fait trouver des résolutions simples & générales de tous les cas des Problèmes qu'on veut résoudre, & qu'il fait souvent découvrir avec une très grande facilité, sous une expression qui n'occupe pas une ligne, qui même quelquefois ne contient que quatre ou cinq lettres, la résolution d'une infinité de Problèmes. Ce calcul a l'avantage d'augmenter, pour ainsi dire, l'étendue de notre esprit, en lui représentant, sous des expressions simples & abrégées, les objets les plus composés, & l'infini même. & outre cela il ne fatigue point l'imagination.

Pour ôter aux Comménçans autant qu'il est possible la peine qu'ils pourroient trouver dans les calculs des expressions littérales, qui ne leur peut venir que de ce qu'ils n'attacheroient à ces expressions que les idées générales des grandeurs en general, il est bon de les avertir ici qu'ils peuvent attacher à chaque lettre une ligne droite qu'ils déterminont de la longueur qu'ils voudront, & supposer qu'une lettre représente une ligne droite, une autre lettre représente une autre ligne droite, & s'ils le trouvent plus commode, ils pourront supposer que l'une de ces lettres représente une ligne droite, qui contient un certain nombre de parties éga-

les comme un certain nombre de pouces, qu'une autre lettre représente une autre ligne droite qui a un autre nombre des mêmes parties égales ; cela n'empêchera pas que les lettres ne leur représentent les grandeurs en general : car il est évident qu'il n'y a pas de grandeurs qu'on ne puisse représenter par des lignes droites.

9° DÉFINITION.

23. ON distingue les grandeurs en *positives* & *negatives*. Dans le commerce, par exemple, le bien qu'à un Marchand est une grandeur positive; les dettes qu'il a, sont des grandeurs négatives. Dans les lignes & dans toutes les grandeurs qu'on peut représenter par les lignes, pour distinguer la manière de prendre une ligne comme CAB , en allant de bas en haut, de la manière de prendre la même ligne BAC dans le sens contraire, en revenant de haut en bas, on nomme la ligne prise dans l'un de ces sens *positive*, & *negative* prise en l'autre sens. Ainsi si l'on suppose que CAB prise en allant de C en B est *positive*, elle sera *negative* prise en sens contraire en descendant de B en C . De même si l'on prend FDE pour *positive*, en allant de gauche à droite, elle sera *negative*, en revenant de droite à gauche de E vers F .



COROLLAIRE I.

24. D'où l'on voit que ces deux sortes de grandeurs positives & négatives, sont les unes aux autres des retranchemens mutuels : par exemple, la grandeur positive CAB , allant de C à B , étant posée, si l'on met dessus la négative plus petite BA , en retournant de B vers C , elle retranchera BA de la quantité positive BAC , & il ne restera plus de la positive que CA ; & si l'on ajoute encore la négative AC , qui jointe à BA est égale à la positive CB , elle retranchera entièrement la positive CA , & il restera zero. Si l'on met une grandeur négative BG plus grande que CB , sur la positive CB , alors il restera la négative CG . De même si un Marchand a 100000 livres de bien, & qu'il ait des dettes, si les dettes sont moindres que le bien, il lui reste le surplus du

bien sur les dettes; si elles sont égales au bien, il ne lui reste rien; & si elles surpassent son bien, non seulement il n'a rien, mais il s'en manque le surplus des dettes sur le bien qu'il n'aît quelque chose.

COROLLAIRE II.

15. IL est évident que zero ou le rien est le terme entre les grandeurs positives & les négatives qui les separe les unes des autres. Les positives sont des grandeurs ajoutées à zero; les négatives sont pour ainsi dire au dessous de zero ou de rien; ou, pour mieux dire, zero ou le rien est entre les grandeurs positives & négatives, & c'est comme le terme entre les grandeurs positives & négatives, où commencent les unes & les autres. Par exemple dans les lignes le point C au dessus duquel sont les positives CA, CB, & au dessous duquel sont les négatives CG, est le terme qui les separe, auquel elles commencent, & d'où elles partent vers des parties opposées. On nomme ce terme *l'origine* des grandeurs positives & négatives; & à ce terme il n'y a ni grandeurs positives ni négatives, ainsi il y a zero ou rien. De même F est l'origine des grandeurs positives FD, FE qui vont à droite, & des négatives comme FH qui vont à gauche, & au point F il n'y a ni grandeurs positives ni négatives, ainsi il y a zero. On remarquera que c'est une chose arbitraire que de prendre les positives dans lequel on voudra des sens opposez des grandeurs positives & négatives, & les négatives dans l'autre sens; mais quand dans un Problème on les a déterminées dans l'un de ces deux sens, il faut les conserver dans tout le Problème.

COROLLAIRE III.

16. LES grandeurs positives, ajoutées les unes aux autres, ne font qu'une grandeur positive plus grande qui les contient toutes; & de même les négatives, ajoutées ensemble, font une grandeur négative qui les contient toutes; & ce n'est qu'en ajoutant ensemble des positives & des négatives qu'elles se diminuent ou se font des retranchemens mutuels.

COROLLAIRE IV.

17. IL suit de tout ce que l'on vient de dire des grandeurs positives & négatives, que pour ôter une grandeur positive, il

n'y a qu'à y mettre la même grandeur négative : & que pour ôter de même une grandeur négative, il n'y a qu'à mettre la même grandeur positive. Une personne qui n'a rien aura 10000 livres si on lui donne ces 10000 livres; mais il se retranchera 10000 livres, s'il n'a rien, lorsqu'il fera une dette de 10000 livres.

10^e DÉFINITION, où l'on explique les signes $+$ & $-$:

28. **O**N marque le signe $+$, qui signifie *plus*, devant les grandeurs positives; le signe $-$, qui signifie *moins*, devant les négatives. L'on met toujours le signe $-$ devant les négatives, mais quand il y a plusieurs grandeurs jointes ensemble par les signes $+$ & $-$, & que la première est positive, on sous-entend le signe $+$ devant cette première sans le mettre, comme aussi quand une grandeur positive est seule. (Quand on parle des signes dans le calcul des grandeurs, on entend toujours les signes $+$ & $-$). Par exemple $4 + 3 - 2$ fait 5. De même $a + b - c$ exprime la grandeur qui résulte, en joignant ensemble les deux grandeurs positives représentées par $a + b$, avec la grandeur négative représentée par $-c$.

11^e DÉFINITION.

29. **L**E signe $+$ marque aussi l'*addition*, & le signe $-$ la *soustraction* ou le retranchement : c'est à dire, pour marquer qu'il faut ajouter ensemble plusieurs grandeurs; on les écrit les unes devant les autres, en mettant audevant de chacune le signe $+$. Par exemple $3 + 4 + 5$ signifie que les grandeurs 3, 4, 5 sont ajoutées ensemble, ce qui fait 12. Pour retrancher une grandeur d'une autre grandeur, on écrit la grandeur dont on doit faire la soustraction la première avec son signe, on écrit ensuite la grandeur qu'il faut retrancher en marquant au devant le signe $-$, par exemple $5 - 4$ signifie que le nombre 4 est retranché de 5, ce qui fait 1. Cela ne cause point d'équivoque par rapport aux grandeurs positives marquées par $+$, & aux grandeurs négatives marquées par $-$; car plusieurs grandeurs positives jointes ensemble, précédées chacune du signe $+$, sont ajoutées ensemble; & quand il y a des grandeurs négatives, précédées chacune

du signe $-$, jointes aux positives, elles en sont retranchées. *

30. La seule chose à remarquer en cela sur les grandeurs négatives,

gatives, est que si l'on mettoit deux signes devant une grandeur négative, comme $+-3$, & $---3$, le premier signe $+$ dans $+-3$ marquerait l'addition de la grandeur négative -3 , ce qui signifieroit simplement -3 ; car pour ajouter une grandeur négative, il faut simplement l'écrire avec son signe $-$: le premier signe $-$ dans $---3$ marquerait la soustraction de la grandeur négative -3 , ce qui signifieroit $+3$; car pour retrancher une grandeur négative, il faut $*$ l'écrire avec le signe $+$.

31. D'où l'on voit que le signe $-$ devant une grandeur, ne marque qu'une opposition. Si cette grandeur devant laquelle est le signe $-$ est positive ou négative, le signe $-$ marque qu'il faut prendre la grandeur opposée. Ainsi $-+-a = -a$, & $---a = +a$.

12^e DÉFINITION.

32. CETTE marque $=$ signifie que les grandeurs qui sont des deux côtés de cette marque sont égales, & on l'appelle la marque ou le signe de l'égalité. Ainsi $3+4=9-2$ signifie que les grandeurs 3 & 4 ajoutées ensemble sont égales à 9 dont on a retranché 2, $a+b=c+d$ signifie que les deux grandeurs a & b jointes ensemble sont égales aux deux grandeurs c & d aussi jointes ensemble. Les grandeurs qui sont de chaque côté du signe $=$, s'appellent les membres de l'égalité, $a+b$ est le premier membre; $c+d$ est le second membre.
33. Cette autre marque $>$ ou $<$, qu'on peut nommer la marque d'inégalité, signifie que les grandeurs qui sont des deux côtés de cette marque sont inégales, & que la plus grande est du côté de l'ouverture, & la plus petite du côté de la pointe. Ainsi $a>b$ signifie que a est plus grande que b , & $b<a$ signifie que b est moindre que a .

13^e DÉFINITION.

34. LA comparaison que l'on fait de deux grandeurs de même espèce, comme de deux lignes, de deux temps, de deux mouvemens, &c. se nomme un rapport, & encore une raison. On en distingue de deux sortes.

Lorsqu'on compare une grandeur avec une autre de même espèce, en considérant l'excès de la plus grande sur la moindre, c'est à dire, la différence qu'il y a de la plus grande à la

moindre, cela s'appelle *un rapport arithmétique*, ou *une raison arithmétique*. Ainsi la comparaison de 5 à 3, en considérant que 2 est leur différence ou l'excès de 5 sur 3, est un rapport arithmétique.

35. La comparaison que l'on fait de deux grandeurs de même espèce, en considérant combien la première contient de fois la seconde, ou combien elle est contenue de fois dans la seconde, si elle est la plus petite, s'appelle *un rapport géométrique*, ou *une raison géométrique*.

Quand l'une des grandeurs ne contient pas exactement l'autre, ou n'y est pas contenue exactement, alors on conçoit l'une des deux partagée en un nombre déterminé, tel qu'on voudra, de parties égales entr'elles, & la comparaison qu'on fait de deux grandeurs, en considérant combien l'une contient de fois une des parties égales contenue dans l'autre un certain nombre de fois, est ce qu'on nomme *un rapport géométrique*, ou *une raison géométrique*. Quand on parle de *rapports* ou de *raisons*, sans ajouter le mot de géométrique ou d'arithmétique, on entend toujours les rapports géométriques. Par exemple si l'on compare une ligne de six pieds, qu'on supposera représentée par a , avec une ligne de deux pieds qu'on supposera représentée par b , en considérant qu'elle la contient trois fois, ce sera un rapport géométrique, ou, simplement un rapport. Si l'on compare aussi une ligne a de six pieds avec une ligne d de cinq pieds, en considérant que a contient six fois la partie un pied qui est cinq fois dans b ; ce sera encore un rapport.

On marque un rapport géométrique comme une fraction en tirant une ligne, & écrivant sur cette ligne le premier terme du rapport, & le second terme sous la ligne. Ainsi $\frac{6}{2}$ marque le rapport de 6 à 2. De même $\frac{a}{b}$ marque le rapport de la grandeur représentée par a à la grandeur représentée par b , & on nomme *antécédent* le premier terme a , & *conséquent* le second terme b . On nomme aussi, comme dans les fractions, le premier terme a le *numérateur*, & le second b le *dénominateur*; & l'on regarde un rapport $\frac{a}{b}$ comme une fraction littérale.

36. Quand il arrive qu'en concevant l'un des termes d'un rapport partagé en tel nombre fini & déterminé qu'on voudra de parties égales, l'autre terme ne contient jamais exacte-

ment un nombre précis de fois une de ces parties égales, mais qu'il la contient un certain nombre de fois avec un reste; on dit que ces deux grandeurs ont un rapport géométrique *incommensurable*.

14^e DÉFINITION.

37. QUAND on a un rapport $\frac{1}{2}$, le rapport $\frac{2}{1}$ s'appelle le rapport *inverse* du premier, lequel premier est appelé *direct*, en égard au second.

15^e DÉFINITION.

38. QUAND l'antécédent & le conséquent d'un rapport sont égaux, on le nomme un rapport *d'égalité*, quand ils sont inégaux, on le nomme un rapport *d'inégalité*.

AXIOME.

39. DANS les rapports d'inégalité plus l'antécédent est grand par rapport au conséquent, & plus le rapport est grand; & plus l'antécédent est petit par rapport au conséquent, & plus le rapport est petit. Ainsi une ligne de 100 toises a un plus grand rapport à une ligne de 20 toises qu'à une ligne de 50 toises; & une ligne de 20 toises a un moindre rapport à une ligne de 100 toises qu'à une ligne de 50 toises.

COROLLAIRE I.

40. D'où il suit que le rapport d'une grandeur à zéro est infiniment grand, puisqu'une grandeur réelle est infiniment grande par rapport à rien; & que le rapport de zéro à une grandeur est infiniment petit, par une raison contraire.

REMARQUE.

ON peut remarquer sur ce premier Corollaire qu'on ne peut pas faire la comparaison ou le rapport d'une grandeur à une chose qui n'est pas de même nature; par exemple, on ne peut pas comparer une ligne avec un corps solide. Ainsi à parler exactement on ne peut pas comparer une grandeur avec le néant qui ne participe point à l'être, bien loin d'être de la même nature ou de la même espèce d'être, qu'est la grandeur qu'on lui compare. Mais toute grandeur étant conçue divisible à l'infini, on peut concevoir une partie de cette grandeur.

qui soit si petite qu'elle ne diffère, pour ainsi dire, presque pas du neant, & qui soit telle que cette grandeur comparée à cette partie soit infiniment grande par rapport à elle, & que cette partie comparée à cette grandeur soit infiniment petite; c'est cette partie infiniment petite qu'on nomme *zero*, & qu'on regarde comme *zero* dans ce premier Corollaire.

COROLLAIRE II.

41. **S**I une même grandeur, qu'on nommera *A*, étant comparée à deux autres qu'on nommera *B* & *C*, a un plus grand rapport à la première *B* qu'à la seconde *C*, il est évident que *B* est plus petite que *C*. Si *B* & *C* étant comparées à *A*, le rapport de *B* à *A* est plus petit que celui de *C* à *A*, il est clair que *B* est moindre que *C*. Enfin si *B* est moindre que *C*, le rapport de *B* à *A* est moindre que le rapport de *C* à *A*.

COROLLAIRE III.

42. **S**I $\frac{A}{B}$ exprime un rapport d'inégalité, on peut le rendre plus petit qu'il n'est de deux façons, 1°. en diminuant l'antécédent *A* d'une grandeur *C*, sans diminuer le conséquent *B*. 2°. en augmentant le conséquent *B* d'une grandeur *C*, sans augmenter l'antécédent. Ainsi $\frac{A-C}{B}$ & $\frac{A}{B+C}$ sont de moindres rapports que $\frac{A}{B}$. D'où l'on voit qu'il faut faire le contraire pour rendre le rapport $\frac{A}{B}$ plus grand qu'il n'est.

REMARQUE.

ON doit remarquer qu'un rapport pouvant être augmenté & diminué, & pouvant être égal ou inégal à un autre rapport, est une grandeur; & que par conséquent les rapports égaux peuvent être regardez comme des grandeurs égales, & les rapports inégaux comme des grandeurs inégales. Par exemple les rapports de 1 à 2, de 2 à 4, sont des grandeurs égales; les rapports de 1 à 2, de 1 à 3, sont des grandeurs inégales.

Pour concevoir cela clairement, il faut remarquer qu'un rapport peut être regardé de deux façons, comme un rapport & comme une grandeur, ce qu'on entendra mieux par des exemples; une ligne d'un pied comparée à une ligne de deux pieds, en est la moitié; une ligne d'un pied comparée à une

ligne de trois pieds, en est le tiers. Quand on ne considère que cette comparaison de l'antécédent au conséquent, on ne regarde que le rapport de l'un à l'autre. Le rapport lui-même peut aussi être regardé comme une grandeur, voici comment. Quand on compare le rapport lui-même à l'unité, par exemple quand on compare le rapport $\frac{1}{2}$ une moitié, ou $\frac{1}{3}$ un tiers avec l'unité; une moitié contient une des parties dont l'unité en contient deux; un tiers contient une des parties dont l'unité en contient trois. Il est évident qu'en regardant ainsi un rapport, c'est une grandeur, &c que $\frac{1}{2}$ &c $\frac{1}{3}$ sont deux grandeurs égales; que $\frac{1}{2}$ &c $\frac{1}{3}$ sont deux grandeurs inégales.

A X I O M E.

43. Si un rapport $\frac{a}{b}$ est plus grand qu'un autre rapport $\frac{c}{d}$, il est plus grand que tout autre rapport égal à $\frac{c}{d}$, ou moindre que $\frac{c}{d}$.

16^e D É F I N I T I O N.

44. QUAND on compare les rapports des grandeurs entr'eux, la comparaison de deux rapports égaux, ou l'égalité de deux rapports s'appelle une *proportion arithmétique*, quand les rapports égaux sont arithmétiques; elle se nomme une *proportion géométrique*, ou simplement une *proportion*, quand les rapports égaux sont géométriques. Ainsi la différence de 4 à 6 qui est deux, étant égale à la différence de 8 à 10, les quatre nombres 4, 6, 8, 10 sont une proportion arithmétique. Le rapport géométrique de 8 à 4 étant égal au rapport géométrique de 2 à 1, les quatre nombres 8, 4, 2, 1 sont une proportion géométrique, ou simplement une proportion.

On marquera une proportion arithmétique de cette manière 4 . 6 : 8 . 10, ce qui signifiera que la différence de 4 &c de 6 est égale à la différence de 8 &c de 10.

On marquera une proportion géométrique de l'une ou l'autre de ces manières, $\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$; 8 . 4 :: 2 . 1 On l'énonce de toutes ces façons : les quatre grandeurs 8, 4, 2, 1 sont proportionnelles, ou sont en proportion, ou sont une proportion : le rapport de 8 à 4 est égal au rapport de 2 à 1; ou la raison de 8 à 4 est égale à la raison de 2 à 1; le premier terme 8 est au second 4, comme le troisième 2 est au quatrième 1; 8 &c 4 sont entr'eux comme 2 &c 1.

Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent *les extrêmes*; le second & le troisième, *les moyens*. Le premier & le troisième se nomment aussi *les antécédents*; le second & le quatrième *les conséquents*.

17^e DÉFINITION.

45. **U**NE partie d'une grandeur qui est contenue dans cette grandeur plusieurs fois exactement, s'appelle une *partie aliquote* de cette grandeur; & cette grandeur s'appelle *multiple* de son aliquote, & l'on nomme aussi l'aliquote *sous-multiple* de cette grandeur. Ainsi l'unité est une aliquote de tous les nombres entiers. Un pied est une aliquote de trois pieds, de quatre pieds, &c. trois pieds est multiple d'un pied, & un pied est sous-multiple de trois pieds. De même une ligne de cinq pieds est une aliquote d'une ligne de quinze pieds.

Une grandeur étant conçue partagée dans un nombre quelconque de parties égales, si une autre grandeur est conçue partagée dans le même nombre de parties égales entr'elles, quoiqu'elles soient inégales aux parties égales de la première, on nomme ces parties égales de la première & de la seconde, *parties paires* ou *semblables*, ou *aliquotes paires* ou *semblables* de ces deux grandeurs, & ces grandeurs sont nommées *équimultiples* de ces parties. Ainsi un pied & une toise sont les parties paires ou aliquotes paires, la première de trois pieds, la seconde de trois toises. Une ligne de trois pieds & une ligne de trois toises sont équimultiples, la première d'un pied, la seconde d'une toise. De même trois pieds & trois toises sont les parties semblables de 15 pieds & de 15 toises.

Axiomes sur les aliquotes.

46. **T**OUTE grandeur peut être conçue partagée en tel nombre de parties égales qu'on voudra.

L'aliquote d'une grandeur est aussi l'aliquote de toutes les grandeurs multiples de cette grandeur. Ainsi un pied qui est aliquote de 3 pieds, est aussi aliquote de deux fois 3 pieds, de trois fois 3 pieds, &c.

18^e DÉFINITION, où l'on donne une notion distincte de ce qui fait une proportion géométrique, il faut se la rendre très familière.

47. QUATRE grandeurs, qu'on peut représenter par quatre lignes droites, dont la première sera nommée *a*, la seconde *b*, la troisième *c*, & la quatrième *d*, sont en proportion : lorsque les antécédents, c'est à dire la première *a* & la troisième *c*, étant conçues partagées dans le même nombre d'aliquotes semblables, ou de parties égales semblables, chaque conséquent contient le même nombre de parties égales de son antécédent, c'est à dire la seconde *b* contient autant d'aliquotes de la première *a*, que la quatrième *d* contient d'aliquotes semblables de la troisième *c*.

Ainsi une ligne *a* de 5 toises est à une ligne *b* de 3 toises, comme une ligne *c* de 5 pieds est à une ligne *d* de 3 pieds.

De même une ligne *a* de 5 toises est à une ligne *b* de 3 toises, comme une ligne *c* de 20. toises ou de 5 fois 4 toises est à une ligne *d* de 12 toises ou de 3 fois 4 toises.

COROLLAIRE.

48. IL est évident que ce seroit la même notion, si l'on disoit que quatre grandeurs représentées par *a*, *b*, *c*, *d* sont en proportion, lorsque les conséquents, c'est à dire, la seconde *b* & la quatrième *d* étant conçues partagées dans le même nombre d'aliquotes semblables, chaque antécédent contient le même nombre de parties égales de son conséquent : c'est à dire, que la première *a* contient autant d'aliquotes de son conséquent *b*, que la troisième *c* contient d'aliquotes semblables de son conséquent *d*.

49. On exprimera ici une proportion de ces deux manières générales, 1^o, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, les quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d* pouvant représenter quatre grandeurs quelconques à qui convient la notion générale de proportion qu'on vient de donner. 2^o Par le moyen des aliquotes. Pour cela on supposera que *x* représente la partie égale ou l'aliquote qui est exactement contenue plusieurs fois dans chacun des termes *a* & *b* du premier rapport $\frac{a}{b}$; que *n* représente le nombre de fois que l'aliquote *x* est dans l'antécédent *a*, & *m* le nombre de fois que la même aliquote *x* est dans le conséquent *b*. Ainsi supposé que *a* contienne *n*, 5 fois, 10 fois, 100, &c. au lieu d'écrire 5*x*, 10*x*, 100*x*, &c.

ce qui seroit une expression particulière, on écrira $n x$, & de cette façon $n x$ représente d'une manière générale tous les nombres possibles d'aliquotes, dans lesquelles on peut concevoir que a est divisée, & l'on a $a = n x$, & de même $m x$ représente le nombre de fois que le conséquent b contient la même aliquote x , quelque nombre entier que puisse être m : par conséquent $b = m x$. On supposera de même que y représente l'aliquote semblable de l'antécédent c ; & comme y doit être dans c le même nombre de fois marqué par n que x est dans a , & dans d le même nombre de fois marqué par m que x est dans b , l'on aura $c = n y$, & $d = m y$. Ainsi l'expression générale d'une proportion par le moyen des aliquotes, sera $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ainsi chaque proportion particulière, comme $\frac{1 \text{ pied}}{1 \text{ toise}} = \frac{1 \text{ toise}}{1 \text{ toise}}$, sera représentée, 1°, par $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 2°, par $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, & n vaudra ici 5 ; 3°, par $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, & n vaudra ici 3 ; 4°, par $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, & n vaudra ici 1.

Quand on aura trois rapports égaux, on les exprimera de cette manière $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$. On peut, pour fixer l'imagination, appliquer cette expression à trois rapports particuliers égaux, comme à $\frac{1 \text{ pied}}{1 \text{ toise}} = \frac{1 \text{ toise}}{1 \text{ toise}} = \frac{1 \text{ toise}}{1 \text{ toise}}$.

On peut remarquer que quand $n = m$, les rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ deviennent $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ qui sont des rapports d'égalité, dont chacun est égal à $\frac{1}{1}$, puisque chaque conséquent est contenu une fois dans son antécédent.

Application de la notion de proportion, expliquée dans la définition précédente, aux grandeurs incommensurables.

50. DEUX rapports incommensurables * qu'on représentera
 36. par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sont égaux ou font une proportion, lorsqu'en concevant l'antécédent a , partagé en quelque nombre entier que ce puisse être de parties égales entr'elles, & qu'en concevant l'antécédent c aussi partagé dans le même nombre d'autres parties égales entr'elles, il arrive toujours que le conséquent b contient autant de parties égales de son antécédent a , avec un petit reste qu'on nommera R , que le conséquent d contient de parties semblables de son antécédent c , avec un petit reste qu'on appellera R .

Explication. a, b, c, d représentent quatre lignes droites,
 36. on suppose que le rapport $\frac{a}{b}$ des deux premières est * incommensurable,

mesurable, comme aussi le rapport $\frac{1}{2}$ des deux dernières, &c que ces deux rapports sont égaux. Voici la manière dont on conçoit égaux ces deux rapports incommensurables.

1°. On conçoit la première grandeur a partagée en tel nombre d'aliquotes qu'on voudra : par exemple, en cent aliquotes, dont chacune se nommera X , &c que la seconde grandeur b contient tel nombre qu'on voudra de ces aliquotes, par exemple 50, &c de plus un petit reste R moindre qu'une de ces aliquotes. On conçoit en même temps la troisième grandeur c partagée en autant d'aliquotes, dont chacune se nommera Y , qu'il y en a dans a , c'est à dire en 100 Y ; &c que la quatrième grandeur d contient autant de ces aliquotes Y , que b contient d'aliquotes X , &c qu'il y a de plus un petit reste R moindre que Y : ainsi $\frac{1}{2} = \frac{100X}{200a}$, &c $\frac{1}{2} = \frac{100Y}{200c}$.

2°. On peut concevoir chaque X partagée en tel nombre qu'on voudra d'aliquotes, dont chacune sera nommée x , plus petites chacune que R , par exemple en 1000 x , &c en même temps chaque Y partagée dans le même nombre d'aliquotes, dont chacune s'appellera y , c'est à dire en 1000 y . Le conséquent b doit par la supposition contenir, 1°, cinquante fois mille x 2°, mais comme x est supposée moindre que R , x doit être en R un certain nombre de fois, qu'on supposera être dix fois, avec un nouveau petit reste qu'on nommera r . Ainsi $b = 50000x + 10x + r$. Le second conséquent d doit aussi contenir cinquante fois mille y plus dix y plus un nouveau reste qu'on nommera r , &c l'on aura après ce partage $\frac{1}{2} = \frac{50000x + 10x + r}{100000x}$, &c $\frac{1}{2} = \frac{50000y + 10y + r}{100000y}$.

3°. On peut concevoir que le partage des aliquotes x &c y est continué en un même nombre, tel qu'on voudra, d'aliquotes pareilles plus petites, &c le partage de celles-ci en un même nombre, tel qu'on voudra, d'autres aliquotes pareilles plus petites, &c ainsi à l'infini, &c dans chaque partage le reste r du partage précédent des x , &c le reste r du partage précédent des y doivent donner chacun un même nombre d'aliquotes pareilles avec un nouveau petit reste, &c toujours de même à l'infini.

Nommant n tel nombre entier qu'on voudra, tant grand qu'il puisse être, &c prenant ce nombre pour exprimer le nombre des aliquotes de a , dont chacune sera nommée X , on aura $a = nX$.

Nommant aussi Y l'aliquote semblable de e , on aura $e = nY$.

Nommant m le nombre entier qui exprime combien de fois ces aliquotes pareilles X & Y sont contenues dans les conséquens b & d , R le petit reste de b , & R le petit reste de d , on aura $b = mX + R$, & $d = mY + R$, & l'expression des deux rapports incommensurables égaux par le moyen des aliquotes, sera $\frac{b}{mX+R} = \frac{d}{mY+R}$.

Cette expression peut servir pour tous les partages qu'on peut concevoir à l'infini des aliquotes X & Y en d'autres nouvelles plus petites. & de celles-ci en d'autres nouvelles à l'infini, en supposant que X exprime l'aliquote de chaque partage pour le premier rapport, & Y l'aliquote semblable du même partage pour le second rapport; que n représente le nombre des aliquotes pareilles des antécédens, m le nombre des aliquotes pareilles des conséquens, & R le petit reste du conséquent du premier rapport, & R le petit reste du conséquent du second rapport.

Il ne peut arriver dans aucun de ces partages à l'infini, que le reste R du premier conséquent donne un nombre d'aliquotes X , différent du nombre des aliquotes pareilles Y que donnera le reste R du second conséquent; car si l'un de ces deux restes, par exemple R , donnoit dans le partage suivant une seule aliquote de plus que l'autre, l'on auroit dans ce partage pour l'expression de la proportion $\frac{b}{mX+R}$

- * 39. $= \frac{b}{mY+R}$. Or il est évident * que le premier de ces rapports est plus grand que le second, car en mettant dans le conséquent $mX + R$, X plus grande par la supposition que
- * 39. le petit reste R ; à la place de R , on auroit * $\frac{b}{mX+R} > \frac{b}{mY+R}$,
- * 47. & $\frac{b}{mX+R} * = \frac{d}{mY+R}$, donc $\frac{b}{mX+R}$ surpasse * $\frac{d}{mY+R}$. Or $\frac{d}{mY+R}$ sur-
- * 49. passe * $\frac{d}{mX+R}$; donc $\frac{b}{mX+R}$ surpasse $\frac{d}{mX+R}$. Ainsi dans
- * 39. chaque partage à l'infini, chacun des restes R & R doit four-
- * 39. nir pour le partage suivant un même nombre d'aliquotes pa-
- * 39. reilles, afin que les deux rapports incommensurables $\frac{b}{mX+R}$ & $\frac{d}{mY+R}$ soient égaux.

Mais après des partages infinis on conçoit que les restes R & R sont enfin épuisés, en fournissant toujours un même nombre d'aliquotes pareilles dans chaque partage.

51. D'où l'on peut voir que la notion de deux rapports égaux ou d'une proportion, peut être commune aux rapports commensurables & incommensurables, sçavoir, que deux rapports sont égaux, quand les antécédens étant conçus partagez dans le même nombre entier d'aliqotes semblables X & Y , quel que puisse être ce nombre, chacun des conséquens contient le même nombre des aliqotes pareilles de son antécédent; mais dans les rapports commensurables, le même nombre des aliqotes semblables X & Y des antécédens est fini, & le même nombre des mêmes aliqotes semblables X & Y des conséquens est aussi fini; au lieu que ce qui fait deux rapports incommensurables égaux, est qu'en concevant les deux antécédens partagez dans le même nombre infini d'aliqotes pareilles X & Y , chacun des conséquens contient l'aliqote pareille de son antécédent le même nombre infini de fois. Ainsi l'expression $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ peut être commune à deux rapports égaux commensurables, & à deux rapports incommensurables, en supposant que les nombres représentez par n & m sont finis pour les deux premiers, & infinis pour les seconds.

Ainsi ce que l'on démontrera dans la suite, par le moyen de cette expression de deux rapports égaux, conviendra à deux rapports égaux commensurables, & à deux rapports égaux incommensurables.

REMARQUE.

CE seroit la même notion de deux rapports incommensurables égaux, que de dire, qu'en quelque même nombre d'aliqotes que ce puisse être qu'on conçoive partagez les conséquens de ces deux rapports, leurs antécédens doivent contenir chacun le même nombre d'aliqotes semblables de son conséquent avec un petit reste.

Corollaires qu'il faut se rendre très familiers.

I.

52. Les rapports égaux à un même rapport, ou à des rapports égaux, sont égaux entr'eux. Ce Corollaire est un axiome après ce qui précède.

II.

53. Une même grandeur A ne sçaurait avoir le même rapport à d'autres grandeurs B & C , que ces autres là ne soient éga-

les ; & plusieurs grandeurs B & C ne sçauroient avoir le même rapport avec une même grandeur A , qu'elles ne soient aussi égales ; & des grandeurs égales étant comparées à des grandeurs égales, elles ont des rapports égaux ; si $a = c$, & $b = d$, les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont égaux. Ce Corollaire est très évident.

54. Lorsque les trois premiers termes a , b , c d'une proportion sont donnez, la grandeur du quatrième d est déterminée, c'est à dire, il ne peut y avoir pour le quatrième terme plusieurs grandeurs différentes, dont les unes soient plus grandes, les autres plus petites, mais il n'y a qu'une même grandeur qui puisse être le quatrième terme d , & toutes les grandeurs qui peuvent être le quatrième terme, sont égales & peuvent être prises pour la même. Car le premier rapport $\frac{a}{b}$ étant déterminé, le rapport de c au quatrième terme d est égal au rapport de a à b . Or une même grandeur c ne peut pas avoir un même rapport * à des grandeurs inégales, mais seulement à des grandeurs égales qui peuvent être prises chacune pour la même grandeur.

Il est évident par la même preuve, que pourvu que trois termes d'une proportion soient déterminés ou donnez, il n'importe pas que ce soient les trois premiers, le quatrième, qui est celui qui reste, est toujours déterminé. Ainsi la proportion étant $a : b :: c : d$. 1°. Si b , c , d sont trois grandeurs déterminées, a est aussi déterminée. 2°. Si a , c , d sont déterminées, b l'est aussi. 3°. Si a , b , d sont déterminées, c l'est aussi. 4°. Si a , b , c sont déterminées, d l'est aussi : car dans tous ces cas il y a un des deux rapports de la proportion qui est déterminé, le second rapport doit être égal à ce premier : ainsi un des termes de ce second rapport étant déterminé, l'autre terme est nécessairement déterminé.

4.

55. Quand deux ou plusieurs rapports, soit commensurables, soit incommensurables, sont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, leurs rapports inverses $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{f}{e}$, sont aussi égaux.

Il n'y a qu'à exprimer ces rapports égaux par le moyen des aliquotes, pour voir que la notion des rapports égaux convient à leurs rapports inverses : car ces rapports égaux se-

ront * $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, & leurs rapports inverses seront * 47.
 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c} = \frac{b \times d}{a \times c}$, auxquels convient la notion des rapports égaux * 47.

Si l'on vouloit une démonstration particulière pour les rapports incommensurables, la voici.

Soient les deux rapports incommensurables égaux représentés par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, il faut démontrer que leurs rapports inverses $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ sont aussi égaux, & qu'on ne sauroit les supposer inégaux, qu'on ne tombe dans une contradiction. Car supposant que l'un des deux, lequel on voudra comme le premier $\frac{a}{b}$, est moindre que l'autre $\frac{c}{d}$; qu'on ajoute à b la grandeur z , qui soit telle que $\frac{a+z}{b+z} = \frac{c}{d}$; que l'on conçoive le conséquent a partagé en tel nombre n de parties égales qu'on voudra, dont chacune, qui sera nommée X , ne surpasse pas z ; que m marque le nombre de fois que l'aliquote X est dans b avec un reste; & comme on suppose qu'elle ne surpasse pas z , elle sera au moins une fois dans z exactement, ou avec un reste; & pour abréger, on nommera R la somme de ces deux restes, s'il y en a deux; ainsi $\frac{a+z}{b+z} = \frac{a \div n + \frac{X+z}{n}}{b \div n + \frac{X+R}{n}}$. Que l'on conçoive c partagée dans le même nombre n de parties égales, dont chacune sera nommée Y , ainsi $c = nY$. Il est évident * 39.
 que Y sera contenue dans d le nombre de fois qui est marqué par m , avec un reste R . Ainsi $\frac{c}{d} = \frac{nY}{d} = \frac{nY}{d}$, mais $\frac{a \div n + \frac{X+z}{n}}{b \div n + \frac{X+R}{n}} > * \frac{a \div n + \frac{X+z}{n}}{b \div n + \frac{X+R}{n}}$; & $\frac{a \div n + \frac{X+z}{n}}{b \div n + \frac{X+R}{n}} = * \frac{a \div n + \frac{X+z}{n}}{b \div n + \frac{X+R}{n}}$. Donc $\frac{a \div n + \frac{X+z}{n}}{b \div n + \frac{X+R}{n}}$ (qui est * 39.
 égal par la supposition à $\frac{c}{d}$) est plus grand que $\frac{a \div n + \frac{X+z}{n}}{b \div n + \frac{X+R}{n}}$, ou son * 48.
 égal $\frac{c}{d}$. Or le même rapport ne peut pas être égal à un autre & en même temps plus grand que cet autre là. On tombe donc dans une contradiction, en supposant que les rapports inverses $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ sont inégaux. & 50.

COROLLAIRE V.

36. LORSQUE plusieurs rapports, soit commensurables, soit incommensurables, sont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, la somme des antécédens $a + c + e$ est à la somme des conséquens $b + d + f$, comme un seul antécédent a est à son conséquent b , c'est à dire $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$. Il n'y a qu'à exprimer ces rapports égaux par leurs aliquotes, pour voir clairement que la notion * des rapports égaux leur convient. On aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ * 47.

- * 47. $\frac{nX + nY + nZ}{mX + mY + mZ}$, & $\frac{a}{b} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{X}$. Or $\frac{nX + nY + nZ}{mX + mY + mZ} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{X}$; car il est évident que l'aliquote $X + Y + Z$ est dans $nX + nY + nZ$ le nombre de fois qui est représenté par n , & dans $mX + mY + mZ$ le nombre de fois marqué par m ; & l'aliquote pareille X est dans nX le nombre de fois qui est marqué par n , & dans mX le nombre de fois qui est marqué par m .

Par exemple, si n vaut 10, & si m vaut 5, l'on aura $\frac{10X + 10Y + 10Z}{5X + 5Y + 5Z} = \frac{10}{5} \cdot \frac{X}{X}$. Il est évident que $X + Y + Z$ est dix fois dans $10X + 10Y + 10Z$, & cinq fois dans $5X + 5Y + 5Z$. Ainsi $X + Y + Z$ & X sont les aliquotes pareilles des antécédens qui sont contenues le même nombre de fois dans les conséquens.

La démonstration est générale par l'article 51, tant pour les rapports commensurables, que pour les incommensurables. en voici cependant une particulière pour les rapports incommensurables. On peut exprimer les rapports incommensurables égaux de cette manière *

- * 50. $\frac{a}{b} = \frac{nX}{mX + R}$, $\frac{c}{d} = \frac{nY}{mY + R}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Il faut donc démontrer que $\frac{nX + nY + nZ}{mX + mY + mZ + R + R + R} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{X + R}$, ce qui est facile; car $X + Y + Z$ & X , sont les aliquotes semblables des antécédens qui y sont contenues le même nombre de fois qui est marqué par n , tel qu'il puisse être; or la première $X + Y + Z$ est contenue dans le premier conséquent le nombre de fois qui est marqué par m , & il y a de plus le reste $R + R + R$; la seconde X est contenue dans le second conséquent le même nombre de fois marqué par m , & il y a de

* 50. plus le reste R . Par conséquent $\frac{nX + nY + nZ}{mX + mY + mZ + R + R + R} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{X + R}$.

COROLLAIRE VI.

57. LORSQUE deux rapports, soit commensurables, soit incommensurables, sont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; la différence des antécédens $a - c$ est à la différence des conséquens $b - d$, comme un seul antécédent a est à son conséquent b . Il faut démontrer que $\frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b}$. Par l'article 49, $\frac{a}{b} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X}{X}$, & $\frac{c}{d} = \frac{n}{m} \cdot \frac{Y}{Y}$. Ainsi $\frac{a - c}{b - d} = \frac{n}{m} \cdot \frac{X - Y}{X - Y}$. Mais $X - Y$ est une aliquote de $nX - nY$, qui y est contenue le nombre de fois qui est représenté par n , & qui est tel qu'on voudra; & X est l'aliquote

semblable de nX , qui y est contenue le même nombre de fois marqué par n , & la première de ces aliquotes pareilles, savoir $X - Y$ est contenue dans $mX - mY$ le nombre de fois qui est exprimé par m , & l'aliquote pareille X est contenue dans mX le même nombre de fois. Donc $\ast \frac{nX - mY}{mX - mY} = \frac{nX}{mX}$. $\ast 51.$

Démonstration particulière pour les rapports incommensurables. $\ast \frac{nX}{mX + R} ; \frac{nY}{mY + R} = \frac{nX}{mX + R}$ Donc $\ast \frac{nX - mY}{mX - mY + R - R} = \frac{nX}{mX + R}$. $\ast 50.$
Car $X - Y$, & X aliquotes pareilles des antécédens sont contenues la première dans le premier conséquent, la seconde dans le second conséquent, le même nombre de fois chacune avec un petit reste.

REMARQUES.

1.

58. ON énonce les deux derniers Corollaires précédens de cette autre façon. Un rapport $\frac{a}{b}$ demeure toujours le même si l'on ajoute à l'antécédent a , du rapport $\frac{a}{b}$, une grandeur c , & qu'on ajoute en même temps au conséquent b une grandeur d , ou bien si l'on ôte de a la grandeur c , & de b la grandeur d , & que les grandeurs ajoutées ou retranchées c & d soient entr'elles comme a est à b : c'est à dire, si $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$, & encore $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$.

2.

59. MAIS un rapport $\frac{a}{b}$ ne demeurera plus le même, si l'on ajoute une grandeur c à un seul de ses deux termes; ou si on l'en retranche, sans rien ajouter à l'autre, ou sans en rien retrancher: c'est à dire que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b}$ & $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b}$; & de même $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+d}$, & $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-d}$. Cela est évident \ast . $\ast 42.$

3.

60. SI l'on ajoute la grandeur c à l'antécédent a du rapport $\frac{a}{b}$, ou si l'on en retranche la grandeur c , & qu'on ajoute en même temps au conséquent b la grandeur f , ou qu'on l'en retranche; & que les grandeurs c & f ne soient pas entr'elles comme a est à b ; le rapport n'est plus le même: c'est à dire, si $\frac{c}{f}$ n'est pas égal à $\frac{a}{b}$, nécessairement $\frac{a}{b}$ ne sera pas égal à $\frac{a+c}{b+f}$, ni à $\frac{a-c}{b-f}$. Car en concevant a & c partagées dans le même

nombre n d'aliqotes semblables qui soient X & Y , l'on aura $n = nX$, & $e = nY$. Or si m marque le nombre de fois que l'aliqote X est dans b , le même nombre m ne pourra pas marquer le nombre de fois que Y est dans f , puisqu'il faut droit * qu'on eût supposé les deux rapports $\frac{f}{b}$, $\frac{f}{f}$ égaux, afin que cela arrivât, & on les a supposé inégaux. Ainsi ce sera nécessairement un autre nombre, qu'on nommera p , qui marquera combien de fois Y est dans f , & l'on aura $b = mX$, & $f = pY$. Par conséquent l'on aura $\frac{f}{b} = \frac{pY}{mX}$, $\frac{f}{f} = \frac{pY}{pY} = \frac{pY}{mX + pY}$, $\frac{f}{f} = \frac{pY}{mX + pY}$. Or il est évident que X , $X + Y$, $X - Y$ sont les aliqotes pareilles des antécédens nX , $nX + nY$, $nX - nY$; & que l'aliqote X n'est pas dans le conséquent mX le même nombre de fois que les aliqotes pareilles $X + Y$ & $X - Y$ sont dans les conséquens $mX + pY$, $mX - pY$. Par conséquent le rapport $\frac{nX}{mX}$ ou $\frac{f}{b}$ n'est pas égal au rapport $\frac{nX + nY}{mX + pY}$ ou à son égal $\frac{f}{f}$, ni à $\frac{nX - nY}{mX - pY}$, ou à son égal $\frac{f}{f}$.

COROLLAIRE VII.

61. SUPPOSE' que $\frac{X}{Y}$ représente un rapport quelconque: deux grandeurs, dont l'une contient exactement l'antécédent X un nombre de fois quelconque représenté par n , & dont l'autre contient le conséquent Y le même nombre de fois marqué par n , ont le même rapport que X à Y ; comme aussi deux grandeurs dont l'une est contenue autant de fois dans X , que l'autre est contenue dans Y ; c'est à dire $\frac{X}{Y} = \frac{nX}{nY} = \frac{1X}{1Y} = \frac{2X}{2Y} = \&c.$

comme aussi $\frac{X}{Y} = \frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y} = \frac{\frac{1}{3}X}{\frac{1}{3}Y} = \frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y} = \&c.$ ce qu'on peut

ainsi marquer en general $\frac{X}{Y} = \frac{nX}{nY}$, en supposant que n représente un nombre quelconque entier ou rompu.

Démonstration. Il est évident que tous ces rapports sont égaux $\frac{X}{Y} = \frac{nX}{nY} = \frac{X}{Y} = \frac{X}{Y} = \&c.$ donc la somme des antécédens de tel nombre de ces rapports qu'on voudra, par exemple $5X$, est à la somme du même nombre de conséquens,

66. § 2° * comme un seul antécédent X est à un seul conséquent Y .

Ainsi $\frac{X}{Y} = \frac{5X}{5Y} = \frac{10X}{10Y} = \frac{20X}{20Y}$.

On démontrera la même chose des grandeurs contenues le même nombre de fois, l'une dans X , & l'autre dans Y .

Par exemple, que $\frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y} = \frac{X}{Y}$: car $\frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y} = \frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y} = \frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y} = \frac{\frac{1}{2}X}{\frac{1}{2}Y}$.

Donc la somme des antécédens qui est quatre quarts de X , c'est à dire X entière, est à la somme des conséquens, qui est quatre quarts de Y , c'est à dire Y entière, * comme un quart

de X est à un quart de Y ; ainsi $\frac{\frac{1}{4}X}{\frac{1}{4}Y} = \frac{X}{Y}$.

COROLLAIRE VIII.

62. QUAND deux rapports sont égaux comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; le rapport des antécédens est égal à celui des conséquens, c'est à dire $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Démonstration $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ainsi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *49 & $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Mais $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, & $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Donc $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, *61. c'est à dire $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ce qu'il falloit démontrer.

18^e DÉFINITION.

QUAND on a une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ qu'on appellera directe, la proportion $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ qui s'en déduit nécessairement, s'appelle *alterne*: & comme elle est de grand usage, il faut se la rendre si familière, qu'on la reconnoisse d'abord, sans qu'il soit besoin de marquer ce nom d'*alterne* pour en faire souvenir.

Démonstration particulière de la proportion alterne de deux rapports égaux incommensurables qu'on représentera par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Il faut démontrer que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Par l'article 50 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ & $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ainsi il faut démontrer que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Il est déjà évident par la démonstration précédente & par l'article 61, que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; puisque l'un & l'autre est égal à $\frac{a}{b}$. Ainsi il faut démontrer que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; car alors la somme des antécédens $mX + R$ des deux rapports égaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, sera à la somme des conséquens $mY + R$, comme * mX est à mY , ou comme nX est à nY .

Le rapport $\frac{a}{c}$ ne peut être ni plus grand ni plus petit que $\frac{b}{d}$;

- * 42. ainsi il lui est égal. 1°. s'il étoit plus grand, qu'on le diminue * en ajoutant au conséquent R une grandeur z qui soit telle que $\frac{R}{R+z} = \frac{x}{y}$. Qu'on conçoive X & Y partagées en un même nombre quelconque, qu'on nommera p , d'aliquotes pareilles x & y , & que y ne surpasse pas z , ce qui est possible *; ainsi
- * 61. $\frac{x}{y} * = \frac{x}{y}$. Il est évident par l'article 50 que x sera dans R tout autant de fois, avec un petit reste r , que y sera dans R avec un petit reste r ; & nommant ce nombre q , on aura $\frac{R}{R+z} = \frac{qx+r}{yq+r}$. Mais ayant supposé $y < z$ ou $y = z$, y sera dans z au moins une fois; & s'il y a un reste, on ne sera de ce reste & du petit reste r , qu'un seul reste que l'on supposera représenté par la même lettre r , & l'on aura $R+z = qy+r$. Ainsi $\frac{R}{R+z} = \frac{qx+r}{yq+r}$.

On va démontrer que $\frac{R}{R+z} = \frac{qx+r}{yq+r}$, qu'on suppose égal à $\frac{x}{y}$, ne peut pas lui être égal, qu'il est plus petit; & qu'ainsi la supposition que $\frac{R}{R}$ est plus grand que $\frac{x}{y}$ conduit nécessairement à cette contradiction que $\frac{R}{R+z}$ est égal à $\frac{x}{y}$, & qu'il est en même temps plus petit.

- * 61. x & y étant les aliquotes pareilles de X & Y , l'on aura * $\frac{x}{y} = \frac{qx}{yq} = \frac{qx}{yq} - \frac{x}{y} = \frac{qx+r}{yq+r}$. Or $qx+r$ surpasse $qx+r$; car on
- * 39. suppose le reste r moindre que x : ainsi le rapport $\frac{qx+r}{yq+r}$ * sur-
- * 39. passe le rapport $\frac{qx}{yq}$; & $\frac{qx+r}{yq+r}$ * étant plus grand que $\frac{qx}{yq}$;
- * 43. $\frac{qx+r}{yq+r}$ surpasse * à plus forte raison le rapport $\frac{qx}{yq}$. Donc puisqu'il s'ensuit que $\frac{qx+r}{yq+r}$ surpasse $\frac{qx}{yq}$; le rapport $\frac{x}{y}$ surpasse aussi $\frac{qx+r}{yq+r}$ égal par la supposition à $\frac{R}{R+z}$. On arrive donc à une contradiction en supposant que $\frac{R}{R+z}$ étoit égal à $\frac{x}{y}$. Cela vient de ce qu'on a supposé $\frac{R}{R}$ plus grand que $\frac{x}{y}$; ainsi $\frac{R}{R}$ ne peut pas être plus grand que $\frac{x}{y}$.
- 2°. Si $\frac{R}{R}$ étoit plus petit que $\frac{x}{y}$, qu'on ajoute à R la grandeur z , de façon que $\frac{R+z}{R+z}$ soit égal à $\frac{x}{y}$, qu'on conçoive, comme dans le cas précédent, X & Y partagées en aliquotes pareilles x & y , dont le nombre soit p , & que chaque x ne surpasse pas z , & l'on aura $\frac{x}{y} = \frac{R}{R+z}$.

Comme x doit être dans R autant de fois, avec un petit reste r , que y est dans R avec un petit reste r , par l'article 50, nommant q le nombre qui marque combien de fois x est dans R , & y dans R , on aura $\frac{R+x}{x} = \frac{R+y}{y}$.

Mais ayant supposé $x < y$ ou $x = y$, x sera dans R au moins une fois, & s'il y a un reste, on ne fera de ce reste & du reste r qu'un seul reste qu'on représentera, pour abréger, par la même lettre r , & ce reste r sera moindre que x , puisque s'il étoit plus grand on auroit une x de plus, dans $R + x$ avec un reste r ; ainsi $\frac{R+x}{x} = \frac{R+y+r}{y}$.

On va démontrer que $\frac{R+x}{x} = \frac{R+y+r}{y}$, qu'on suppose égal à $\frac{R}{x}$, est plus grand que $\frac{R}{y}$; & que la supposition de $\frac{R}{x}$ moindre que $\frac{R}{y}$ conduit nécessairement à cette contradiction que $\frac{R+x}{x}$ est égal à $\frac{R}{y}$, & en même temps plus grand que $\frac{R}{y}$.

* & y étant les aliquotes pareilles de X & de Y , tous les * 61. rapports suivans sont égaux $\frac{x}{y} = \frac{R}{y} = \frac{R+x}{y} = \frac{R}{x} = \frac{R+y}{x} = \frac{R+y+r}{x}$.

Mais r étant moindre que y par la supposition, $qy + r$ est

* 39. moindre que $qy + y$, & le rapport $\frac{R+x}{y} = \frac{R+y+r}{y}$ * surpasse $\frac{R}{y}$; or

* 32. $\frac{R+x}{y} = \frac{R+y+r}{y}$ surpasse * $\frac{R}{y}$. Donc à plus forte raison $\frac{R+x}{y} = \frac{R+y+r}{y}$

surpasse $\frac{R}{y} = \frac{R}{x}$. Donc $\frac{R+x}{x} = \frac{R+y+r}{y}$ surpasse $\frac{R}{y}$. On n'a

donc pas pû supposer $\frac{R+x}{x} = \frac{R}{y}$, puisqu'on vient de démon-

trer que $\frac{R+x}{x}$ surpasse $\frac{R}{y}$. Cela vient de ce qu'on a supposé $\frac{R}{x}$

moindre que $\frac{R}{y}$. Ainsi la supposition de $\frac{R}{x}$ inégal à $\frac{R}{y}$ menant

à une contradiction, il s'ensuit que $\frac{R}{x} = \frac{R}{y}$. Ce qu'il falloit dé-

montrer.

COROLLAIRE IX.

63. SUPPOSE les deux rapports égaux $\frac{x}{y} = \frac{R}{y}$, & encore les deux rapports égaux $\frac{x}{y} = \frac{R}{y}$, je dis que l'on aura cette proportion $\frac{x}{y} = \frac{R}{y}$.

Démonstration. On peut exprimer les deux rapports égaux

* 49. $\frac{x}{y} = \frac{R}{y}$ * par ces deux autres $\frac{x}{y} = \frac{R}{y}$; & quand les rapports

* 10. $\frac{x}{y} = \frac{R}{y}$ * sont incommensurables, par ceux-ci $\frac{x}{y} = \frac{R}{y}$,

on peut de même exprimer les deux rapports égaux $\frac{x}{y} = \frac{R}{y}$

E ij

par ceux-ci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & dans les incommensurables par $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- * 47. $= \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Or il est évident que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & dans les
 * 50. incommensurables $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Donc en re-
 mettant, dans ces deux rapports égaux, a au lieu de ax ; d
 au lieu de ay ; b au lieu de mx ; c au lieu de px ; e au lieu de my ,
 & f au lieu de py ; l'on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Ce qu'il falloit dé-
 montrer.

Si l'on avoit tel nombre qu'on voudra de ces rapports égaux
 deux à deux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; $\frac{g}{h} = \frac{i}{k}$; &c. Il est évi-
 dent, en continuant la même démonstration, que l'on dé-
 duirait de ces rapports égaux deux à deux, cette proportion
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = \frac{i}{k}$.

19^e DÉFINITION.

64. **LORSQUE** dans une proportion le second & le troisième
 terme sont égaux : c'est à dire que le second terme sert de
 conséquent au premier rapport, & d'antécédent au second
 rapport, & que la proportion n'a par conséquent que trois
 termes : on l'appelle une *proportion continue*, & le terme moyen
 s'appelle *moyen proportionnel*. On marque ainsi cette propor-
 tion, quand c'est une proportion arithmétique continue.
 $\div 3 \quad 5 \quad 7$. C'est à dire la différence de 3 à 5 est égale à la
 différence de 5 à 7. De même $\div a \quad a+d \quad a+2d$. C'est à
 dire la différence de a à $a+d$, est égale à la différence de
 $a+d$ à $a+2d$. Le terme $a+d$ est moyen propor-
 tionnel arithmétique entre a & $a+2d$.

On marque ainsi une proportion géométrique continue
 $\div 8 \quad 4 \quad 2$. C'est à dire, 8 est à 4, comme 4 est à 2. Le ter-
 me 4 est un moyen proportionnel géométrique entre 8 & 2. De
 même $\div a \quad b \quad c$ signifie que a est à b , comme b est à c .

Quand une proportion continue s'étend à plus de trois ter-
 mes, on l'appelle une *progression*.

Ainsi $\div 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 17$ est une progression
 arithmétique. De même $\div a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad a+4d$
 $a+5d \quad a+6d \quad a+7d$ est une progression arithmétique.

Mais $\div 64 \quad 32 \quad 16 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1$ est une progression géomé-
 trique.

Tous les termes qui sont entre le premier & le dernier s'appel-
 lent *termes proportionnels*.

Division de cet Ouvrage.

ON partagera cette science du calcul des grandeurs en general en quatre Livres. On expliquera dans le premier le calcul des grandeurs entieres ; dans le second , le calcul des fractions , tout ce qui regarde les rapports simples & composés , & les proportions , & le calcul des grandeurs incommensurables. Dans le troisieme , les proprietés des progresions arithmetique & geometrique , avec l'usage de leur union dans les calculs , la formule pour élever les grandeurs complexes à toutes les puissances possibles ; les proprietés des nombres figurez ; les logarithmes , leur usage , & une méthode facile de les construire. Dans le quatrième , on fera voir l'usage du calcul pour apprendre les Mathematiques en les découvrant soi-même ; c'est à dire , on donnera les principales Regles de la maniere d'employer le calcul dans les découvertes . & on les appliquera à la résolution de plusieurs Problèmes.

SECTION II.

Où l'on explique l'addition & la soustraction des grandeurs entieres .

Addition des grandeurs entieres.

DEFINITION I.

AJOUTER plusieurs grandeurs données , c'est trouver la grandeur totale qui les contient toutes ; cette grandeur totale s'appelle leur *somme* .

SUPPOSITION I.

ON suppose que l'on sçait ajouter ensemble les nombres moindres que dix , c'est à dire , qui ne contiennent que des unités sans dizaines.

L'Addition des nombres entiers.

PROBLÈME I

65. AJOUTER ensemble tant de nombres entiers qu'on voudra , & en trouver la somme .

Regle ou operation. 1°. Il faut écrire tous les nombres ,

E iij

qu'on veut ajouter, les uns sous les autres, observant exactement d'écrire toutes les unités de ces nombres les unes sous les autres dans un même rang, qui est le premier; toutes les dizaines les unes sous les autres dans le second rang; toutes les centaines dans le troisième rang, & ainsi de suite. Cette pratique est absolument nécessaire pour ne pas se tromper. Il faut ensuite tirer une ligne sous ces nombres, & ce sera sous cette ligne qu'on écrira la somme que l'on cherche.

2°. Il faut ajouter ensemble tous les chiffres du premier rang, qui est le rang des unités, & il peut arriver tous ces cas, 1°. Si la somme est moindre que dix, il faut l'écrire sous la ligne qu'on a tirée, dans le rang des unités. 2°. Si le rang des unités ne contenoit que des zéros, il faudroit écrire 0 dans le rang des unités. 3°. Si la somme des unités contient exactement une ou plusieurs dizaines sans unités jointes aux dizaines, il faut écrire 0 dans la somme au rang des unités, & retenir les dizaines pour les ajouter aux dizaines du second rang. 4°. Si la somme contient une ou plusieurs dizaines & de plus des unités, il faut écrire les unités dans la somme au rang des unités, & retenir les dizaines pour les ajouter avec les dizaines du second rang. 5°. Enfin, si la somme contenoit des centaines, il faudroit les retenir pour les ajouter avec le rang des centaines; mais ce cas n'arrive que quand il faut ajouter beaucoup de nombres.

3°. Il faut pratiquer dans le second rang ce que l'on vient de prescrire pour le premier, en regardant ce second rang comme si c'étoit des unités; faire ensuite la même chose par ordre dans le troisième rang, dans le quatrième, & dans tous les autres; & le nombre que l'on aura écrit sous la ligne sera la somme de tous les nombres qu'on vouloit ajouter. Ceci s'éclaircira par l'exemple suivant.

Exemple de l'Addition des nombres entiers.

POUR ajouter les trois nombres *A*, *B*, *C*, 1°. Je les écris les uns sous les autres, de manière que les unités soient exactement dans le premier rang, les dizaines dans le second, & ainsi de suite, & je tire une ligne au dessous.

A 940153

B 870412

C 790274

D 2600939 somme.

2°. J'ajoute les unités du premier rang, en disant 3 + 2

font 5. $5 + 4$ font 9. Ainsi la somme du rang des unitéz est 9, que j'écris sous la ligne dans le premier rang.

3°. J'ajoute de même les dixaines en disant $5 + 1$ font 6. $6 + 7$ font 13. J'écris les trois unitéz de 13 dans la somme au second rang, & je retiens une dixaine pour l'ajouter avec le troisième rang.

4°. J'ajoute les centaines ou les chiffres du troisième rang, en disant 1 que je retenois $+ 2$ font 3. $3 + 4$ font 7. $7 + 2$ font 9, j'écris 9 dans la somme au troisième rang.

5°. J'ajoute les chiffres du quatrième rang, en disant $0 + 0 + 0 = 0$, j'écris 0 au quatrième rang de la somme.

6°. J'ajoute les chiffres du cinquième rang, en disant $4 + 7$ font 11. $11 + 9$ font 20, j'écris 0 dans la somme au cinquième rang, & je retiens 2.

7°. Je dis 2 que je retenois $+ 9$ font 11. $11 + 8$ font 19. $19 + 7$ font 26, j'écris 6 dans la somme au sixième rang; & n'y ayant plus de rang à ajouter, j'écris dans la somme les deux dixaines de 26, c'est à dire j'écris 2 au septième rang, & la somme *D* des nombres $A + B + C$, est deux millions six cens mille neuf cens trente & neuf.

Démonstration de l'Addition. Il est évident, par l'opération même, que le nombre *D*, qu'on trouve par la pratique de l'Addition, contient * la somme de toutes les unitéz, * 11 & 13 de toutes les dixaines, de toutes les centaines, &c. des nombres qu'il falloit ajouter. Le nombre *D* est donc la somme des nombres proposés, qu'il falloit trouver.

REMARQUES.

1.

ON pourroit dans chaque rang, faire l'addition en allant de bas en haut : cela est arbitraire.

2.

Quand on a beaucoup de nombres séparés à ajouter, on peut partager l'addition totale en plusieurs additions particulières, ajoutant d'abord les dix premiers nombres, ensuite les dix suivans, & ainsi de suite. Après quoi il faut ajouter toutes les sommes trouvées par ces additions particulières, en une seule somme, qui sera la somme de tous les nombres proposés.

Exemple de l'addition des nombres qui contiennent des parties décimales.

L'ADDITION des nombres *A, B, C*,
 * 12. qui contiennent des parties décimales, * se fait comme l'addition des nombres entiers. Il faut seulement observer d'écrire dans le même rang les parties décimales qui se répondent, & quand quelqu'un des nombres qu'on doit ajouter, n'est pas réduit aux plus petites parties décimales des autres nombres, l'y réduire par le moyen des zeros, comme on le voit au nombre *C*.

<i>A</i>	321, 02974 ^v
<i>B</i>	1273, 10852
<i>C</i>	62, 01000
<i>D</i>	5617, 04826 ^v

On commencera donc par le rang des moindres parties, & l'on dira $4 + 2 = 6$; il faut écrire 6^e dans la somme. Ensuite on dira $7 + 5 = 12$; il faut écrire 2 dans la somme, & ajouter la dizaine qu'on a retenue au rang suivant, en disant $1 + 9 + 8 = 18$; il faut écrire 8 dans la somme, & dire ensuite $1 + 3 + 0 + 1 = 5$; il faut écrire 5 dans la somme. On dira ensuite $0 + 1 + 9 = 10$, il faut écrire 0 dans la somme avec un point ou une virgule qui le précède, pour distinguer les parties décimales des nombres entiers, & retenir 1 pour le rang des unités entières. Après quoi on ajoutera les unités entières, en disant $1 + 1 + 3 + 2 = 7$, il faut écrire 7 dans la somme, & continuer l'addition comme dans l'exemple précédent.

La démonstration est semblable à celle des nombres entiers.

Exemple de l'addition des nombres de différente espece.

LA grandeur que l'on prend pour servir de mesure dans chacune des grandeurs sensibles & qu'on a nommée l'unité, a été partagée par l'usage en d'autres parties égales plus petites contenues un certain nombre de fois dans l'unité. Ces premières parties de l'unité ont aussi été partagées en d'autres plus petites, & celles-ci en d'autres encore plus petites, & ainsi de suite. Par exemple, dans le Commerce on prend la livre pour l'unité qui sert de mesure aux monnoyes, on la partage en vingt sous, & chaque sou en douze deniers.

Dans la Geometrie pratique on prend la toise pour l'unité qui sert de mesure aux longueurs, on la divise en six pieds, &

& chaque pied en douze pouces, & chaque pouce en douze lignes. Les mesures des autres grandeurs sensibles ont aussi leurs divisions particulieres qu'on peut apprendre de l'usage. Les nombres qui contiennent plusieurs fois la grandeur qui sert d'unité & de mesure à quelque grandeur sensible, & qui contiennent de plus les différentes parties de cette unité, s'appellent communément *les nombres de différentes especes*. Voici un exemple de l'addition de ces nombres qui servira de regle aux Commensans pour les autres nombres de différentes especes.

Pour ajouter les nombres *A*, *B*, *C*, 1^o, on les écrira les uns sous les autres, observant de mettre les mêmes especes dans le même rang, & l'on tirera une ligne.

<i>A</i>	32	inf.	5	pieds	11	pouces	9	lig.
<i>B</i>	15		4			6		10
<i>C</i>	12		3			8		11
<i>D</i>	71	inf.	2	pieds	3	pouces	06	lig.

2^o On commencera par la moindre espece, & l'on dira 9 lig. + 10 + 11 = 30 lignes, qui valent 2 pouces 6 lignes, on écrira dans la somme, 6 lignes au rang des lignes, & l'on retiendra 2 pouces pour le rang des pouces. 3^o On dira au rang des pouces, 2 pouces + 11 + 6 + 8 = 27 pouces, qui valent 2 pieds 3 pouces; on écrira 3 pouces au rang des pouces, & on retiendra 2 pieds. 4^o On dira au rang des pieds, 2 pieds + 5 + 4 + 3 = 14 pieds, qui valent 2 toises 2 pieds; on écrira 2 pieds au rang des pieds, & l'on retiendra 2 toises pour les ajouter aux toises dont on fera l'addition, comme celle des nombres, entiers, & l'on trouvera la somme *D*.

La démonstration est semblable à celle de l'Addition des nombres entiers.

L'Addition des grandeurs entieres litterales,

D É F I N I T I O N.

P LUSIEURS grandeurs jointes ensemble par les signes + ou —, ou par tous les deux, sont nommées *grandeurs complexes*, & chacune de ces grandeurs prise séparément s'appelle *incomplexe*. Ainsi $a + b$, $a + b - c$ sont des grandeurs complexes; & a , b , $-c$, prises séparément, sont chacune une *grandeur incomplète*.

On nommera *grandeurs semblables* les grandeurs complexes qui ont précisément les mêmes lettres, quoiqu'il y ait différents nombres & différents signes au devant de chacune. Ainsi a , a , $-a$, $+3a$, $-5a$, sont des grandeurs sem-

blables. De même aab , $-aab$, $+3aab$, $-5aab$, font des grandeurs semblables; mais aa , & aab , ne sont pas semblables: de même aa , & aaa , sont dissemblables.

L'Addition des grandeurs littérales complexes:

PROBLÈME II.

66. **F** AIRE l'Addition des grandeurs littérales complexes.

POUR ajouter les grandeurs semblables, si elles sont toutes positives, on écrit une seule fois cette grandeur avec le signe $+$, & l'on marque au devant de la grandeur le nombre qui exprime combien de fois elle est ajoutée. Ainsi $+a + a + a = 3a$. $+aab + aab = 2aab$.

On ajoute de même les grandeurs négatives semblables, en mettant au devant de la somme le signe $-$, ainsi $-a - a = -3a$. $-aab - aab = -2aab$.

Quand les grandeurs semblables positives ou négatives, sont précédées de nombres, on ajoute aussi ces nombres. Ainsi $+3ac + 5ac = +8ac$; $-10ab - 14ab = -24ab$.

Enfin, quand les grandeurs semblables sont en partie positives, en partie négatives, on ajoute en une somme les positives, on ajoute en une autre somme les négatives, & l'on ôte la moindre somme de la plus grande, & l'on écrit le reste avec le signe de la plus grande des deux sommes. Ainsi $3ab + 4ab - 2ab - ab = +4ab$. De même $+3a + 2a - 7a = -2a$.

Pour ajouter les grandeurs dissemblables, il faut simplement les écrire de suite avec leur signe.

Ainsi la somme de $+3aab$ & de $-4acc$, est $+3aab - 4acc$. De même $5a + 3b$ est la somme de $+5a$, & de $+3b$.

L'Addition des grandeurs littérales complexes.

PROBLÈME III.

67. **P**OUR ajouter les grandeurs complexes, 1°. Si les grandeurs à ajouter ne contiennent que plusieurs sortes de grandeurs semblables, on écrira les grandeurs semblables les unes sous les autres dans les rangs correspondans, & on en trouvera la somme par 66 & comme dans les nombres. 2°. S'il y a des grandeurs dissemblables, on les joindra les unes aux autres avec leurs signes; mais il est inutile d'y observer les rangs.

PAR exemple, pour ajouter $A \quad 5ab + 7ac - 3bc + cc$
 les grandeurs complexes $A, B - 4ab + 3ac - 7bc + 3cc$
 B, C , qui ont toutes des gran- $C + 3ab - 5ac + 2bc - 2cc$
 deures semblables, 1°. on écri-
 ra les grandeurs semblables $D + 4ab + 5ac - 8bc + 2cc$
 dans les mêmes rangs cor-
 respondans, & on tirera une ligne au dessous. 2°. On fera
 l'addition de chaque rang, comme dans les grandeurs in-
 complexes, & comme dans les nombres, & l'on écrira la
 somme de chaque rang sous la ligne dans le rang correspon-
 dant, avec le signe qui lui convient, & l'on aura la som-
 me D .

Pour ajouter les gran- $E \quad 3aa - 2ab + cd$
 deurs complexes B, F, G , $F - 5aa + 12ab - cc$
 qui contiennent quelques $G + 7aa - 10ab - dd$
 grandeurs semblables avec
 des dissemblables, 1°, on $H + 5aa \quad 0 + cd - cc - dd$
 écrira dans les rangs cor-
 respondans les grandeurs semblables, & ensuite les grandeurs
 dissemblables qu'on n'a mises dans un même rang que pour
 garder l'uniformité. On tirera ensuite une ligne au dessous.
 2°. On écrira sous la ligne la somme de chaque rang des
 grandeurs semblables dans les rangs correspondans, & on y
 joindra dans la même ligne les grandeurs dissemblables les
 joignant ensemble avec leurs signes, & l'on aura la som-
 me H . L'on peut remarquer que la somme du second rang
 étant zero, on peut écrire 0 dans la somme; mais d'ordi-
 naire on ne l'écrit pas, parceque cela est inutile, zero dans
 un rang ne servant pas ici à faire valoir les grandeurs des
 autres rangs, comme dans les nombres.

Pour ajouter des grandeurs complexes toutes dissemblables,
 il faut simplement les joindre les unes aux autres dans une
 même ligne avec leurs si-
 gnes, & ce sera la somme
 qu'on cherche. Ainsi M est
 la somme des deux gran-
 deurs complexes K & L .

$$K \quad 3a - 2b + c$$

$$L \quad 4d + 2e - f$$

$$M \quad 3a - 2b + c + 4d + 2e - f$$

La démonstration de l'addition des grandeurs litterales est
 évidente par les articles 26, 24, 28 & 29.

La Soustraction des grandeurs entières.

DEFINITION.

SOUSTRARE une grandeur d'une autre plus grande c'est retrancher la première de la seconde, & marquer le reste, qui est la différence de ces grandeurs.

SUPPOSITION.

ON suppose que l'on sçait ôter un nombre au dessous de dix de tout autre nombre plus grand, & en marquer le reste ou la différence.

La Soustraction des nombres entiers.

PROBLÈME IV.

68. **S**OUSTRARE un nombre entier tel qu'on voudra d'un autre nombre entier plus grand tel qu'on voudra, & en marquer la différence.

REGLE. 1°. Il faut écrire le moindre nombre sous le plus grand, les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, & ainsi de suite, & tirer une ligne au dessous. 2°. Il faut commencer par le rang des unités, & aller par ordre au rang des dizaines, puis au rang des centaines, & ainsi de suite, & ôter dans chaque rang le chiffre de dessous celui qui est sur lui, & marquer le reste sous la ligne dans la même rang. 3°. Quand le chiffre de dessous dans un rang surpasse celui de dessus, il faut ajouter une dizaine au chiffre de dessus, ôter le chiffre de dessous du chiffre de dessus augmenté d'une dizaine, & écrire le reste dans le même rang sous la ligne, & il faut ajouter la même dizaine qu'on a ajoutée au chiffre de dessus de ce rang, au chiffre de dessous qui est immédiatement plus à gauche que celui qu'on vient de soustraire: cette dizaine ne l'augmentera que d'un *, & continuer la soustraction. 4°. Quand dans un rang il y a zero dessus & dessous, comme aussi quand le nombre à ôter se trouve égal à celui de dessus, il faut écrire zero pour le reste, afin de conserver les rangs des chiffres qui sont vers la gauche. Ceci s'éclaircira par l'exemple suivant.

E X E M P L E.

 $A \ 84063017$ $B \ 609345043$ $C \ 130716014$ Reste ou
différence.

Pour ôter le nombre B du nombre A , 1°. il faut écrire le nombre B sous le nombre A , les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, & ainsi de suite, & tirer une ligne au dessous. 2°. Il faut commencer par le rang des unités, & dire $7 - 3 = 4$, il faut écrire 4 dans la différence au rang des unités; & dire au rang des dizaines $0 - 4 = 1$, il faut écrire 1 au second rang de la différence; & dire au troisième rang $0 - 0 = 0$, il faut écrire 0 au troisième rang, pour marquer le rang des chiffres qui seront vers la gauche; puis dire au quatrième rang, on ne peut pas ôter 5 de 1, ainsi il faut ajouter 10 à 1, & dire $11 - 5 = 6$; il faut écrire 6 dans le quatrième rang; & à cause de la dizaine ajoutée à 1 du quatrième rang, il faut ajouter 1 au chiffre 4 de dessous du cinquième rang, qui vaudra à présent 5 à cause de cette unité ajoutée, laquelle vaut une dizaine au quatrième rang, & seulement un au cinquième rang.

Continuant la soustraction, on dira au cinquième rang $6 - 5 = 1$, il faut écrire 1 au cinquième rang dans la différence, & passer au sixième rang où 0, qui est le chiffre de dessus, étant moindre que 3 qui est au dessous, il faut ajouter 10 à 0, & dire $10 - 3 = 7$, il faut écrire 7 dans le reste au sixième rang, & ajouter 1 au chiffre de dessous du septième qui est 9, ce qui le fera valoir 10 cela se fait à cause de la dizaine ajoutée au chiffre de dessus du sixième rang. Il faut passer au septième rang, & ajouter une dizaine à 0 qui est le chiffre de dessus, ce qui le fera valoir 10, & dire $10 - 10 = 0$, il faut écrire 0 dans le reste au septième rang, & ajouter 1 à 0 chiffre de dessous du huitième rang, à cause de la dizaine ajoutée au chiffre de dessus du septième rang. Cette unité ajoutée à 0 le fera valoir 1. On dira après cela au huitième rang $4 - 1 = 3$, il faut écrire 3 dans le reste au huitième rang. Enfin on passera au neuvième rang, où l'on dira $8 - 6 = 2$, il faut écrire 2 dans le reste au neuvième rang, & ce rang étant le dernier, la soustraction est achevée, & le nombre C est la différence des deux nombres A & B qu'il falloit trouver,

Démonstration. Il est évident par l'opération faite par parties que le nombre *C* contient exactement les unitéz, les dizaines, &c. qui restent après avoir retranché les unitéz du nombre *B* des unitéz du nombre *A*, les dizaines de *B* des dizaines de *A*, &c. &c. que *C* est par conséquent le nombre qui reste après avoir ôté le nombre *B* du nombre *A*.

REMARQUES.

1.

Si l'on avoit plusieurs nombres à ôter de plusieurs autres nombres, il faudroit ajouter les premiers dans une somme, &c. les seconds dans une autre somme, &c. ôter la première somme de la seconde, &c. le reste seroit celui que l'on cherche.

2.

69. Il faut quelquefois soustraire un nombre d'un autre plus petit; cela arrive dans le Commerce où les dettes se trouvent quelquefois surpasser le bien, &c. dans plusieurs calculs mathématiques; dans ce cas il faut ôter le moindre nombre du plus grand, &c. marquer le signe — devant le reste, pour faire voir que c'est une grandeur négative.

3.

70. Les démonstrations de l'addition &c. de la soustraction font voir évidemment que les Regles que l'on a données pour ces opérations, sont trouver les nombres que l'on cherche, pourvu qu'on ait exactement suivi ces Regles. Mais il peut arriver dans la pratique que l'on se trompe, &c. que sans y penser l'on prenne un nombre pour un autre, c'est à dire qu'on n'observe pas exactement les regles. Pour s'assurer que dans la pratique l'on a suivi les Regles, l'on peut se servir des deux moyens suivans qu'on nommera *les preuves* de l'addition &c. de la soustraction, pour les distinguer des démonstrations.

Le premier moyen est de réitérer le calcul plusieurs fois &c. de différentes manieres. quand cela se peut; si l'on trouve toujours la même grandeur, on est moralement assuré que l'on ne s'est pas trompé. Ce moyen de s'assurer de l'exactitude d'un calcul peut servir pour tous les calculs qu'on enseignera dans cet Ouvrage.

Le second moyen propre à l'addition & à la soustraction est de se servir de la soustraction pour s'assurer qu'on a bien fait l'addition ; & de se servir de l'addition pour s'assurer qu'on a bien fait la soustraction.

Par exemple, pour s'assurer que le nombre D est la somme des trois nombres A, B, C , il faut soustraire les trois nombres A, B, C , de leur somme D ; & s'il ne reste rien, c'est une marque que D est la somme de ces trois nombres. S'il restoit quelque chose, ce seroit une marque qu'on se seroit trompé; il faudroit dans ce cas recommencer l'addition.

$$\begin{array}{r} A \ 940213 \\ B \ 870412 \\ C \ 730274 \\ \hline D \ 2600939 \end{array}$$

On peut soustraire les trois nombres A, B, C de la somme D , de la manière suivante, où il ne faut rien écrire. On commence par le dernier rang le plus à gauche, & l'on dit $9 \leftarrow 8 \leftarrow 7 = 24$; or 26 de la somme D , $- 24 = 2$, ainsi il reste 2 de 26. Il faut imaginer 2 au lieu de 6 dans le sixième rang de la somme.

Il faut passer au cinquième rang, & dire $4 \leftarrow 7 \leftarrow 9 = 20$, or 20 de la somme D , $- 20 = 0$; ainsi il ne reste que 0 dans le cinquième rang de la somme. Dans le quatrième rang il faut dire $0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 = 0$, or 0 de la somme D , $- 0 = 0$. Ainsi il ne doit rester dans le quatrième rang de la somme D que 0. Dans le troisième rang on dira $2 \leftarrow 4 \leftarrow 2 = 8$. Or 9 de la somme D , $- 8 = 1$, ainsi il faut imaginer 1 au lieu de 9 dans le troisième rang de la somme D .

On dira dans le second rang $5 \leftarrow 1 \leftarrow 7 = 13$. Or 13 de la somme D , $- 13 = 0$; ainsi il doit rester 0 dans le second rang de la somme, où il faut imaginer 0 au lieu de 3.

Enfin on dira dans le premier rang $3 \leftarrow 2 \leftarrow 4 = 9$. Or 9 de la somme D , $- 9 = 0$.

Les nombres A, B, C étant soustraits de la somme D , il ne reste rien: D est donc la somme de ces trois nombres.

Dans la soustraction, pour s'assurer que (C) est ce qui reste, après avoir ôté le nombre B du nombre A , il faut ajouter le reste C avec le nombre B , & la somme doit être exactement le nombre A . Cette addition se fait de la ma-

$$\begin{array}{r} A \ 840061017 \\ B \ 609341043 \\ \hline C \ 230716014 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Reste on} \\ \text{distraire.} \end{array}$$

nière suivante sans rien écrire. On commence par le premier rang, & l'on dit $4 + 3 = 7$ du nombre A . On dira dans le second rang $1 + 4 = 5$ du nombre A . Dans le troisième rang $0 + 0 = 0$ du nombre A . Dans le quatrième rang $6 + 5 = 11$, on prendra 1 du quatrième rang du nombre A pour l'unité de 11, & on retiendra la dizaine de 11 pour l'ajouter dans le cinquième rang où l'on dira $1 + 1 + 4 = 6$ du cinquième rang de A . On dira dans le sixième rang $7 + 3 = 10$, on prendra 0 du sixième rang de A pour 0 de 10, & on retiendra la dizaine de 10 pour l'ajouter au septième rang où l'on dira $1 + 0 + 9 = 10$: on prendra 0 du septième rang de A pour 0 de 10, & on retiendra la dizaine de 10 pour l'ajouter au huitième rang, où l'on dira $1 + 3 + 0 = 4$ du huitième rang de A . Enfin on dira au dernier rang $2 + 6 = 8$ du dernier rang de A .

D'où l'on voit que la somme du reste C & du nombre B étant égale au nombre A , le nombre C est la différence des nombres A & B .

Exemple de la Soustraction des nombres qui contiennent des parties décimales.

- QUAND l'un des deux nombres donnez de la Soustraction contient des parties décimales plus petites que l'autre, il faut réduire cet autre aux moindres parties décimales du premier * en lui ajoutant des zeros, ce qui n'en change point la valeur. Il faut ensuite écrire le plus petit nombre au dessous du plus grand, de manière que les mêmes especes décimales soient les unes sous les autres dans un même rang, & que les nombres entiers soient disposez, les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, &c. Enfin il faut faire la soustraction de la même manière que dans les nombres entiers, comme on le voit dans cet exemple, où l'on trouve en étant le nombre B du nombre D , que le nombre F est le reste.

$$\begin{array}{r} D \ 351,034700^{\text{re}} \\ B \ 239,142583 \\ \hline F \ 111,891117^{\text{re}} \end{array}$$

La démonstration est semblable à celle des nombres entiers.

Exemple

Exemple de la Soustraction des nombres de différentes especes.

POUR ôter un nombre *B*, qui contient différentes especes, d'un plus grand *A*, qui contient aussi différentes especes, il faut écrire le moindre *B* sous le plus grand *A*, de manière que les especes correspondantes soient dans le même rang les unes sous les autres, tirer une ligne au dessous, & commencer la Soustraction par le rang de la moindre espece, en disant 9 lignes surpassant 8 lignes, il faut ajouter 1 ponce ou 12 lignes à 8 lignes, ce qui les fera valoir 20 lignes; & l'on dira ensuite 20 lignes — 9 lignes = 11 lignes; il faut écrire 11 lignes dans le reste *C* au rang des lignes : il faut, à cause des 12 lignes ajoutées à 8 lignes, ajouter 1 ponce à 6 ponces du nombre *B*, ce qui fera 7 ponces.

Mais 7 ponces surpassant 4 ponces, il faut ajouter 1 pied ou 12 ponces à 4 ponces, ce qui fera 16 ponces, & dire 16 ponces — 7 ponces = 9 ponces, il faut écrire 9 ponces dans le reste, & ajouter 1 pied à 5 pieds du nombre *B*, ce qui fera 6 pieds, & cela à cause de 1 pied ajouté à 4 ponces du nombre *A*.

Mais 6 pieds surpassant 3 pieds, il faut ajouter 1 toise ou 6 pieds à 3 pieds, ce qui fera 9 pieds, & dire 9 pieds — 6 pieds = 3 pieds; il faut écrire 3 piols dans le reste, & ajouter 1 toise à 5 toises de *B*, à cause de la toise ajoutée à 3 piols. Ainsi au lieu de 5 toises il faut concevoir 6 toises, & achever la Soustraction des toises entieres, comme dans la Soustraction des nombres entiers, & l'on trouvera le reste *C*.

La démonstration est semblable à celle des nombres entiers.

La Soustraction des grandeurs entieres litterales.

PROBLÈME.

71. **ÔTER** les grandeurs litterales données complexes ou incomplètes d'autres grandeurs litterales données complexes ou incomplètes, & marquer la difference.

REGLE ou operation. Il faut changer les signes * des grandeurs à soustraire, & ensuite les ajouter * par les regles de

L'Addition des grandeurs littérales entières, aux grandeurs dont il faut les retrancher, & dont on n'aura point changé les signes, & la somme de cette Addition fera la différence.

E X E M P L E S.

Pour ôter $-3ab$ de $+4ab$, il faut changer le signe de $-3ab$, & l'on aura $+3ab$. Il faut ensuite ajouter $+3ab$ à $+4ab$, & l'on aura la différence $+7ab$.

Pour ôter $+3ab$ de $+4ab$, il faut changer le signe de $+3ab$, & l'on aura $-3ab$. Il faut ensuite ajouter $-3ab$ à $+4ab$, & l'on aura la différence $+ab$.

Pour ôter $-4ac$ de $+7ab$, il faut écrire $7ab + 4ac$.

Pour soustraire la grandeur complexe $5xx - 3ax - 3aa$ de $4xx - 5ax + ab$, il faut changer les signes de la première, & faire ensuite l'addition comme elle est ici marquée, & l'on trouvera la différence

$$\begin{array}{r} 4xx - 5ax + ab \\ - 5xx + 3ax + 3aa \\ \hline - xx - 2ax + ab + 3aa \end{array}$$

Ces exemples suffisent pour faire clairement concevoir la règle : les Commensans pour-

tant en faire tant d'exemples qu'ils voudront.

La démonstration est évidente par l'article 27.

S E C T I O N III.

Où l'on explique la Multiplication des grandeurs entières.

D E F I N I T I O N.

DEUX nombres étant donnez comme 3 & 4, si l'on dit 3 fois 4, cela fait 12, c'est ce qu'on appelle multiplier 4 par 3.

Le nombre 12 qui vient de la multiplication de 4 par 3, s'appelle le produit; le nombre 4, le multiplié; le nombre 3, le multiplicateur ou bien le multipliant. Les nombres 3 & 4, qui étant multipliez l'un par l'autre font le produit 12, s'appellent les côtés du produit, & encore les dimensions ou les multiplicateurs du produit. On se sert de cette marque \times pour représenter en abrégé qu'une grandeur est multipliée par une autres ainsi $4 \times 3 = 12$, signifie en abrégé que 4 mul-

multiplié par 3 fait 12, ou que 3 fois 4 c'est 12. De même $b \times a$ marque que la grandeur représentée par b est multipliée par la grandeur représentée par a . Ainsi 4×3 marque le produit de 4 multiplié par 3. De même $b \times a$ marque le produit de la grandeur b multipliée par a .

Définition générale de la Multiplication par rapport à toutes sortes de grandeurs. Il faut se la rendre très familière.

72. **MULTIPLIER** une grandeur quelconque qu'on représentera par b , par une autre grandeur quelconque a , c'est trouver une grandeur qu'on nommera c , qui soit à la grandeur multipliée b , comme la grandeur multipliant a est à l'unité.

D'où l'on voit qu'il y a une proportion dans toute multiplication, dont le premier terme est l'unité, le second terme est le multiplicateur, le troisième terme est le multiplié, & le quatrième terme est le produit. Cette proportion se peut exprimer ainsi $1. a :: b. c$, ou $\frac{1}{a} = \frac{b}{c}$. Les trois premiers termes $1, a, b$, de cette proportion font donner, & la multiplication fait trouver le quatrième c , qu'on peut représenter par $b \times a$.

COROLLAIRE I.

73. IL suit de-là qu'il est indifférent de prendre le multiplié pour le multiplicateur, & le multiplicateur pour le multiplié; c'est à dire, que le produit de b multiplié par a est la même grandeur que le produit de a multiplié par b ; car dans le premier cas, on a la proportion $1. a :: b. c$, & dans le second cas, on a son alterne * $1. b :: a. c$; & dans l'une & dans l'autre les trois premiers termes étant déterminés, le quatrième est * toujours la même grandeur. Ainsi $a \times b = b \times a$. *62. *54.

COROLLAIRE II.

74. IL suit aussi de la définition de la Multiplication, que quand le multiplicateur surpasse l'unité, le produit surpasse le multiplié; & que quand le multiplicateur est moindre que l'unité, le produit est moindre que le multiplié.

COROLLAIRE III.

75. QUAND deux grandeurs a & b sont multipliées séparément par une même grandeur, c'est à dire par le même

multiplieur qu'on nommera m , les deux produits qui en viennent qu'on peut représenter, le premier par $m \times a$, le second par $m \times b$, ont le même rapport que les deux grandeurs a & b .

Il faut démontrer que $a : b :: m \times a : m \times b$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{m \times a}{m \times b}$.

Démonstration. Dans la multiplication de a par m , l'unité est au multiplicateur m , comme le multiplié a est au produit $m \times a$. Par l'article 72, ainsi $1 : m :: a : m \times a$. Par la même raison dans la multiplication de b par m , l'unité est au multiplicateur m , comme le multiplié b est au produit $m \times b$. Ainsi $1 : m :: b : m \times b$.

- Donc le rapport de a à $m \times a$, & celui de b à $m \times b$,
 • 51. étant égaux au rapport de 1 à m , ils sont égaux entr'eux. Ainsi $a : m \times a :: b : m \times b$; donc, l'on aura aussi la proportion
 • 61. alterne $a : b :: m \times a : m \times b$, ou bien $\frac{a}{b} = \frac{m \times a}{m \times b}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AVERTISSEMENT.

Ce troisième Corollaire est d'un si grand usage dans ce traité, & dans toutes les Mathématiques, que les Commengans ne sçauroient se le rendre trop familier.

COROLLAIRE IV.

76. IL suit du troisième Corollaire que deux grandeurs égales, comme par exemple $a \times b$, & $b \times a$, étant multipliées séparément par une même grandeur m , ou ce qui revient au même, par des grandeurs égales, les produits $m \times a \times b$, &
 • 75. $m \times b \times a$ sont égaux. Car $\frac{a \times b}{b \times a} = \frac{m \times a \times b}{m \times b \times a}$. Mais les deux termes du premier de ces rapports sont égaux; les deux termes du second rapport sont donc égaux.

Application de la définition générale à la multiplication des nombres entiers.

77. MULTIPLIER un nombre entier donné par un autre nombre entier donné, c'est trouver un troisième nombre qui contienne le nombre multiplié autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Ainsi multiplier 4 par 3, c'est trouver 12, qui contient autant de fois 4 que 3 contient 1,

- * 62. & l'on a cette proportion $1. 3 :: 4. 12$, & par conséquent * son alterne $1. 4 :: 3. 12$.

D'où l'on voit que la multiplication d'un nombre entier comme 4, par un autre nombre entier comme 3, est l'addition du multiplié 4 répétée autant de fois que l'unité est contenue dans le multiplicateur 3, car $1. 3 :: 4. 4 \rightarrow 4 \rightarrow 4 = 12$.

SUPPOSITION OU DEMANDE.

Table de la Multiplication.

78. **O**N suppose qu'on sçait les produits des neuf chiffres 1, 2, 3, &c. multipliez les uns par les autres. On a mis ici la table qui contient tous ces produits pour les Commengans. La manière de s'en servir est de prendre le chiffre qui sert de multiplicateur dans la première colonne à gauche. Par exemple, si on veut multiplier 8 par 7, il faut prendre 7 dans la cellule *a* de la première colonne. Il faut ensuite choisir la colonne au haut de laquelle se trouve le multiplié qui est ici 8; & la cellule *c* de cette colonne, qui se trouve vis-à-vis du multiplicateur 7, contient le produit 56 de 8 multiplié par 7. Il en est de même des autres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

AVERTISSEMENT.

LES Commengans doivent apprendre par cœur cette table & se la rendre très familière, s'ils veulent pratiquer facilement la Multiplication & la Division des nombres entiers; car les difficultés qu'ils pourroient trouver dans la pratique de l'une & de l'autre, ne viendront que de ce qu'ils n'auroient pas cette table assez familière.

La Multiplication des nombres entiers.

PROBLÈME.

79. **M**ULTIPLIER un nombre entier quelconque qu'on nommera *b*, par un autre nombre entier qu'on appellera *a*, & en trouver le produit, qu'on marquera par *c*.

REGLE ou opération. 1°. Il faut écrire le multiplicateur *a* sous le nombre à multiplier *b*, observant d'écrire les unités de *a* sous les unités de *b*, les dizaines de *a* sous les dizaines de *b*, &c. ainsi de suite. Il faut tirer une ligne au dessous.

38063	b
1042	a
<hr/>	
76126	d
152112	e
.....0	f
190315	g
<hr/>	
191913646	c

- *73. Comme il est indifférent * de prendre le multiplié pour le multiplicateur, &c. le multiplicateur pour le multiplié, il faut écrire, pour la facilité du calcul, le plus grand des deux nombres donnez le premier, &c. le moindre nombre au dessous, il sera le multiplicateur : néanmoins quand le plus petit des deux nombres donnez contient les plus grands chiffres comme, 9, 8, 7, 6, &c. que le plus grand ne contient que les moindres chiffres 1, 2, 3, 4, 5, ou qu'il contient plusieurs zeros, il faut écrire, pour la facilité du calcul, le plus petit nombre le premier, &c. écrire au dessous le plus grand qu'on prendra pour le multiplicateur.

2°. Il faut multiplier les unités, les dizaines, les centaines, &c. du nombre à multiplier *b* par les chiffres des unités du multiplicateur *a*, &c. en écrire le produit *d* sous la ligne, en mettant les unités du produit *d* au rang des unités, les dizaines de ce produit au rang des dizaines, &c. ainsi de suite.

3°. Il faut de même multiplier le nombre *b* par le chiffre des dizaines du multiplicateur *a*; mais il faut ne commencer à écrire le premier chiffre à droite, du produit *e* qui en viendra, qu'au rang des dizaines.

4°. Il faut multiplier de la même manière le nombre *b* successivement par les chiffres des centaines, des mille, des dizaines de mille, &c. du multiplicateur *a*, en commençant d'écrire le premier chiffre à droite de chacun des produits *f*, *g*, &c. qui viendront de ces multiplications, au rang du chiffre qui sert de multiplicateur à chacun de ces produits; c'est à dire, le premier chiffre du produit *f*, du nombre *b* multiplié par le chiffre des centaines, ne doit s'écrire qu'au troisième rang, qui est le rang des centaines : de même le premier chiffre du produit *g* du nombre *b* multiplié par le chiffre des mille du multiplicateur *a*, ne doit s'écrire qu'au quatrième rang qui est celui des mille, &c. ainsi de suite.

Quand il y a un zero dans le multiplicateur *a*, il suffit

d'écrire un zero pour le produit particulier du nombre b multiplié par zero, & il faut écrire ce zero au même rang où se trouve le zero du multiplicateur, c'est à dire au troisième rang, si le zero du multiplicateur est au troisième rang. Et s'il y avoit plusieurs zeros au multiplicateur, il suffiroit d'écrire autant de zeros aux rangs qui leur conviennent pour le produit de chacun de ces zeros multipliant le nombre b .

5°. Enfin il faut tirer une ligne au dessous des produits particuliers qu'on vient de trouver; ajouter tous ces produits particuliers, & en écrire la somme c au dessous de la ligne qu'on vient de tirer. Cette somme c sera le produit du nombre b multiplié par le nombre a .

Ce qu'on vient de prescrire s'éclaircira par les exemples.

EXEMPLE I.

POUR multiplier 38063 par 5042, 1°. j'écris le premier nombre b , & au dessous le second a , les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, &c. & je tire une ligne.

38063	b
5042	a
<hr/>	
76126	d
151252	e
00000	f
190315	g
<hr/>	
191913646	c

2°. Je multiplie le nombre b par le chiffre 2 des unités du multiplicateur a , en disant 2 fois 3 font 6, j'écris 6 sous la ligne au rang des unités; & je dis ensuite 2 fois 6 font 12, j'écris 2 sous la ligne au rang des dizaines, & je retiens 1 pour le rang suivant; puis je dis 2 fois 0 = 0; (car 0 ou rien multiplié tant de fois qu'on voudra n'est que zero ou rien) j'écris 1 que j'avois retenu au rang des centaines du produit d ; & je dis 2 fois 8 = 16, j'écris 6 au quatrième rang du produit d , & je retiens 1; enfin je dis 2 fois 3 font 6 & 1 que je retenois font 7, j'écris 7 au cinquième rang, & le nombre d est le produit particulier du nombre b multiplié par le chiffre 2 des unités du multiplicateur a .

3°. Je multiplie le nombre b par le chiffre 4 des dizaines du multiplicateur a , en disant $4 \times 3 = 12$, j'écris 2 au produit e au rang des dizaines; parceque le multiplicateur 4 vaut des dizaines, & je retiens 1 pour le rang suivant. Puis je dis $4 \times 6 = 24$, 24 & 1 que je retenois font 25, j'écris 5 au produit e , & je retiens 2. Et je dis $4 \times 0 = 0$; 0 & 2 que je retenois font 2, j'écris 2 au produit e . Je dis ensuite 4×8

$\equiv 32$, j'écris 2 au produit e , & je retiens 3. Enfin je dis $4 \times 3 = 12$; 12 & 3 que je retenois font 15, j'écris 15 au produit e , & le nombre e est le produit du nombre b multiplié par le chiffre 4 des dizaines du multiplicateur a .

4°. Je multiplie le nombre b par le chiffre des centaines ou du troisième rang du multiplicateur a ; mais 0 se trouvant dans ce troisième rang, & le produit d'un nombre multiplié par 0 ou rien, étant 0 ou rien, il faut écrire un zero au troisième rang sous les produits précédens pour occuper le troisième rang, & pour faire souvenir qu'il faudra écrire le premier chiffre du produit suivant au quatrième rang.

Je passe donc à la multiplication du nombre b par le chiffre 5 du quatrième rang du multiplicateur a , & je dis $5 \times 3 = 15$, j'écris 5 au quatrième rang du produit g , & je retiens 1; puis je dis $5 \times 6 = 30$, $30 + 1$ que je retenois $= 31$, j'écris 1 dans le produit g , & je retiens 3 pour le rang suivant, & je dis $5 \times 0 = 0$; $0 + 3 = 3$, j'écris 3 au produit g , & je dis $5 \times 8 = 40$, j'écris 0 au produit g , & je retiens 4, je dis enfin $5 \times 3 = 15$, & $15 + 4 = 19$, j'écris 19 au produit g , & le nombre g est le produit du nombre b multiplié par le chiffre 5 du quatrième rang du multiplicateur a .

5°. Enfin je tire une ligne sous les produits que je viens de trouver, & je fais l'addition de tous ces produits particuliers $d + e + f + g$, & leur somme c est le produit total du nombre b multiplié par le multiplicateur a .

EXEMPLE II.

POUR multiplier les nombres a & b l'un par l'autre; & pour en trouver le produit, j'écris le nombre b le premier, quoiqu'il soit le plus petit, & j'écris au dessous le nombre a que je prens pour le multiplicateur, parceque le nombre a contenant plusieurs zeros & les moindres chiffres, la multiplication en sera plus facile à faire. Je tire une ligne, & je fais ensuite la multiplication du nombre b successivement par les chiffres des unités, des dizaines, &c. du multiplicateur a , comme dans l'exemple précédent, & j'écris les produits de toutes ces multiplications particulières, comme on le voit dans le second exemple. Je tire une ligne au dessous;

$$\begin{array}{r}
 9687 \text{ b} \\
 30201 \text{ a} \\
 \hline
 9687 \\
 193740 \\
 290610 \\
 \hline
 292517087 \text{ c}
 \end{array}$$

je fais l'addition de tous les produits particuliers , & j'en écris la somme *c* sous la ligne que je viens de tirer , & cette somme *c* est le produit total qui vient de la multiplication du nombre *b* par le nombre *a*.

La manière d'abréger la multiplication dans un cas qui est de grand usage.

80. QUAND l'un des deux nombres donnez à multiplier l'un par l'autre , ne contient que l'unité précédée d'un ou de plusieurs zeros, comme 10, 100, 1000, 10000, &c. il faut prendre ce nombre 10, 100, &c. pour le multiplicateur , & écrire simplement devant l'autre, le nombre des zeros du multiplicateur , & il deviendra par là le produit que l'on cherche . Ainsi pour multiplier 379 par 10 , il faut écrire 3790 pour le produit . Pour multiplier le même nombre 379 par 100 , par 1000 , par 10000, &c. il faut écrire pour le produit 37900, 379000, 3790000, &c. En voici la raison . Multiplier un nombre par 10, par 100, par 1000, &c. c'est trouver le nombre qui le contient 10 fois, 100 fois, &c. ou ce qui revient au même ; c'est trouver le nombre qui vaut 10 fois plus, 100 fois plus, 1000 fois plus, &c. que le nombre proposé . Or * en mettant ¹¹ 0 devant le nombre proposé 379 , on le fait valoir 10 fois plus qu'il ne valoit ; en mettant 00, on le fait valoir 100 fois plus ; en mettant 000, on le fait valoir 1000 fois plus, &c. Par conséquent en écrivant 0, 00, 000, &c. devant un nombre donné , on le multiplie par 10, par 100, &c.

COROLLAIRE I.

81. DANS la multiplication d'un chiffre du multiplié *b* par un chiffre du multiplicateur *a*, il y a devant leur produit autant de rangs, qu'il y en a ensemble devant le chiffre multipliant, & devant le chiffre multiplié.

Par exemple , quand on multiplie un chiffre 3 1000
qui est au quatrième rang , & qui a trois rangs 100
devant lui , par un chiffre 2 qui est au troisième rang , & qui a deux rangs devant lui ; il y 600000
a devant leur produit 6, trois rangs plus deux rangs , c'est à dire cinq rangs , & ce produit est au sixième rang.

H

Cela est évident ; car multiplier 3000 par 100, est la même chose que de multiplier 3000 par 100, moitié de 100, puis de multiplier encore 3000 par 100, &c d'ajouter ensuite en une somme les deux produits qui sont chacun 300000 ; &c cette somme est le produit de 3000 par 100.

$$\begin{array}{r} 3000 \\ 100 \\ \hline 300000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3000 \\ 100 \\ \hline 300000 \end{array}$$

Or par l'article 80, dans chacun des produits de 3000 multiplié par

$$\begin{array}{r} 300000 \\ 300000 \\ \hline 600000 \end{array}$$

100, qui est 300000, il y a cinq rangs devant le produit 3 fait de 3 multiplié par 1 ; &c dans la somme 600000 de ces deux produits, il y a le même nombre de rangs, c'est à dire cinq rangs devant 6, qui est le produit de 3 par 2. Donc, &c.

COROLLAIRE II

81. **L**e Corollaire précédent fournit une manière d'abréger la multiplication, quand le multiplié b &c le multiplicateur a sont des nombres qui contiennent chacun plusieurs zeros au devant des chiffres. Car pour multiplier b 530000 par a 24000, il suffit de multiplier 53 par 24, &c d'ajouter à leur produit 1272 autant de zeros qu'il y en a devant les deux nombres 53 & 24, c'est à dire sept zeros, &c 12720000000 sera le produit du nombre b multiplié par le nombre a .

Démonstration du Problème.

81. **I**l est évident par le premier Corollaire * &c par l'opération même, qu'en suivant ce qui est prescrit dans la règle de la multiplication *, le nombre c contient le multiplié b autant de fois que l'unité est contenue dans les chiffres des unités, des dizaines, des centaines, &c du multiplicateur a , c'est à dire autant de fois que l'unité est contenue dans le multiplicateur a . Donc le nombre c , que fait découvrir la Règle * de la multiplication, est ** le produit du nombre b par le nombre a . Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

83. **S**i l'on avoit plus de deux nombres entiers à multiplier les uns par les autres, il faudroit d'abord multiplier les deux premiers l'un par l'autre, &c multiplier ensuite le produit des

deux premiers par le troisième, puis le produit des trois premiers par le quatrième, & ainsi de suite; & le dernier produit qu'on trouveroit, seroit le produit de tous les nombres donnez les uns par les autres.

La multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales.

84. **L**A multiplication de deux nombres b & a , qui contiennent des parties décimales, se fait comme la multiplication de deux nombres entiers. Il faut écrire ces nombres b & a l'un sous l'autre comme s'ils étoient entiers; il faut ensuite multiplier le nombre b par le nombre a , comme dans les nombres entiers, & en écrire le produit c . La seule Règle particulière à la multiplication de ces nombres, est que pour distinguer, dans le produit, les parties décimales d'avec les entiers, il faut mettre autant de rangs dans le produit c , pour les parties décimales, qu'il y en a dans les nombres b & a pris ensemble. Par exemple, si l y a trois rangs de parties décimales dans b , & deux rangs dans a , ce qui fait ensemble cinq rangs; il faut mettre dans le produit c le point qui distingue les parties décimales avant le cinquième rang, de façon qu'il y ait cinq rangs de parties décimales dans le produit c .

Il y a plusieurs cas de la multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales, dans lesquels le produit ne contient que des parties décimales sans entiers, comme on le voit dans le second

II. EXEMPLE. III. EXEMPLE.

$$\begin{array}{r}
 4.0942 \\
 0.0231 \\
 \hline
 4.0942 \\
 81884 \\
 \hline
 81884 \\
 0.09417602^{VIII}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 0.00314 \\
 0.000032 \\
 \hline
 648 \\
 972 \\
 \hline
 0.00000103688
 \end{array}$$

& dans le troisième exemple. Dans ce cas, la multiplication se fait de la même manière que dans le premier exemple, il faut seulement avoir soin de bien distinguer par des zéros les rangs des parties décimales, & de mettre le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers à la gauche au devant

de tous ces rangs, & un zero plus à gauche que n'est ce point, pour distinguer la place des entiers, & mettre ce point dans le produit de façon qu'il y ait autant de rangs vers la droite après le point, qu'il y a de rangs de parties décimales dans le multiplicateur & dans le multiplié pris ensemble; c'est à dire, il doit y avoir huit rangs après le point vers la droite dans le second exemple, & onze rangs dans le troisième exemple.

Démonstration de la multiplication des nombres qui contiennent des parties décimales.

85. ON se servira du premier exemple pour faire la démonstration, & on va démontrer l'EXEMPLE.

*84. que le produit c , trouvé par la règle *, est le véritable produit de b multiplié par a .
 Pour rendre la démonstration plus distincte, on nommera b le nombre entier 1234, & b le nombre décimal 1234. On nommera a le nombre entier 213, & a le nombre décimal 2.13. On appellera c le nombre entier 262842, & c le nombre décimal 2.62842.

$$\begin{array}{r}
 1234^{11} b \\
 \times 213^1 a \\
 \hline
 3702 \\
 2468 \\
 \hline
 262842^{12} c
 \end{array}$$

*79. 1°. Il est évident * que 262842 (c) est le produit des nombres entiers 1234 (b) & 213 (a) multipliés l'un par l'autre. Par conséquent * 262842 (c) = 213 × 1234 ($a \times b$.)

*79. Le produit de 2.234 (b) par 213 (a) peut être représenté par $a \times b$. Or * $\frac{2}{10} = \frac{2 \times b}{10}$. C'est à dire $\frac{2.234}{10} = \frac{2234 \times 213}{10}$.

*75. dans le premier rapport le second terme qui est le nombre décimal 1.234 (b) vaut * mille fois moins que le premier terme qui est le nombre entier 1234 (b .) Donc, dans le second rapport le produit $a \times b$, qui en est le second terme, doit valoir mille fois moins que le produit $a \times b$, qui est 262842 (c .) Or pour faire valoir 262842 mille fois moins qu'il ne vaut, il faut écrire * 262.482. Ainsi

*18. l'on a déjà démontré qu'en multipliant un nombre décimal 1.234 (b) par un nombre entier 213 (a), le produit 262.482, qui est représenté par $a \times b$, doit avoir autant de rangs de parties décimales, qu'en a le nombre décimal 2.13 multiplié, qui est 1.234 (b .)

2°. Le produit du nombre décimal 1.234 (b) multiplié par le nombre décimal 2.13 (a), peut être représenté par $a \times b$.

Or $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$: & dans le premier rapport le conséquent * 71.
 2. 13 (a) * vaut cent fois moins que l'antécédent 213 (a.) Donc * 18.
 le conséquent $a \times b$ du second rapport doit valoir cent fois
 moins que l'antécédent 262. 842 ($a \times b$.)

Mais pour faire valoir 262 842 ($a \times b$) cent fois moins qu'il
 ne vaut *, il faut reculer vers la gauche le point de deux * 18.
 rangs, & écrire 2. 62842 ($c = a \times b$.) Par conséquent 2. 62842
 (c) est le véritable produit du nombre décimal 1. 234. (b)
 multiplié par le nombre décimal 2. 13 (a.) Et l'on a démon-
 tré qu'il faut prendre dans le produit de deux nombres qui
 contiennent chacun des parties décimales, autant de rangs
 pour le parties décimales qu'il y en a dans les nombres multi-
 pliez l'un par l'autre pris ensemble.

*Usage de la multiplication pour les nombres de différentes
 especes.*

86. **D**ANS les nombres de différentes especes, la multiplication
 sert à réduire les plus grandes especes aux moindres. Cette
 réduction se fait en multipliant le nombre de l'espece qu'on
 veut réduire à une moindre par le nombre qui exprime com-
 bien de fois cette moindre espece est contenue dans la plus
 grande qu'on veut réduire à cette moindre espece, le pro-
 duit sera cette plus grande espece réduite à cette moindre
 espece.

Par exemple, pour réduire une longueur de 10 toises en
 pieds, il faut multiplier 10 toises par le nombre 6, qui expri-
 me combien de fois un pied est dans une toise, & le produit
 sera 60 pieds. Ainsi 10 toises valent 60 pieds.

Pour réduire 60 pieds en pouces, il faut multiplier 60 pieds
 par le nombre 12, qui exprime combien de fois un pouce est
 dans une toise, & le produit sera 720 pouces. Ainsi 60 pieds
 réduits en pouces valent 720 pouces.

Pour réduire 10 toises immédiatement en pouces, il faut
 multiplier 10 toises par le nombre 72 qui exprime combien de
 fois un pouce est dans une toise, & l'on aura le produit 720
 pouces pour la valeur de 10 toises réduites en pouces.

De même dans le Commerce, pour réduire un nombre des
 livres comme 10 livres, en sous; il faut multiplier 10 livres
 par 20, & le produit 200 sous sera la valeur de 10 livres ré-

duites en sous. Pour réduire immédiatement 10 livres en deniers, il faut multiplier 10 livres par le nombre 240, qui exprime combien de fois un denier est dans une livre; & le produit 2400 deniers sera la valeur de 10 livres réduites en deniers.

Cette réduction des plus grandes especes aux moindres est évidente par elle-même.

La Multiplication des nombres de différentes especes.

R È G L E G E N É R A L E :

- 87 **P**OUR multiplier un nombre b , qui contient différentes especes par un autre nombre a , qui contient aussi différentes especes, la regle generale est qu'il faut réduire l'un & l'autre chacun à sa moindre especes, & multiplier ensuite les deux nombres réduits aux moindres especes l'un par l'autre; le nombre qui viendra de cette multiplication sera le produit des deux nombres b & a réduits à la moindre especes. On réduira enfin ce produit aux plus grandes especes qu'il contient par le moyen de la Division, comme on l'enseignera dans la section où l'on expliquera la Division.

E X E M P L E.

SUPPOSE qu'on ait fait le prix d'une toise de maçonnerie à 20 liv. 5 sous 6 deniers; combien faut-il payer, pour 10 toises 3 pieds 6 pouces? Il est visible qu'il faut multiplier les 10 toises 3 pieds 6 pouces par 20 liv. 5 sols 6 deniers pour en savoir le prix. Selon la regle il faut réduire 20 livres 5 sous 6 deniers en deniers. & l'on trouvera 4866 deniers. Il faut aussi réduire en pouces les 10 toises 3 pieds 6 pouces, & l'on trouvera 762 pouces. Enfin il faut multiplier 762 pouces par 4866 deniers, & l'on trouvera pour le produit 3707892 deniers; c'est le prix de 10 toises 3 pieds 6 pouces. On apprendra dans la Division le moyen de trouver les livres, les sous & les deniers que contient ce produit.

Cet exemple suffit pour faire concevoir clairement la multiplication des nombres de différentes especes.

La Multiplication des grandeurs littérales.

DÉFINITION.

82. **P**OUR marquer que deux grandeurs littérales a & b sont multipliées l'une par l'autre, on les joint immédiatement. Ainsi ab marque le produit de b multipliée par a . De même abc marque le produit des trois grandeurs a, b, c multipliées les unes par les autres. $abcd$ marque le produit des quatre grandeurs a, b, c, d , multipliées les unes par les autres, &c ainsi des autres.

On peut aussi exprimer le produit de deux grandeurs a & b , en le servant de cette marque \times de la multiplication, &c le produit sera $a \times b$; mais dans le calcul littéral il est plus court de se servir de la première manière, &c l'on n'emploie d'ordinaire la marque \times dans la multiplication des grandeurs littérales, que quand les grandeurs sont complexes, &c encore ne s'en sert-on que quand l'on a besoin de distinguer les grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, qui se confondroient par la multiplication; &c quand on emploie la marque \times pour la multiplication des grandeurs complexes, on tire une ligne sur chacune des grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, de cette façon $\overline{ab} \times \overline{bc} \times \overline{ac} \times \overline{cd}$; ce qui signifie que la grandeur complexe $\overline{ab} \times \overline{bc}$, qui est sous la première ligne, est multipliée par la grandeur complexe $\overline{ac} \times \overline{cd}$ qui est sous la seconde ligne.

Quand il n'y a que deux grandeurs a & b multipliées l'une par l'autre, on dit que le produit ab est de deux dimensions, quelques uns le nomment aussi produit plan, ou simplement le plan des grandeurs a & b ; quand il y a trois grandeurs, on dit que le produit abc est de trois dimensions; quelques-uns nomment aussi le produit abc le solide des trois grandeurs a, b, c ; quand il y a quatre grandeurs, on dit que le produit $abcd$ est de quatre dimensions; &c ainsi à l'infini. On nomme aussi les grandeurs multipliées les unes par les autres les côtés, &c encore les dimensions ou les multiplicateurs du produit.

83. Quand les dimensions d'un produit sont égales, c'est à dire quand c'est la même grandeur qui est multipliée par elle-même, comme $aa, aaa, aaaa$, &c. on nomme le produit une

puissance de la grandeur a qui est multipliée par elle-même; & la grandeur a , qui est ainsi multipliée par elle-même, s'appelle la racine de cette puissance. aa est la seconde puissance de a ; aaa en est la troisième puissance; $aaaa$ la quatrième puissance, & ainsi de suite; a est aussi la racine deuxième de aa , la racine troisième de aaa ; & ainsi de suite.

Pour abréger, au lieu d'écrire dans chaque puissance d'une grandeur comme aa , aaa , $aaaa$, cette grandeur a autant de fois que la puissance a de dimensions égales, on écrit la grandeur a une seule fois, & l'on écrit au haut de cette grandeur vers la droite, en moindre caractère, le nombre qui exprime combien de fois cette puissance contient la lettre a , de cette manière a^2 , a^3 , a^4 , a^5 , &c. Ces nombres 2, 3, 4, 5, &c. écrits au haut de la grandeur a , s'appellent les exposants des puissances de la grandeur a . Ainsi a^2 est la seconde puissance de a ; a^3 en est la troisième puissance; a^4 la quatrième puissance; & ainsi à l'infini. Et la grandeur a est la racine deuxième de a^2 , la racine troisième de a^3 , &c. Une grandeur littérale, qui n'est multipliée par aucune autre; se nomme grandeur linéaire; ainsi a , b , $a + b$, &c. sont des grandeurs linéaires.

Néanmoins on ne laisse pas de nommer une grandeur linéaire a , la première puissance de cette grandeur, & on lui donne l'unité pour exposant, de cette manière a^1 ; ce qui signifie simplement a . On distingue aussi les puissances d'une grandeur par degrés; & l'on dit que a^1 est la puissance de a du premier degré; a^2 la puissance du second degré; a^3 la puissance de a du troisième degré; & ainsi de suite.

COROLLAIRE.

90. L'UNITÉ étant multipliée par elle-même, le produit est l'unité; * car $1 \cdot 1 = 1$. D'où l'on voit que toutes les puissances de l'unité sont toujours chacune l'unité.

REMARQUES.

I.

CES manières de marquer la multiplication des grandeurs littérales en les joignant ensemble, ou en mettant entre-deux le signe de la multiplication; comme, aussi la manière d'ex-
primer

primer les puissances des grandeurs par les nombres qui en font les exposans, sont des signes arbitraires : c'est pourquoi on les a fixez à cela par des définitions de nom, comme l'on a déterminé le signe $+$ pour marquer l'addition des grandeurs littérales comme dans $a + b$, le signe $-$ pour en marquer la soustraction ou le retranchement comme dans $a - b$. C'est de la même manière qu'on a déterminé les caractères des neuf chiffres à exprimer les nombres jusqu'à neuf, & qu'on a employé la disposition de ces chiffres en différens rangs successivement de droite à gauche, à faire valoir ces chiffres selon la progression $\dots 1. 10. 100. 1000.$ &c. Cela est causé que ces expressions n'ont pas besoin de démonstration. Cependant ces expressions servent à apprendre facilement toutes les Mathématiques, & à découvrir la résolution de leurs Problèmes d'une manière aisée, courte & générale.

2.

On doit remarquer que l'expression a^3 , par exemple, est bien différente de $3a$; car supposant $a = 3$, l'expression a^3 marque le produit $3 \times 3 \times 3 = 27$, & l'expression $3a$ marque la somme $3 + 3 + 3 = 9$.

COROLLAIRE I.

91. PUISQUE ab est le produit de b par a , l'on a cette proportion * 714
 $a :: b . ab$, & son alterne $1 . b :: a . ab$. Et généralement, en partageant un produit quelconque abc en deux parties a & bc , qui étant multipliées l'une par l'autre forment ce produit abc , l'on aura toujours cette proportion 1. $a :: bc . abc$, & son alterne 1. $bc :: a . abc$. * 714

COROLLAIRE II.

92. TOUTE grandeur a peut être regardée comme étant le produit de cette grandeur a par l'unité. C'est à dire, on peut regarder a comme égale à $1 \times a$; de même on peut considérer abc comme égale à $1 \times abc$. Car * 1. $1 :: a . 1 \times a$. De même * 714
 $1 . 1 :: abc . 1 \times abc$. Ce qu'on peut aisément appliquer à toutes les grandeurs.

THEOREME.

93. QUAND on multiplie plusieurs grandeurs comme $a, b, c,$ les unes par les autres, quelqu'ordre qu'on observe, le produit est toujours le même. C'est à dire les produits $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ sont des grandeurs égales; & de même tous les produits qu'on peut former de quatre grandeurs sont égaux; tous les produits qu'on peut faire de cinq grandeurs sont égaux; & ainsi à l'infini.

Préparation pour la démonstration. Une même grandeur a ne peut être prise qu'une fois. Deux grandeurs a & b peuvent recevoir des arrangements, ab, ba . Trois grandeurs a, b, c peuvent recevoir 3 fois 3 ou 6 arrangements; car chacune de trois étant mise dans le premier rang, les deux autres peuvent recevoir deux arrangements, ce qui fait 3 fois 3 ou 6 arrangements que voici: $abc, acb; bac, bca; cab, cba$. Quatre grandeurs a, b, c, d peuvent recevoir 4 fois 6 ou 24 arrangements: car chacune étant mise au premier rang, les trois autres peuvent recevoir six arrangements, ce qui en fait 4 fois 6 ou 24 que voici: $abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, cabd, cadb, cbad, cbda, dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$. D'où l'on voit clairement que cinq grandeurs pourroient recevoir 5 fois 24 ou 120 arrangements; six en pourroient recevoir 6 fois 120, ou 720; sept, 7 fois 720, &c. &c. & que pour trouver le nombre de ces arrangements, il n'y a qu'à prendre successivement les produits des nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. Par exemple, pour avoir le nombre des arrangements de sept grandeurs, il faut prendre le produit de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$. Et pourvu qu'on aille de suite, on marquera facilement tous ces arrangements.

Il faut, pour démontrer le Theorème, faire voir que les produits qui naissent de tous les arrangements de deux grandeurs littérales a & b , sont égaux; que tous ceux qui viennent de trois a, b, c sont égaux, & de même ceux qui viennent de quatre a, b, c, d &c.

L'on a déjà démontré (dans l'article 73) que les produits ab, ba sont égaux; on va démontrer l'égalité des six produits qui peuvent se former de trois grandeurs a, b, c , l'égalité des produits qui peuvent se former de quatre grandeurs a, b, c, d ; & ainsi à l'infini.

Démonstration du Théorème.

IL est évident que $a \times bc = a \times cb$ *; & de même $b \times ac = b \times ca$ *; & $c \times ab = c \times ba$ *. 71. & 76. 73.

Ainsi en démontrant que $abc = bca$, & $acb = cba$; on démontrera que les six produits sont égaux. En voici les démonstrations. 1°. $a \times bc = b \times ca$, & $a \times cb = c \times ba$. * 73.

2°. 1. $a :: bc$. $a \times bc$ *, donc l'on aura l'alterne 1. $bc :: a$. bc * 72. $\times a$. Or les trois premiers termes de ces deux proportions sont les mêmes, les quatrièmes sont donc aussi les mêmes *. Ainsi $abc = bca$. * 72. 54.

De même * 1. $a :: cb$. $a \times cb$; par conséquent l'on aura * 72. la proportion alterne 1. $cb :: a$. $cb \times a$. Les trois premiers termes sont les mêmes dans ces deux proportions: donc $acb = cba$. Cette 2^e démonstration n'est que la première plus étendue.

On a donc démontré que les six produits qu'on peut former des trois grandeurs a , b , c , sont égaux: voici la démonstration pour les produits qui peuvent être formés de quatre grandeurs, ensuite de cinq grandeurs, &c.

Parmi les 24 produits qu'on peut former des 4 grandeurs a , b , c , d , il est évident, par la démonstration précédente pour les produits des trois grandeurs, & par l'article 76, où l'on a démontré que les grandeurs égales étant multipliées par la même grandeur, les produits sont égaux; il est, de-jc, évident que les six produits dans lesquels chacune des lettres a , b , c , d occupe le premier rang, sont égaux entr'eux. Et il est facile de prouver, comme dans les démonstrations qui précèdent pour les produits des trois grandeurs, qu'il y a un produit dans les six, dont a occupe la première place, égal à un des six produits, où chacune des trois autres grandeurs b , c , d occupe la première place.

1°. Démonstration. $a \times bcd$ * = $bcd \times a$; $abd \times c$ = $c \times abd$ *. * 73. 73.

2°. Pour les deux premiers produits. On a cette proportion. 1. $a :: bcd$. $a \times bcd$. Et son alterne 1. $bcd :: a$. $bcd \times a$. Par conséquent $abcd = bcd a$. Ce qu'on peut si facilement étendre aux autres produits, qu'il est inutile de s'y arrêter.

Il est clair que les mêmes démonstrations peuvent s'appliquer de la même manière à prouver l'égalité de tous les produits qui peuvent se former de cinq grandeurs a , b , c , d , e .

& ensuite à tous ceux qui peuvent être formez de six grandeurs a, b, c, d, e, f ; & ainsi de suite à l'infini.

REMARQUE.

QUOIQUEL soit indifférent d'avoir égard à l'ordre des grandeurs littérales dans les produits qui en sont formez, il est bon néanmoins de s'accoutumer à mettre dans les produits les lettres suivant le rang qu'elles occupent dans l'alphabet; ainsi il est bon d'écrire $abcd$, plutôt que $bdca$; & ainsi des autres. Cet ordre auquel on est accoutumé par l'alphabet soulage la mémoire, & peut prévenir beaucoup d'erreurs dans les calculs.

La Multiplication des grandeurs littérales incomplexes.

PROBLÈME II.

24. **Q**UAND on veut multiplier une grandeur incomplexes, comme $+3a$ par une autre grandeur incomplexes $-4bc$; il y a trois choses à faire pour en former le produit, 1°. Il faut trouver le produit des lettres, & cela n'a aucune difficulté; car il n'y a qu'à joindre les lettres, & le produit en sera abc . 2°. Il faut multiplier, par la règle de la multiplication des nombres entiers, les nombres qui précèdent les grandeurs littérales dans le multiplié $3a$, & dans le multiplicateur $4bc$, & en écrire le produit devant celui des lettres & l'on aura $12abc$. 3°. Il faut trouver quel doit être le signe qui doit précéder le produit, en voici la règle.

Règle pour le signe du produit dans la Multiplication.

25. **Q**UAND les signes du multiplicateur & du multiplié sont tous deux $+$, ou tous deux $-$, le signe du produit doit être $+$. Ainsi $+3a \times +4bc = +12abc$, & $-3a \times -4bc = +12abc$.

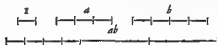
Quand les signes du multiplicateur & du multiplié sont différens, & que l'un est $+$ & l'autre $-$, le signe du produit doit être $-$. Ainsi $+3a \times -4bc = -12abc$, & $-3a \times +4bc = -12abc$.

Supposition pour la démonstration.

L'UNITÉ positive est toujours le premier terme de la proportion, dont les deux grandeurs multipliées l'une par l'autre sont le second & le troisième terme, & dont le produit est le quatrième terme.

Démonstration de la Règle sur les signes des produits.

QU'ON conçoive que l'unité 1, la grandeur a qui est le multiplicateur, la grandeur b qui est le multiplié, & la grandeur ab qui est le produit, sont quatre lignes droites, & pour une plus grande facilité que a contient trois fois la li-



gne 1; que b contient quatre fois la ligne 1: la ligne qui est le produit ab doit contenir trois fois le multiplié b . Ainsi $a = 3$, $b = 4$, $ab = 12$.

I. CAS.

Quand l'unité positive est par addition dans le multiplicateur.

L'UNITÉ est supposée toujours positive dans la multiplication. Quand le multiplicateur a $+$, 1°. Si le multiplié a aussi $+$, le produit aura $+$; 2°. Si le multiplié a $-$, le produit aura $-$.

Le multiplié b (4) doit être dans le produit ab (12) autant de fois & de la même manière que l'unité positive $+$ 1 est dans le multiplicateur a (3). Or $+$ 1 peut être dans le multiplicateur a (3) par addition ou par retranchement. C'est par addition quand le multiplicateur a (3) est positif, c'est à dire quand c'est $+$ a ($+$ 3). Ainsi quand le multiplié $+$ b ($+$ 4) est aussi positif, devant être aussi par addition dans le produit; ce produit est par conséquent positif, c'est à dire $+$ ab ($+$ 12). D'où l'on voit que quand le multiplié $+$ b , & le multiplicateur $+$ a ont tous deux $+$, le produit doit avoir $+$. De même quand le multiplié $-$ b ($-$ 4) est négatif, il doit être par addition dans le produit. Et l'addition de trois fois $-$ b ($-$ 4) est $*$ $-$ 12, & en lettres $-$ ab . D'où l'on * 16.

voit que quand le multiplicateur a le signe $+$ & le multiplié le signe $-$, le produit doit avoir le signe $-$.

II. CAS

Quand l'unité positive est retranchée du multiplicateur.

QUAND le multiplicateur a $-$; 1^o . Si le multiplié a $-$, le produit aura $+$; 2^o . Si le multiplié a $+$, le produit aura $-$.

L'unité positive $+$ 1 peut être, pour ainsi dire, par retranchement dans le multiplicateur, ou plutôt elle peut être retranchée du multiplicateur, & elle en est toujours retranchée quand le multiplicateur $-a$ (-3) est négatif. Donc si le multiplié $-b$ (-4) est aussi négatif, il doit être autant retranché du produit que l'unité positive $+$ 1 est retranchée du multiplicateur $-a$ (-3 .) Or pour retrancher une grandeur

- * 27. qui a le signe $-$, il faut l'écrire avec le signe $+$. Donc pour retrancher -4 trois fois, il faut écrire $+$ 12; ainsi le produit $+$ ab ($+$ 12) doit avoir le signe $+$ quand le multiplicateur & le multiplié ont tous deux le signe $-$. De même quand le multiplicateur $-a$ (-3) a le signe $-$, & le multiplié $+$ b ($+$ 4) a le signe $+$, le multiplié doit être autant retranché du produit, que l'unité positive $+$ 1 est retranchée du multiplicateur négatif $-b$ (-3 .) Or pour retrancher une
- * 27. grandeur qui a le signe $+$, il faut l'écrire avec le signe $-$; donc pour avoir le produit de $+$ b ($+$ 4) par $-a$ (-3), il faut retrancher trois fois $+$ 4; c'est à dire, il faut écrire le produit $-$ 12, & en lettres $-ab$. Donc quand le multiplicateur a le signe $-$, & le multiplié le signe $+$, le produit doit avoir le signe $-$.

La multiplication des grandeurs littérales doit être générale, & convenir non-seulement aux nombres entiers, mais encore à toutes sortes de grandeurs, c'est à dire aux nombres rompus, & aux grandeurs incommensurables: c'est pourquoi après avoir fait la démonstration de la règle pour le signe du produit, par rapport aux nombres entiers, comme étant la plus facile, on va la rendre générale pour toutes sortes de grandeurs.

On peut concevoir que les quatre lignes droites 1 , a , b , ab , dont la première est toujours prise pour l'unité positive, représentent deux rapports égaux quelconques; c'est à dire que $\frac{1}{2} = \frac{a}{b}$. Et l'unité étant le premier terme de la pro-

portion, le quatrième terme, c'est à dire la ligne ab * est le * 72.
produit du second & du troisième termes multipliez l'un par l'autre.

Par conséquent si l'on conçoit le premier terme 1 & le troisième b partagé en un même nombre n de parties égales, quel que soit ce nombre, (nommant x chaque partie égale de 1, & y chaque partie égale de b) le premier conséquent a * doit * 47.
contenir autant de x que le second ab contient de y ; (on nommera ce nombre m) & s'il y a un petit reste de plus dans a *, * 50.
il doit y avoir de même un petit reste dans ab de plus que les parties égales y . Et quand ces restes s'y trouvent, la proportion $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ convient aux grandeurs incommensurables: & ab est * * 72.
le produit des grandeurs incommensurables a & b . Ou bien (pour comprendre les grandeurs incommensurables avec les commensurables *) quand le nombre n des x comprises dans l'unité, & des y comprises dans b , est le même nombre fini pour les grandeurs commensurables, & infini pour les incommensurables, a doit contenir x un certain nombre de fois qu'on nommera m , & ab doit contenir y le même nombre de fois m , & ce nombre m est fini quand les grandeurs sont commensurables, & infini quand elles sont incommensurables.

I. C A S.

O R quand le multiplicateur a est positif, x (aliquote positive de l'unité) est contenue par addition dans le multiplicateur; donc, 1°, si le multiplié $+b$ est positif, & par conséquent les y de b positives, ces y doivent être contenues par addition dans le produit ab ; par conséquent le produit ab doit avoir $+$. Donc, 2°, si le multiplié $-b$ est négatif, & par conséquent, les parties égales y qui le composent, négatives, ces y négatives doivent être contenues par addition dans le produit ab , qui aura par conséquent * le signe $-$. * 16 & 27.

II. C A S.

M A I S quand le multiplicateur $-a$ est négatif; x (aliquote positive de l'unité) est retranchée du multiplicateur $-a$ autant de fois que l'exprime le nombre n . Donc, 1°, si le multiplié $-b$ est aussi négatif, & par conséquent les y de $-b$ négatives, ces $-y$ négatives dans $-b$ doivent être retranchées dans le produit ab ; & par conséquent le pro-

- * 26 & duit ab * doit avoir le signe $+$. Donc, 2^o , si le multiplié
 27. $+$ b est positif, & par conséquent les y , que contient $+$ b ,
 positives; ces y positives dans $+$ b , doivent être retranchées
 * 26 & dans le produit ab ; & par conséquent le produit ab * doit
 27. avoir le signe $-$.

COROLLAIRES sur les signes des produits.

1.

96. LORSQUE le multiplicateur a le signe $-$, le produit a
 toujours un signe différent du signe du multiplié.

2.

97. Quand le multiplicateur a le signe $+$, le produit a le même
 signe que le multiplié.

3.

98. Quand il y a plusieurs grandeurs multipliées les unes par
 les autres, si elles ont chacune le signe $-$, & qu'elles soient
 en nombre pair comme deux, quatre, six, &c. le produit
 aura toujours le signe $+$; & si elles sont en nombre impair,
 comme trois, cinq, sept, &c. il aura le signe $-$. Si parmi
 ces grandeurs multipliées les unes par les autres quelques-unes
 ont le signe $-$, & d'autres le signe $+$, quand le nombre de
 celles qui ont le signe $-$ est pair, le produit aura le signe $+$;
 quand le nombre de celles qui ont le signe $-$ est impair, le
 produit aura le signe $-$.

4.

99. Toute puissance paire positive d'une grandeur comme $+$
 a^2 , $+$ a^4 , $+$ a^6 , $+$ a^8 , &c. peut avoir pour racine la gran-
 deur $+$ a positive, & la même grandeur $-$ a négative. Car
 par exemple, $+$ $a \times +$ $a \times +$ $a \times +$ $a \times +$ $a = +$ a^5 , & $-$ a
 $\times -$ $a \times -$ $a \times -$ $a \times -$ $a = +$ a^5 . Mais une puissance impai-
 re négative d'une grandeur a comme $-$ a^3 , $-$ a^5 , &c. a
 toujours pour racine cette grandeur $-$ a négative; & une
 puissance impaire positive a toujours pour racine la grandeur
 a positive.

5.

100. On ne sauroit supposer aucune grandeur réelle qui puisse
 être

Être la racine de la puissance paire d'une grandeur, quand cette puissance a le signe —; par exemple, on ne sçauroit supposer de racine réelle à aucune des puissances — a^2 , — a^4 , — a^6 , — a^8 , &c. Car cette racine réelle qu'on supposeroit, auroit nécessairement l'un des signes + ou —; or en supposant que cette grandeur ait +, la puissance paire aura +; en supposant que cette grandeur ait —, la puissance paire aura toujours le signe +. Donc, &c.

Supposé qu'on imagine la racine 2^e de — a^2 , la racine 4^e de — a^4 , la racine 6^e de — a^6 , &c. cette racine est une grandeur impossible, &c. on l'appelle à cause de cela une racine imaginaire.

Exemples de la Multiplication des grandeurs incomplexes.

POUR multiplier + $15a^2b$ par — $10abc$, 1^o , je dis + par — donne le signe — pour le produit. 2^o . $10 \times 15 = 150$. 3^o . $a^2b \times abc = a^3b^2c$. J'écris donc le produit — $150a^3b^2c$. On fera de même les autres multiplications qu'on voit ici.

EXEMPLE I.	EXEMPLE II.	EXEMPLE III.
+ $15a^2b$	— a^2x^2	— abc
— $10a^2bc$	— ax	+ $5a^2c$
— $150a^3b^2c$	+ a^3x^3	— $5a^3bc^2$

La Multiplication des grandeurs littérales complexes.

PROBLÈME

MULTIPLIER une grandeur littérale complexe par une autre grandeur littérale complexe.

101. **RÈGLE** ou opération. 1^o . Il faut écrire la première grandeur complexe à multiplier, écrire au dessous le multiplicateur, & tirer une ligne au dessous. 2^o . Il faut, comme dans la multiplication des nombres, multiplier toute la grandeur à multiplier par la première grandeur incomplexes du multiplicateur, par la seconde grandeur incomplexes du multiplicateur, par la troisième, &c. ainsi de suite, &c. en écrire les produits sous la ligne les uns sous les autres, & tirer une ligne au dessous de ces produits. 3^o . Il faut faire l'addition de tous ces produits particuliers, & la somme qu'on trouvera sera le produit des deux grandeurs complexes données, mul-

multipliées l'une par l'autre. Quoiqu'il ne soit pas nécessaire de mettre de l'ordre dans les grandeurs qui forment le produit, il est néanmoins très utile d'arranger les grandeurs d'un produit de la manière qu'on l'expliquera, après avoir appliqué la Règle à des Exemples.

Pour multiplier $2a^2 - 3ab$ par $3a - 2b$, 1°. j'écris $2a^2 - 3ab$, &c au dessous $3a - 2b$, &c je tire une ligne.

2°. Je multiplie $2a^2 - 3ab$ par $-2b$, première partie du multiplicateur, &c j'en écris le produit $-4a^2b + 6ab^2$ sous la ligne. Je multiplie ensuite $2a^2 - 3ab$ par $3a$, seconde partie du multiplicateur, &c j'en écris le produit $+6a^3 - 9a^2b$ sous le précédent; &c je tire une ligne au dessous.

3°. J'ajoute tous les produits particuliers, &c j'en écris la somme $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$ sous la ligne; c'est le produit.

On peut remarquer qu'il auroit été indifférent de multiplier $2a^2 - 3ab$ d'abord par $+3a$, &c ensuite par $-2b$; il est évident qu'on auroit trouvé le même produit.

Pour multiplier $aa + ab + bb$ par $a - b$, 1°, j'écris le multiplicateur sous le multiplié, &c je tire une ligne.

2°. Je multiplie $aa + ab + bb$ par $-b$, &c ensuite par $+a$, &c après en avoir écrit les produits, je tire une ligne.

3°. J'ajoute tous les produits particuliers, &c je trouve la somme $a^3 - b^3$ pour le produit que je cherchois.

On peut remarquer dans cet Exemple de multiplication qu'il y a quelquefois des grandeurs dans les produits particuliers, qui dans l'addition qu'on en fait, pour avoir le produit total, sont égales à zero, à cause de leurs signes opposés; c'est à dire ces grandeurs se détruisent par leurs signes opposés $+$ &c $-$, comme $-aab + aab = 0$, &c $-abb + abb = 0$; on a marqué cette destruction dans le produit total par des étoiles.

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{r}
 2a^2 - 3ab \\
 3a - 2b \\
 \hline
 -4a^2b + 6ab^2 \\
 +6a^3 - 9a^2b \\
 \hline
 6a^3 - 13a^2b + 6ab^2
 \end{array}$$

EXEMPLE II.

$$\begin{array}{r}
 aa + ab + bb \\
 a - b \\
 \hline
 -aab - abb - b^2 \\
 +a^2 + aab + abb \\
 \hline
 a^3 \quad * \quad * \quad -b^3
 \end{array}$$

EXEMPLE III.

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \end{array}$$

En multipliant de la même manière $a^2 - 2ab + b^2$ par $a - b$, on trouvera le produit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$$\begin{array}{r} -a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ + a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2fx + f^2 \\ x - 2f \end{array}$$

Enfin en multipliant, suivant la même règle, $x^2 + 2fx + f^2$ par $x - 2f$, on trouvera le produit $x^3 - 2fx^2 - 3f^2x + 2f^3$.

$$\begin{array}{r} -2fx^2 - 4f^2x - 3f^3 \\ + x^3 + 2fx^2 + fx \\ \hline x^3 - 2fx^2 - 3f^2x + 2f^3 \\ - 8f^2x \end{array}$$

Démonstration de la multiplication des grandeurs littérales complexes.

IL paroît évident qu'en supposant une grandeur A divisée en tant de parties qu'on voudra, comme $b + c + d$; & une autre grandeur B divisée en tant d'autres qu'on voudra, comme $e + f + g$, le produit, qui doit venir de la multiplication de la grandeur A par B , doit être le même que la somme des produits qui viennent de la multiplication de toutes les parties $b + c + d$ de A par chacune des parties $e + f + g$ de B . Par conséquent le produit total d'une grandeur complexe, qui peut être représentée par A , multipliée par une autre grandeur complexe, qui peut être représentée par B , est égal à la somme des produits de toutes les parties de la grandeur complexe A multipliées par chacune des parties du multiplicateur complexe B . Or la règle que l'on a donnée fait découvrir la somme de ces produits; elle fait donc trouver le produit de la grandeur complexe A multipliée par le multiplicateur complexe B .

La démonstration précédente paroît évidente pour tous les cas de la multiplication des grandeurs littérales complexes, soit que les grandeurs littérales multipliées l'une par l'autre expriment des nombres entiers, soit qu'elles expriment ou des grandeurs rompues, ou des grandeurs incommensurables : si cependant quelques Lecteurs trouvoient de la difficulté, par rapport aux deux derniers cas, voici une autre démonstration.

On prendra pour exemple, afin de rendre la chose plus simple, la multiplication de $a \div b$ par $c \div d$, dont le produit, suivant la Règle, est $ac \div bc \div ad \div bd$. Il faut

- démontrer que $\frac{1}{a \div b} = * \frac{a+b}{a \div b} = *$ $\frac{a+b}{a \div b}$.
 En voici la démonstration. $\frac{1}{c \div d} = * \frac{c+d}{c \div d} = *$ $\frac{c+d}{c \div d}$ $\div ac \div bc \div ad \div bd$
 $\frac{1}{c \div d} = * \frac{c+d}{c \div d}$. D'où l'on aura $* \frac{1}{c \div d} = \frac{c+d}{c \div d}$
 De même $\frac{1}{a \div b} = * \frac{a+b}{a \div b} = *$ $\frac{a+b}{a \div b}$. D'où l'on aura $* \frac{1}{a \div b} = \frac{a+b}{a \div b}$
 Donc $* \frac{1}{a \div b} \cdot \frac{1}{c \div d} :: \frac{a+b}{a \div b} \cdot \frac{c+d}{c \div d}$. Par conséquent $* \frac{1}{a \div b} = \frac{a+b}{a \div b}$
 $\frac{1}{a \div b} = \frac{a+b}{a \div b}$. Ainsi $*$ le produit de $a \div b$ multiplié par $c \div d$ est $ac \div bc \div ad \div bd$. Ce qu'il falloit démontrer.

Cette démonstration peut facilement s'appliquer à toutes les multiplications des grandeurs complexes littérales.

REMARQUES.

X

101. L'ORDRE des grandeurs est indifférent dans le produit de deux grandeurs complexes multipliées l'une par l'autre : néanmoins il est bon d'ordonner les grandeurs d'un produit de manière que la grandeur incomplexue, qui contient la puissance la plus élevée de l'une des lettres du produit comme a dans les trois premiers exemples, soit la première grandeur incomplexue du produit la plus à gauche; que la grandeur qui contient la puissance de la même grandeur, dont l'exposant est moindre d'une unité que celui de la plus élevée, soit la seconde grandeur du produit; que la grandeur qui contient la puissance, dont l'exposant est moindre d'une unité que la précédente, soit la troisième grandeur du produit, &c ainsi de suite jusqu'à la dernière grandeur qui est la plus à droite, qui doit contenir la moindre puissance de la lettre a , quand la lettre a est dans toutes les grandeurs du

produit ; mais quand il y a quelque grandeur, qui ne contient point du tout cette lettre a , cette grandeur doit être la dernière du produit.

On voit dans le troisième exemple que la grandeur du produit vers la gauche est a^3 ; la seconde $3a^2b$, dans laquelle a^2 est une puissance de a d'un degré moindre que a^3 ; la troisième est $+ 3ab^2$ dans laquelle a est, pour ainsi dire, une puissance de a moindre d'un degré que a^2 , enfin $- b^3$, où a ne se trouve point, est la dernière grandeur du produit.

Quand les grandeurs d'un produit sont disposées comme on vient de l'expliquer, par rapport aux puissances d'une des lettres du produit, on dit que le produit est *ordonné par rapport à cette lettre*. Cette lettre est ordinairement arbitraire dans les produits, cependant dans les produits qui servent à la résolution des Problèmes, les grandeurs inconnues qu'on marque par les lettres x, y, z , &c. &c. qui sont les grandeurs que l'on cherche dans ces Problèmes, sont les lettres qui servent à ordonner les produits, comme on le voit dans le quatrième exemple.

Toutes les grandeurs d'un produit qui contiennent la même puissance de la lettre, par rapport à laquelle le produit est ordonné, s'appellent un *terme* du produit, &c. quand il y en a plusieurs qui ne sont qu'un même terme, on les écrit ordinairement les uns sous les autres, comme dans le quatrième exemple, où les deux grandeurs $- 3f^2x - g^2x$ ne sont qu'un même terme. La lettre, par rapport à laquelle un produit est ordonné, se nomme aussi *la lettre qui distingue les termes du produit*. Le premier terme contient la plus haute puissance de cette lettre ; le second, celle qui est moindre d'un degré que la plus haute, le troisième terme, celle qui est moindre que la précédente, &c. ainsi de suite jusqu'au dernier, qui contient la moindre puissance de cette lettre, quand elle est dans toutes les grandeurs du produit ; &c. quand elle n'est pas dans toutes, le dernier terme est celui qui est composé de toutes les grandeurs où cette lettre n'est pas.

Il arrive quelquefois que les puissances de la lettre qui distingue les termes d'un produit, ne vont pas en diminuant d'un degré d'un terme à l'autre qui le suit ; comme dans ce produit $a^2 + b^2a + b^2a^2 - b^2$

Dans ces cas, pourvu que les exposans des puissances de

cette lettre soient en progression arithmétique, comme dans cet exemple, les termes se distinguent par les puissances de cette lettre, dont les exposans sont en progression arithmétique. Ainsi le premier terme est a^0 , le second terme est $b a^1$, & ainsi de suite.

2.

103. Quand chacune des grandeurs du produit a le même nombre de dimensions, on dit que ces grandeurs sont *homogenes*. Quand un nombre précède une grandeur, il n'est pas compté pour une des dimensions du produit. Ainsi la grandeur $3a^2b$ n'est que de trois dimensions.

On observe ordinairement de faire toutes les grandeurs d'un produit *homogenes*, & cela s'appelle *observer la loi des homogenes*.

- Si les grandeurs d'un produit n'étoient pas *homogenes*, on pourroit les rendre *homogenes* par le moyen de l'unité, sans en changer la valeur, ainsi pour rendre les grandeurs $abc + cc$ *homogenes*, on peut multiplier cc par 1, & l'on aura $abc + 1 \times cc$, ou les grandeurs sont *homogenes*; & il est évident * que le produit d'une grandeur par l'unité, n'en change pas la valeur.

3.

104. La multiplication des grandeurs littérales est générale, & peut convenir à toutes les grandeurs qu'on peut imaginer; car on peut supposer telles grandeurs qu'on voudra; par exemple, telles lignes droites qu'on voudra représentées par les lettres qui sont multipliées les unes par les autres dans un produit littéral. Or comme on peut supposer telles grandeurs qu'on voudra représentées par les lettres, on peut de même supposer l'unité, à laquelle ces grandeurs auront rapport, telle qu'on voudra. Ce qui fait voir que l'unité est arbitraire dans les grandeurs littérales; & on peut la représenter par une lettre. Ainsi l'on peut supposer que a représente la ligne prise pour l'unité par rapport à deux autres lignes b & c ; & la multiplication de ces lignes * renfermera cette proportion $a : b :: c : bc$.

* 72.

On peut même prendre parmi les grandeurs littérales d'un produit qui sert à résoudre une question, celle qu'on voudra pour l'unité, pourvu que dans toute la question on rapporte

toutes les grandeurs littérales à cette seule grandeur, comme à l'unité, & qu'on n'en prenne pas d'autres pour l'unité. Cela sert à faciliter la résolution de plusieurs questions. Cela sert aussi à rendre les grandeurs d'un même produit complexe, homogènes, en suppléant par le moyen de la lettre prise pour l'unité au défaut des dimensions des grandeurs qui n'en ont pas assez pour être homogènes aux autres. Par exemple, supposant que a est prise pour l'unité dans $abc \rightarrow cc$, on rendra ces deux grandeurs homogènes en écrivant $abc \rightarrow acc$.

SECTION IV.

Où l'on explique la Division des grandeurs entières.

DEFINITIONS.

DEUX nombres étant donnez, comme 12 & 4, si l'on cherche combien de fois 4 est contenu dans 12, en disant combien de fois 4 est-il en 12 ? Il y est 3 fois ; c'est ce qu'on nomme *diviser* 12 par 4.

Le nombre 12 est celui que l'on divise, & on l'appelle *le dividende* ou *le nombre à diviser* ; le nombre 4, par lequel on divise 12, s'appelle *le diviseur* ; le nombre 3 que l'on trouve par la division, & qui exprime combien de fois 4 est dans 12, se nomme *le quotient* ; & c'est le quotient que l'on cherche par la division.

Puisque le diviseur 4 est contenu dans le dividende 12 autant de fois que l'exprime le quotient 3 ; il est évident qu'en prenant le diviseur 4 autant de fois que le marque le quotient 3, c'est à dire 3 fois, on aura le dividende 12 pour le produit de 4 par 3. D'où l'on voit que le dividende 12 est le produit du diviseur 4 multiplié par le quotient 3 ; ainsi le dividende 12 peut être regardé comme *un produit*, dont les *côtés* ou les dimensions sont le diviseur & le quotient ; & dans une division où le produit 12 est donné avec un de ses côtés 4, la division fait trouver l'autre côté 3 du produit.

105. Pour marquer la division d'un nombre par un autre, on écrit le dividende le premier, on tire une ligne au dessous, & l'on écrit le diviseur sous la ligne. Par exemple $\frac{12}{4} = 3$.

signifie que 12 divisé par 4 est égal à 3. De même $\frac{c}{b}$ marque que la grandeur c est divisée par la grandeur b ; ainsi $\frac{12}{4}$ exprime le quotient de la division de 12 par 4; $\frac{c}{b}$ exprime le quotient de c divisée par b .

Définition générale de la Division qui convient à toutes sortes de grandeurs; il faut se la rendre très familière.

106. **DIVISER** une grandeur quelconque c par une autre grandeur quelconque b , c'est trouver une grandeur qu'on nommera a , qui soit à l'unité comme le dividende c est au diviseur b .

D'où l'on voit qu'il y a une proportion dans toute division, dont le premier terme est le dividende c ; le second terme est le diviseur b ; le troisième terme est le quotient $a = \frac{c}{b}$.

- * 105. $\frac{c}{b}$, le quatrième terme est l'unité. Le premier, le second & le quatrième terme de cette proportion sont donnez, & la division fait trouver le troisième terme qui est le quotient. Voici l'expression de cette proportion $c, b :: a (\frac{c}{b}) . 1$. Ou bien $\frac{c}{b} = \frac{a}{1}$.

COROLLAIRES qu'il faut se rendre très familiers.

107. **L**E dividende c est le produit du diviseur b multiplié par le quotient $a = \frac{c}{b}$. Car puisque les rapports $\frac{c}{b}$ & $\frac{a}{1}$ sont égaux, leurs rapports inverses * sont aussi égaux 1. $a (\frac{c}{b}) :: b . c$.
 * 72. Donc * c est le produit de b multiplié par a , ou de b multiplié par $\frac{c}{b} = * a$.

COROLLAIRE II.

108. **L'**UNITÉ étant divisée par l'unité, le quotient est l'unité. $\frac{1}{1} = 1$; car l'unité est contenue une fois dans elle-même. Ainsi le quotient qui vient de 1 divisé par 1 est 1; & comme toute grandeur est aussi contenue une fois dans elle-même tous les rapports d'égalité $\frac{a}{a}, \frac{b}{b}$, &c. ont aussi pour quotient l'unité; ainsi ils sont égaux entr'eux, & ils sont égaux à l'unité, & ils peuvent être pris pour l'unité.

COROLLAIRE III.

109. **D**EUX grandeurs quelconques c & e , étant divisées par une même grandeur d ; les deux quotiens $\frac{c}{d}, \frac{e}{d}$ ont le même rapport que les deux grandeurs c & e . Il faut démontrer que $c, e :: \frac{c}{d}, \frac{e}{d}$.
Démonstration.

Démonstration * $c. d :: \frac{1}{2}. 1$. Donc * $c. \frac{1}{2} :: d. 1$. De * 106. * 62. même * $e. d :: \frac{1}{2}. 1$. Donc * $e. \frac{1}{2} :: d. 1$. Par conséquent * 106. * 61. $c. \frac{1}{2} :: e. \frac{1}{2}$. D'où l'on déduit * $c. e :: \frac{1}{2}. \frac{1}{2}$. Ce qu'il falloit * 52. * 61. démontrer.

REMARQUE.

Ce troisième Corollaire & la proposition de l'article 75, font voir clairement qu'un même rapport peut avoir une infinité d'expressions équivalentes. Car, en multipliant ou en divisant les deux termes d'un rapport par les mêmes grandeurs, ou par des grandeurs égales, (ce qu'on peut diversifier à l'infini,) les produits ou les quotiens conserveront toujours le même rapport. Ainsi $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16}$, &c ainsi à l'infini. De même $a. b :: \frac{a}{2} . \frac{b}{2} :: \frac{a}{3} . \frac{b}{3} :: \frac{a}{4} . \frac{b}{4}$, &c.

D'où l'on voit que quand les deux termes d'un rapport sont multipliés chacun par les mêmes multiplicateurs, ou divisés chacun par les mêmes diviseurs, on peut abréger l'expression de ce rapport, & la rendre plus simple sans changer le rapport; en effaçant les communs multiplicateurs ou les communs diviseurs. Ainsi $\frac{a^2 b^2}{2^2 3^2} = \frac{a^2}{2} . \frac{b^2}{3}$. De même $\frac{a^2}{2} . \frac{b^2}{3} :: a^2 . b^2 :: a. b$.

Il faut se rendre cette remarque & les articles 75 & 109 très familiers, à cause de leur grand usage.

COROLLAIRE IV.

110. IL suit du Corollaire précédent que deux grandeurs égales, étant divisées par la même grandeur, ou, ce qui revient au même, par des grandeurs égales, les quotiens sont égaux. Car les rapports des deux grandeurs divisées, à leurs diviseurs, étant les mêmes * que ceux des quotiens à l'unité; les deux * 106, grandeurs ne peuvent pas être égales, & leurs diviseurs aussi égaux, que les quotiens n'aient le même rapport à l'unité. Ces quotiens sont donc * égaux. * 53.

COROLLAIRE V.

111. DANS tout rapport & dans toute fraction, le premier terme est au second, c'est à dire le numérateur est au dénominateur, comme le rapport ou la fraction est à l'unité. Car * 109, L

- * 19. $a : b :: \frac{1}{a} : \frac{1}{b} = 1$. On le peut aussi déduire des définitions *
- * 47. & de fraction, & * de rapport, comme on le va voir.
3. Cela est évident dans toute fraction ; car dans toute fraction, (on prendra la fraction $\frac{1}{a}$ pour rendre la chose plus
- * 19. claire) * l'unité est conçue partagée en autant de parties égales que le dénominateur contient d'unités, & le numérateur marque combien la fraction contient de ces parties de l'unité.
- * 48. té ; ainsi l'on a cette proportion $2 : 3 :: \frac{2}{3} : 1$ ($\frac{1}{3}$). * Puisque les conséquens 3 & 1 ou $\frac{1}{3}$, étant partagez chacun en trois parties égales, chacun des antécédens contient deux aliquotes semblables de son conséquent.

C'est la même chose dans tout rapport ; car, par exemple, dans le rapport de 2 à 3 considéré comme rapport, on fait attention que l'antécédent 2 est les deux tiers de son conséquent 3, ou qu'il contient deux des parties, dont le conséquent en contient 3. Et en faisant comparaison du rapport $\frac{2}{3}$ à l'unité, on voit que $\frac{2}{3}$ contient aussi deux des parties dont l'unité en contient trois ; & par conséquent le rapport de 2 à 3 est égal au rapport de $\frac{2}{3}$ à 1 ou à $\frac{1}{3}$. Et l'on voit assez que cela convient à tout rapport, & qu'on n'a pris le rapport $\frac{2}{3}$ que pour s'expliquer plus clairement. Si le rapport est incommensurable comme $\frac{a}{b}$, & en general $\frac{mx+r}{n}$, où l'on suppose qu'en quelque nombre d'aliquotes que le conséquent puisse être partagé, l'antécédent en contient un certain nombre avec un reste r plus petit que chaque aliquote ; il est évident qu'en concevant l'unité partagée dans le même nombre d'aliquotes que le conséquent, l'on aura toujours la proportion $2 + r : 3 :: \frac{2+r}{3}$. $2 = \frac{2}{3}$. Et en general $mx + r : n :: \frac{mx+r}{n}$. $1 = \frac{n}{n}$. Car $\frac{1}{n}$ qui est trois fois dans l'unité $= \frac{3}{n}$, sera deux fois dans le rapport $\frac{2+r}{n}$ avec un petit reste, comme le tiers de 3 est deux fois dans 2 + r avec un petit reste ; & en general $\frac{mx+r}{n}$, qui est dans 1 $= \frac{n}{n}$ autant de fois que le nombre n contient d'unités, est dans le rapport $\frac{mx+r}{n}$ autant de fois que le nombre entier n contient d'unités avec un petit reste ; comme l'aliquote semblable x de mx est dans $mx + r$ autant de fois que le nombre entier n contient d'unités avec un petit reste r .

D'où l'on voit que quand le premier terme d'un rapport

ou d'une fraction est égal au second ; le rapport , ou la fraction , est égale à l'unité ; quand le premier terme surpasse le second ; le rapport ou la fraction surpasse l'unité ; quand le premier terme est moindre que le second , le rapport ou la fraction est moindre que l'unité.

COROLLAIRE VI.

112. **T**OUT rapport & toute fraction * est le quotient du premier terme de ce rapport, ou du premier terme de cette fraction divisé par le second terme : puisque $a. b :: \frac{a}{b} . 1$. * 106.

COROLLAIRE VII.

113. **L**ES rapports inverses des rapports égaux du précédent Corollaire * sont égaux. Ainsi en toute fraction & en tout rapport, l'unité est à la fraction ou au rapport, comme le second terme du rapport est au premier terme. $1. \frac{a}{b} :: b. a$. De même $1. \frac{b}{a} :: a. b$. * 111.

COROLLAIRE VIII.

114. **D**où il suit * que le premier terme d'un rapport & d'une fraction est le produit du second terme de ce rapport multiplié par le rapport même, ou par la fraction même. * 77.

COROLLAIRE IX.

115. **I**L est évident, par le sixième Corollaire, qu'un rapport, une fraction, & le quotient d'une division, sont la même chose, c'est pourquoi on les marque de la même manière. L'expression d'un rapport $\frac{a}{b}$ peut donc s'énoncer de ces manières, 1^o, en le nommant le rapport de a à b . 2^o, en disant que c'est a divisé par b , ou le quotient de a divisé par b .

COROLLAIRE X.

116. **D**où il suit que deux rapports ou deux fractions, qui ont un même second terme ou un même conséquent, sont entr'elles comme les antécédens, * $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} :: a. b$. Car les rapports $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$, sont les deux grandeurs a & b divisées par le même diviseur c . * 109.

REMARQUE.

ON peut voir à présent dans la dernière évidence cette proposition, assez évidente d'elle-même ; que tous les rapports égaux sont des grandeurs égales. Par exemple, $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{6}$

- &c. sont des grandeurs égales. Car ce sont des grandeurs qui ont un même rapport avec une même grandeur qui est l'unité, puisque * chacun de ces rapports est à l'unité comme son premier terme est à son second terme. D'où l'on voit que tous les rapports d'égalité sont égaux chacun à l'unité $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = 1$. Ainsi l'on peut prendre, si l'on en a besoin pour une démonstration, un rapport d'égalité pour l'unité, & l'unité pour un rapport d'égalité.

COROLLAIRE XI.

117. **U**NE grandeur quelconque étant divisée par l'unité, comme $\frac{a}{1}$, a la même valeur que si elle n'étoit point divisée, c'est à dire $\frac{a}{1} = b$; car * $\frac{1}{1} = 1$. D'où l'on voit que toute grandeur entière a peut être regardée comme une fraction, ou comme un rapport $\frac{a}{1}$, dont le premier terme est cette grandeur a , & le second terme est l'unité.

COROLLAIRE XII.

qui est une proposition fondamentale.

118. **D**eux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont entr'eux, comme le produit des extrêmes ad est au produit des moyens bc . C'est à dire $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$.

Démonstration. Qu'on divise ad & bc par la même grandeur bd , l'on aura cette proportion * $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$. Mais * 71. * 75. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d} = \frac{c}{d}$. Par conséquent * $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$, * 53. * 109. $\frac{ad}{bd} :: ad : bc$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE XIII.

qui est une proposition fondamentale.

119. **D**'Où il suit que quand deux rapports sont égaux, (c'est à dire que dans toute proportion) le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ il suit nécessairement que $ad = bc$; car puisque les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont égaux, il faut * que les produits ad & bc soient égaux.

120. Et quand deux produits sont égaux, comme $ad = bc$, on peut toujours en faire une proportion, en prenant les deux côtes de l'un des produits pour les deux extrêmes, & les deux côtes de l'autre pour les deux moyens de la proportion. Par exemple, si $ad = bc$, l'on aura $a : b :: c : d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, car

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: * ad. bc.$ Donc, puisque l'on suppose $ad = bc$, il ^{*118.} suit nécessairement que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

COROLLAIRE XIV.

121. **D**eux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, qui ont le même antécédent, ont entr'eux un rapport inverse de celui des conséquens, ou sont entr'eux comme les conséquens dans un ordre renversé. C'est à dire $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: c. a.$ Car $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: * bc. ab :: * c. a.$ ^{*118. *75.}

COROLLAIRE XV.

122. **L'**ON voit, par le Corollaire onzième, ^{*117.} & par l'article ^{*75.} 75, que tout nombre entier pouvant être considéré comme une fraction, dont le nombre entier est le numérateur, & l'unité le dénominateur; si l'on ajoute un même nombre de zeros au numérateur & au dénominateur, le nombre entier, considéré comme une fraction, sera changé en nombre décimal sans changer de valeur. Ainsi $345 = \frac{345}{1} = \frac{345000000}{100000000}$. Car par cette opération on multiplie le numérateur & le dénominateur par un même nombre, dans notre exemple, par 1000000, ^{*75.} ce qui ne change point la valeur de la fraction.

Mais au lieu d'écrire le dénominateur, on a trouvé plus court pour le calcul d'exprimer ces fractions décimales, en supprimant le dénominateur, & en marquant ^{*172.} simplement un point entre les entiers & les parties décimales. Ainsi $\frac{345000000}{100000000} = 345.000000$.

COROLLAIRE XVI.

123. **O**N déduit aisément des Corollaires précédens, qu'ayant deux fractions quelconques $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$, si l'on veut les multiplier l'une par l'autre, il faut former la fraction $\frac{ac}{bd}$, qui a pour premier terme le produit des antécédens, & pour second terme le produit des conséquens, elle sera le produit des deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ multipliées l'une par l'autre. Car $1. \frac{a}{b} :: * b. a :: * bc. ac :: * \frac{ac}{bd}.$ Par conséquent ^{*113. *75.} $\frac{a}{b} :: \frac{ac}{bd}.$ Mais $\frac{c}{d} = * \frac{1}{d}.$ Donc $1. \frac{a}{b} :: \frac{c}{d}.$ D'où ^{*109. *52.} il suit que $* \frac{ac}{bd}$ est le produit qui vient de $\frac{a}{b}$ multipliée par $\frac{c}{d}$. ^{*75. *21.}

COROLLAIRE XVII.

124. **S**I l'on veut diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$; il faut former la fraction $\frac{ad}{bc}$, qui a pour premier terme le produit des extremes ad , &c pour second terme le produit des moyens bc ; elle sera le quotient.

*118. *111. Car $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: * ad : bc :: * \frac{ad}{bc} : 1$. Ainsi $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: * \frac{ad}{bc} : 1$.

*52. *106. Par conseq. $* \frac{ad}{bc}$ est le quotient de $\frac{a}{b}$ divisée par $\frac{c}{d}$.

Application de la définition generale de la Division à la division des nombres entiers.

DEFINITION.

125. **D**IVISER un nombre entier donné par un autre nombre entier aussi donné, c'est trouver un troisième nombre qui contienne l'unité autant de fois que le diviseur est contenu dans le dividende. Par exemple, diviser 12 par 4, c'est trouver le quotient 3 qui contient l'unité autant de fois que 4 est contenu en 12. Et l'on a cette proportion 12. 4 :: 3. 1.

D'où l'on voit que la division d'un nombre entier comme 12 par un autre nombre entier comme 4, est une soustraction du diviseur 4, du dividende 12, répétée autant de fois que le quotient 3 contient l'unité.

SUPPOSITION OU DEMANDE.

ON suppose qu'on sçait trouver combien de fois chacun des neuf chiffres est contenu dans un nombre qui le contient

*78. moins de dix fois, c'est à dire que l'on sçait * la table de la Multiplication.

La division des nombres entiers.

PROBLÈME.

126. **D**IVISER un nombre entier donné c par un autre nombre entier donné b ; c'est à dire trouver le nombre entier a qui exprime combien de fois le diviseur b est contenu dans le dividende c , & qui est le quotient.

$$\begin{array}{r} \text{dividende.} \quad \text{diviseur.} \\ c \ 83106 \quad \left(\begin{array}{r} 342 \ b \\ \hline a \text{ quotient.} \end{array} \right. \end{array}$$

AVERTISSEMENT.

POUR faire concevoir clairement la Division aux Commencans, on appliquera à un exemple les articles de l'opération à mesure qu'on les énoncera.

Règle on opération. 1°. Il faut écrire le dividende c , & tirer au devant vers la droite un arc ou une petite ligne droite. Il faut écrire le diviseur b au haut de cet arc ou de cette ligne droite, & tirer une ligne sous le diviseur. Ce sera sous cette ligne qu'il faudra écrire les chiffres du quotient a à mesure qu'on les découvrira par la division; car ces chiffres du quotient ne se trouvent que l'un après l'autre. Pour les trouver, on partage le dividende en parties, dont chacune fait trouver un de ces chiffres, & on appelle ces parties *les membres* de la Division: les opérations, qu'il faut faire sur un de ces membres, pour trouver le quotient qui lui convient, c'est à dire, pour diviser ce membre, sont les mêmes qu'il faut faire sur chacun des autres membres. Voici comme on distingue le premier membre.

2°. Il faut distinguer dans le dividende, en commençant par le dernier chiffre à la gauche, & allant de la gauche à la droite, autant de rangs de chiffres qu'en contient le diviseur b . Dans cet exemple il faut prendre les trois rangs 831, le diviseur ayant trois rangs.

Et si le nombre que l'on a pris surpasse le diviseur, ou s'il lui est au moins égal, ce nombre sera le premier membre à diviser: mais s'il étoit plus petit que le diviseur, c'est à dire, si le diviseur n'y étoit pas contenu au moins une fois, (comme s'il y avoit 231 au lieu de 831,) il faudroit encore prendre un chiffre du dividende vers la droite pour faire le premier membre de la Division.

3°. Le premier membre à diviser étant ainsi distingué, voici ce qu'il faut faire pour trouver le quotient de ce membre, & pour faire la division de ce premier membre. 1°. Il faut concevoir le diviseur b écrit sous le premier membre à diviser, les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, &c. Mais au lieu de l'écrire, il suffit, pour abréger, d'écrire sous le premier membre autant de

$$\begin{array}{r}
 c \ 831, 06 \quad \left(\begin{array}{r} 342 \ b \\ \hline a \end{array} \right. \\
 \begin{array}{r} \dots \\ 684 \\ \hline 147 \end{array}
 \end{array}$$

(marquées dans le 3^e article) qu'on a faites sur le premier. C'est à dire, 1^o il faut écrire autant de points sous ce membre, que le diviseur contient de rangs, & mettre le premier point sous les unités de ce membre, le second point sous les dizaines, & ainsi de suite. 2^o. Il faut voir combien de fois le dernier chiffre du diviseur est contenu dans le nombre qui est sur le dernier point, & écrire au quotient le chiffre qui exprime combien de fois il y est contenu.

$$\begin{array}{r} 1\ 23106 \quad \left(\begin{array}{r} 342\ 6 \\ 24\ 4 \end{array} \right. \\ \underline{684} \end{array}$$

a. member. 1470

$$\begin{array}{r} \dots \\ \underline{1368} \\ 102 \end{array}$$

3^o. Il faut multiplier le diviseur par ce nouveau quotient, & en écrire le produit sous le membre que l'on divise, les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, &c. 4^o. Il faut retrancher ce produit du membre à diviser, & écrire le reste au dessous, & la division de ce membre sera faite.

Dans notre exemple, il faut transporter 0, qui précède dans le dividende le membre qu'on vient de diviser, au devant du reste 147 de la division du membre précédent; marquer un point sous 0 dans le dividende pour se souvenir qu'on l'a employé; & le nouveau membre à diviser sera 1470. Pour le diviser, 1^o, il faut écrire trois points; le premier, sous le chiffre qu'on vient de transporter, qui est le rang des unités de ce membre; le second point sous 7, & le troisième sous 4; & 14 est le nombre de ce membre à diviser qui se trouve sur le dernier point; (parceque tant le chiffre 4 qui est sur le dernier point que les chiffres qui peuvent se trouver vers la gauche comme ici 1, font centseze être le nombre qui se trouve sur le dernier point) 2^o. Il faut dire combien de fois 3, dernier chiffre du diviseur, est-il contenu dans 14? On trouve qu'il y est 4 fois; il faut écrire 4 au quotient. 3^o. Il faut multiplier le diviseur 6 par ce nouveau quotient, & en écrire le produit 1368 sous le membre à diviser. 4^o. Il faut ôter ce produit du membre à diviser, & écrire le reste 102 au dessous; & la division de ce membre sera achevée.

5^o. Pour avoir le membre suivant de la Division, il faut, comme dans l'article quatrième, transporter le chiffre du dividende qui précède le dernier dont on s'est servi, le transporter, dis-je, devant le reste de la division du membre précédent, & ce sera le nouveau membre à diviser; marquer

sous ce membre autant de points qu'il y a de rang de chiffres dans le diviseur : trouver le quotient de ce membre, qui doit être le chiffre qui exprime combien de fois le dernier chiffre du diviseur est contenu dans le nombre qui est sur le dernier point : multiplier le diviseur par ce nouveau quotient, & en écrire le produit sous le membre qu'on divise. Enfin ôter ce produit du membre que l'on divise, & en écrire le reste au dessous.

$$\begin{array}{r}
 83106 \quad \left(\begin{array}{l} 142 \text{ h} \\ 243 \text{ q} \end{array} \right. \\
 \hline
 1470 \\
 \hline
 1368 \\
 \hline
 1016 \\
 \hline
 1016 \\
 \hline
 0000
 \end{array}$$

Dans notre exemple il faut transporter le chiffre 6 du dividende qui précède le dernier chiffre dont on s'est servi, qui est 0 ; transporter, dis-je, 6 devant le reste 102 de la division du membre précédent, & marquer un point sous 6 du dividende, pour se souvenir qu'on s'en est servi : & l'on aura 1026 pour le nouveau membre à diviser. 1°. On marquera au dessous les trois points qui occupent les trois places où il faut imaginer que le diviseur 342 est écrit. 2°. On trouvera le quotient de ce membre, en disant combien de fois 3, dernier chiffre du diviseur, est-il contenu en 10, qui est le nombre du membre à diviser, qui est au dessus du dernier point, ou qui est censé sur le dernier chiffre du diviseur ; on trouve que 3 est contenu 3 fois en 10 ; ainsi on écrira 3 au quotient. 3°. On multipliera le diviseur 6 par ce quotient 3, & l'on écrira le produit 1026 sous le membre 1026 que l'on divise. 4°. Enfin on retranchera le produit, qu'on vient de trouver, du membre que l'on divise, & l'on en écrira le reste au dessous ; ce reste est 0.

6°. On continuera de transporter de suite, l'un après l'autre, les chiffres du dividende qui précèdent ceux sur lesquels on a déjà opéré, au devant des restes qu'on trouvera en divisant successivement les membres de la division, & de former ainsi par ordre, l'un après l'autre, tous les membres de la division : & on fera sur chacun les opérations marquées dans le troisième article ; on continuera, dis-je, cette suite d'opérations jusqu'à ce qu'on ait transporté tous les chiffres du dividende ; le dernier membre de la division sera celui où l'on aura transporté le premier chiffre du dividende le plus à droite ; & après avoir opéré sur ce dernier membre, la di-

vision sera achevée : & les chiffres qu'on aura marquez de suite dans la place du quotient *a*, seront le quotient *qu'il falloit trouver*.

REMARQUES.

1.

117. QUAND la division est achevée, si le dernier membre ne laisse aucun reste; c'est à dire, si l'on trouve 0 pour le reste du dernier membre; le diviseur est exactement contenu dans le dividende autant de fois que le quotient contient l'unité. Mais si après la division du dernier membre on trouve un reste, alors le dividende contient le diviseur autant de fois que le quotient contient l'unité, & le dividende contient de plus ce reste; de manière que si l'on retranchoit ce reste du dividende, il contiendrait, après ce retranchement, le diviseur exactement autant de fois que le quotient contient l'unité.

Si l'on trouve un reste après la division, on écrit ce reste au devant du quotient un peu plus haut, & en moindres caractères pour le distinguer, on tire une ligne au dessous, & l'on écrit le diviseur sous cette ligne; ce qui fait une fraction dont le reste est le numérateur, & le diviseur en est le dénominateur; & cela marque que le quotient contient encore cette fraction, outre les nombres entiers dont il est composé.

2.

118. Le quotient doit avoir autant de rangs de chiffres qu'il y a de membres à diviser, chaque membre à diviser devant fournir un chiffre au quotient, & l'on voit par l'opération qu'il doit y avoir autant de membres dans la division, qu'il y a de rangs de chiffres dans le dividende au devant du premier membre, & de plus ce premier membre.

3.

119. Le diviseur doit toujours être contenu dans le premier membre de la division; ainsi le premier membre fournit toujours un chiffre au quotient. Mais quand le diviseur n'est pas contenu au moins une fois dans un des membres qui suivent le premier, on écrit zero pour le quotient de ce membre-là;

& dans ce cas la division de ce membre est achevée ; & il faut transporter devant ce membre-là le chiffre du dividende qui précède le dernier transporté ; & le membre précédent qui n'a fourni que 0 au quotient, avec ce nouveau chiffre transporté, sera le membre suivant de la division.

4.

130. Le chiffre du quotient qui convient à chaque membre ; ne peut pas être plus grand que 9 ; aussi on n'écrit que 9 pour le quotient d'un membre , quand même on trouveroit en opérant un quotient plus grand que 9.

5.

131. Il arrive assez ordinairement , en divisant un membre de la division , que le produit du diviseur par le quotient qu'on trouve d'abord pour ce membre , est plus grand que ce membre-là , & qu'il n'en peut pas être retranché . Quand cela arrive , c'est une marque certaine que ce quotient est trop grand ; il faut le diminuer d'une unité , ou de deux unités , ou de trois unités , & ainsi de suite , jusqu'à ce que le produit du diviseur par le chiffre du quotient de ce membre-là , puisse être retranché de ce membre ; & ce dernier quotient sera celui qui convient à ce membre de la division.

6.

132. S'il arrivoit aussi qu'après avoir divisé un membre de la division , on trouvât un reste plus grand que le diviseur , de façon que le diviseur fût contenu dans ce reste ; ce seroit une marque certaine que le chiffre du quotient du membre sur lequel on opere , ou celui du membre précédent seroit trop petit : il faudroit dans ce cas recommencer la division de ces deux membres jusqu'à ce qu'on trouvât un reste du dernier de ces deux membres moindre que le diviseur.

Application des Regles de La Division aux exemples.

ON a déjà mis un premier exemple pour faire mieux concevoir aux Commencans les Regles de la Division à mesure qu'on les énonçoit ; voici d'autres exemples.

II. E X E M P L E.

Pour diviser 7377416 par 3201, 7377416 $\left(\begin{array}{r} 3201 \\ 2304 \end{array} \right) \begin{array}{r} 2304 \\ 1212 \end{array}$
 1°. J'écris le dividende, je tire un arc au devant, je mets le diviseur 3201 au haut de l'arc; je tire une ligne au dessous, & j'écris par ordre les chiffres du quotient sous cette ligne à mesure que je les découvre.
 6402
 9754 2. membre.
 ...
 9603
 15116 3. & 4. membre.

2°. Pour avoir le premier chiffre à gauche du quotient, je distingue le premier membre de la division, en prenant autant de rangs de chiffres à la gauche du dividende qu'en contient le diviseur. Ces chiffres du dividende sont 7377; & voyant que le diviseur est contenu dans le nombre que j'ai pris, ce nombre 7377 est le premier membre de ma division.

Je marque quatre points sous ce premier membre, dont le premier est sous 7 à droite, qui est le chiffre des unités du premier membre, & le dernier sous 7 à gauche qui est le dernier chiffre du premier membre. Et je m'imagine que le diviseur est écrit à la place de ces points; que le chiffre 3 le plus à gauche du diviseur est sous le dernier chiffre 7 à gauche du premier membre.

Pour trouver le quotient de ce premier membre, je dis combien de fois 3, dernier chiffre du diviseur, est-il en 7 qui est le nombre du premier membre qui est sur le dernier point, ou qui est censé sur 3? il y est deux fois; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviseur 3201 par le quotient 2, & j'en écris le produit 6402 sous le premier membre. Enfin je retranche ce produit du premier membre, & j'écris au dessous le reste 975.

La division du premier membre est achevée; & s'il étoit seul, le quotient 2 fait voir que le diviseur 3201 est contenu 2 fois dans le premier membre 7377, & qu'il y a de plus 975.

3°. Pour avoir le second membre, je mets un point sous 4, qui précède, dans le dividende, le premier membre; & je transf-

porte 4 au devant du reste 975, & j'ai 9754 pour le second membre de ma division. J'écris quatre points sous le second membre, le premier sous 4, & les autres en allant à gauche jusqu'au dernier qui se trouve sous 9. Et je dis 3, dernier chiffre du diviseur, est contenu 3 fois dans 9, qui est le nombre du second membre qui se trouve sur le dernier point; ainsi j'écris au quotient 3 pour le quotient du second membre. Je multiplie le diviseur par le quotient 3, j'en écris le produit 9603 sous le second membre. Enfin j'ôte ce produit du second membre, & j'écris le reste 151 au dessous; & le second membre est divisé.

4°. J'écris un point sous 1 qui précède dans le dividende le dernier chiffre 4 dont je me suis servi, & j'écris 1 au devant du reste 151 de la division du membre précédent, & j'ai 1511 pour le troisième membre de la division. Mais voyant que le diviseur 3201 n'est pas contenu dans ce membre, j'écris au quotient 0 pour le quotient de ce membre, & la division du troisième membre est achevée.

5°. Je mets un point sous 6, qui précède dans le dividende le dernier chiffre 1 dont je me suis servi, & j'écris 6 au devant de 1511, & j'ai 15116 pour le dernier membre de ma division. J'écris quatre points sous ce membre, le premier sous 6 qui est le chiffre des unités, & le dernier se trouve sous 5. Je dis ensuite 3, dernier chiffre du diviseur, est contenu 5 fois dans 15 qui est le nombre qui se trouve au dessus du dernier point, mais trouvant que le produit de 5 par le diviseur 3201 est plus grande que le membre 15116 que je divise; je n'écris pas 5 pour le quotient de ce dernier membre, j'écris seulement 4 au quotient. Je multiplie le diviseur 3201 par ce quotient 4. Je retranche le produit 12804, du dernier membre, & j'écris au dessous le reste 2312. J'écris encore en fraction, à la droite du quotient, ce reste sur une ligne, & le diviseur au dessous. Et le quotient de ma division est 2304 $\frac{2312}{3201}$. Ce qui me fait connoître que 3201 est contenu 2304 fois dans le dividende 7377416, mais que le dividende contient de plus 2312.

I. AVERTISSEMENT important pour la pratique.

LES Lecteurs qui commencent ne sauroient trop se persuader que s'ils veulent tirer du profit de cet Ouvrage, & se

mettre en état d'apprendre facilement les Mathématiques, ils doivent se rompre aux calculs, & acquérir l'habitude de les faire promptement & avec facilité. Et que le seul moyen de former en eux cette facilité, est de faire eux-mêmes beaucoup d'exemples de la division qui contient les opérations précédentes, & de faire de même beaucoup d'exemples des autres opérations qu'on doit expliquer dans la suite.

II. AVERTISSEMENT.

QUAND les Commencans se seront rendu familiers, par beaucoup d'exemples, la pratique de la division; il ne sera plus nécessaire d'écrire les produits du diviseur par le quotient de chaque membre: il faudra faire mentalement la multiplication du diviseur par le quotient de chaque membre, & en même temps la soustraction de ce produit, du membre qu'on divise, sans rien écrire que le reste de la soustraction. C'est un abrégé auquel ils doivent s'accoutumer, en voici un exemple.

III. EXEMPLE.

POUR diviser 305852 par 378, 1^o, j'écris le dividende 305852, je tire un arc au devant; j'écris le diviseur au haut de l'arc; je tire une ligne sous le diviseur; la place du quotient sera sous cette ligne.

305852	(378
.....		809 178
3452		
...		
30		

2^o. Le diviseur ayant trois rangs, je prens les trois rangs de chiffres 305 du dividende vers la gauche pour le premier membre; mais voyant que le diviseur surpasse 305, je prens encore le chiffre 8, & j'ai 3058 pour mon premier membre à diviser. J'écris au dessous les 3 points qui y doivent occuper les places où j'imagine le diviseur; je mets le premier sous 8 qui est le chiffre des unités du membre à diviser, & le troisième point tombe sous 0; ainsi 30 est le nombre sous lequel est le dernier point. Je dis ensuite 3, dernier chiffre du diviseur, est contenu 10 fois en 30; mais je ne puis mettre que 9 pour le quotient d'un membre: & trouvant encore en multipliant le diviseur 378 par 9, que le produit surpasse le membre que je divise, je n'écris que 8 pour le quotient du premier membre.

Je fais ensuite la multiplication du diviseur par le quotient, & en même temps la soustraction du produit qui en vient, du

membre que je divise, sans écrire le produit, de cette manière. $8 \times 8 = 64$; jôte 64 de 68, en ajoutant 6 dizaines à 8 pour le rendre égal à 64, ou plus grand que 64; & il reste 4 que j'écris sous 8, & je retiens les 6 dizaines que j'ai ajoutées à 8. Puis je dis $8 \times 7 = 56$, $56 \rightarrow 6$ que je retiens, $= 62$. Je retranche 62 de 65, en ajoutant à 5 six dizaines pour en pouvoir soustraire 62, & il reste 3 que j'écris sous 5, & je retiens les 6 dizaines que j'ai ajoutées à 5. Enfin je dis $8 \times 3 = 24$, $24 \rightarrow 6$ que je retiens, $= 30$. Je retranche 30 de 30, & il reste 0, qu'il est inutile d'écrire, n'y ayant pas de chiffres dans les rangs qu'il devroit précéder.

La division de ce premier membre est achevée, & j'ai pour reste 34.

3° Je mets un point sous 5 qui précède dans le dividende le premier membre que je viens de diviser, & j'écris 5 au devant du reste 34, & j'ai 345 pour le second membre de ma division. Mais le diviseur 378 n'étant pas contenu dans ce second membre, j'écris au quotient 0 pour le quotient du second membre, & la division de ce membre est achevée.

4°. Je mets un point sous le chiffre 2 du dividende qui précède le dernier chiffre transporté, & j'écris 2 au devant de 345, & j'ai 3452 pour le troisième & dernier membre de ma division. J'écris au dessous les trois points qui marquent les places des chiffres du diviseur sous ce membre, & 34 est le nombre qui se trouve sur le dernier point. Je dis ensuite 3, dernier chiffre du diviseur, est contenu 11 fois dans 34 qui est sur le dernier point: mais je ne puis écrire que 9 pour le quotient d'un membre, ainsi j'écris 9 au quotient; & je dis $9 \times 8 = 72$; jôte 72 de 72, ajoutant 7 dizaines à 2 pour en pouvoir soustraire 72, & j'écris le reste qui est 0 sous 2, & je retiens 7 dizaines que j'ai ajoutées à 2. Puis je dis $9 \times 7 = 63$, $63 \rightarrow 7$ dizaines que je retiens $= 70$. Jôte 70 de 75, en ajoutant 7 dizaines à 5, j'écris le reste 5 sous 5, & je retiens 7 dizaines que j'ai ajoutées à 5 pour en pouvoir soustraire 70. Enfin je dis $9 \times 3 = 27$; $27 \rightarrow 7$ que je retiens $= 34$. Je retranche 34 de 34, & le reste est 0, qu'il est inutile d'écrire. La division est achevée, puisqu'il n'y a plus de chiffre du dividende à transporter, & le quotient est 809 $\frac{1}{378}$.

REMARQUES.

REMARQUES.

1.

ON connoît que le chiffre qu'on a pris pour le quotient d'un membre est trop grand, lorsque le produit de ce quotient par le dernier chiffre du diviseur, augmenté des dizaines qu'on est obligé de lui ajouter dans l'opération, surpasse le nombre qui est sur le dernier point. Par exemple, dans le dernier membre de l'exemple précédent, l'on a trouvé que le produit 27 de 9 \times 3 augmenté de 7 dizaines qu'on retenoit, faisoit 34; si le nombre qui est sur le dernier point eût été moindre que 34, l'on eût reconnu par là que le quotient 9 du dernier membre eût été trop grand.

2.

Voici la pratique dont il faut se servir pour connoître, en divisant un membre, quel est le vrai quotient de ce membre, avant de l'écrire au quotient. Supposé que 9345 soit un membre à diviser, & que le diviseur soit 1987. L'on dira le dernier chiffre 5 du diviseur est contenu 9 fois dans le chiffre 9 qui est sur le dernier point. Or pour examiner si le quotient 9 est trop grand, je n'écris point 9 au quotient; je m'imagine seulement qu'il y est écrit, & je fais la multiplication & la soustraction, l'une & l'autre de gauche à droite, en commençant par les chiffres les plus à la gauche, & je dis le quotient 9 multipliant le dernier chiffre 5 du diviseur, le produit est 9. Je retranche par l'esprit ce produit 9, du nombre 9 qui est sur le dernier point dans le membre à diviser, & il ne reste rien. Ainsi il n'y a sur le pénultième point que 3 dans le membre à diviser. Je dis ensuite le quotient 9 multipliant le pénultième chiffre 9 du diviseur, le produit est 81. Or 81 surpasse le nombre 3, qui est dans le dividende sur le pénultième point; ainsi 81 ne sauroit se retrancher de 3. Je suis sûr par là, que le quotient 9 est trop grand pour ce membre à diviser. Il faut voir si 8 ne seroit point aussi trop grand pour le quotient de ce membre.

J'imagine 8 pour le quotient de ce membre, & je dis 8 \times 7

N

$= 8$. J'ôte par l'esprit le produit 8 du nombre 9 qui est dans le dividende sur le dernier point, & il reste 1, qui étant joint à 3, qui est sur le point précédent, fait 13. Ainsi je retiens en mon esprit qu'il n'y a que 13 sur le point qui précède le dernier. Je dis ensuite $8 \times 9 = 72$. J'ôte par l'esprit 72 de 139, ce qui ne se peut pas faire; ainsi le quotient 8 est trop grand.

Je conçois 7 pour le quotient, & je dis $7 \times 1 = 7$. J'ôte 7 de 9, & il reste 2 qui fait 23 avec 3 qui précède 9. Ainsi je retiens qu'il y a 23 sur le point qui précède le dernier, & je dis $7 \times 9 = 63$. Or 63 ne peut pas être ôté de 23. Ainsi le quotient 7 est trop grand.

Je suppose 6 pour le quotient, & je dis $6 \times 1 = 6$. J'ôte 6 de 9, & il reste 3 qui fait 33 avec 3 qui précède 9 dans le dividende; ainsi il me faut concevoir 33 sur le point qui précède le dernier. Je dis ensuite $6 \times 9 = 54$. Or 54 surpasse 33 dont il faudroit le retrancher. Ainsi le quotient 6 est encore trop grand.

Je prens donc 5 pour le quotient, & je dis $5 \times 1 = 5$. J'ôte 5 de 9 & il reste 4 qui fait 43 avec 3, & je dis $5 \times 9 = 45$. Or 45 ne peut pas être retranché de 43. Ainsi le quotient 5 est encore trop grand.

Cela me fait supposer 4 pour le quotient, & je dis $4 \times 1 = 4$. J'ôte 4 de 9 & il reste 5, qui fait 53 avec 3 du dividende. Ainsi il y a 53 sur le point qui précède le dernier. Je dis ensuite $4 \times 9 = 36$. J'ôte 36 de 53, & il reste 17. Comme je vois que ce reste, qui a deux rangs, me suffira pour la division du membre que je divise, j'écris 4 au quotient; & je fais la division de ce membre à l'ordinaire, en disant $4 \times 7 = 28$. J'ôte 28 de 35, en 9345 $\left(\begin{array}{r} 1987 \\ 4 \end{array} \right.$ ajoutant 3 dizaines à 5 pour en pouvoir soustraire 28, & j'écris le reste 7, & je retiens 1397 3 dizaines. Puis je dis $4 \times 8 = 32$. $32 \rightarrow 3$ que je retenois $= 35$. J'ôte 35 de 44, en ajoutant 4 dizaines à 4 pour en pouvoir ôter 35, & il reste 9 que j'écris. Puis je dis $4 \times 9 = 36$. $36 \rightarrow 4$ que je retenois $= 40$. J'ôte 40 de 43, en ajoutant 4 dizaines à 3 pour en pouvoir ôter 40, & il reste 3 que j'écris, & je retiens les 4 dizaines que j'ai ajoutées; & je dis enfin, $4 \times 1 = 4$. $4 \rightarrow 4$ que je retenois $= 8$. J'ôte 8 de 9, & j'écris le reste 1; & la division de ce membre est achevée.

Si je n'eusse pas trouvé un reste 17, qui eût eu deux rangs de chiffres, en ôtant le produit 36, fait du quotient supposé 4 par 9, de 53; c'est à dire, si je n'eusse eu un reste que d'un chiffre; j'aurois continué par l'esprit de prendre le produit du quotient supposé 4 par les chiffres restans 8 & 7 du diviseur, pour m'assurer si ces produits eussent pu se retrancher du membre à diviser; & je n'aurois écrit au quotient le chiffre 4, pour le quotient de ce membre, qu'après m'être assuré, (en faisant la multiplication de gauche à droite de tous les chiffres du diviseur les uns après les autres par ce quotient supposé 4, & en ôtant par l'esprit tous les produits particuliers, du membre à diviser,) que le produit du quotient supposé 4 par le diviseur, est contenu dans le membre à diviser.

Démonstration du Problème.

133. Il est évident qu'on trouve, par les Regles qu'on a données pour la division, le nombre qui exprime combien d'unités de fois, de dizaines de fois, de centaines de fois, &c. le diviseur est contenu dans le dividende; puisqu'en retranchant par l'opération même tout autant de fois le diviseur du dividende, il ne reste rien, quand la division est exacte; c'est à dire sans reste. Ces Regles font donc trouver le nombre qui contient l'unité autant de fois que le diviseur est contenu dans le dividende; c'est à dire qu'elles font découvrir * le véritable quo- 115.
tient que l'on cherchoit.

Dans le premier exemple, il est évident que le diviseur 342 est contenu dans le dividende de 83106, 200 fois \rightarrow 40 fois \rightarrow 3 fois; puisqu'en retranchant le diviseur du dividende 100 fois \rightarrow 40 fois \rightarrow 3 fois, il ne reste rien.

Quand il y a un reste après la division, il est évident que si l'on ôtoit du dividende le reste, qui est toujours moindre que le diviseur, avant de faire la division, le quotient qu'on trouveroit par les Regles, exprimeroit exactement le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le dividende diminué de ce reste. Ainsi elles font trouver le quotient qui exprime combien de fois le diviseur est contenu exactement dans le dividende, & ce que le dividende contient de surplus. Voici même la démonstration qui fait voir comment le quotient qu'on trouve par la division & la fraction qui se forme du reste, en écrivant le reste au numérateur, & le diviseur au dénominateur; comment,

dis-je, ce quotient & cette fraction, joints ensemble, font le quotient total de la division; on se servira ici du troisième exemple. On nommera le dividende 305852, D ; le diviseur 378, d ; le reste qu'on trouve par la division, qui est 50, sera nommé r ; le quotient 809, q , il faut démon-

* 106. prouver que $D : d :: q \div \frac{1}{2} : 1$; & il s'ensuivra * que $q \div \frac{1}{2}$ est

* 107. le quotient total. 1°. $D - r$, qui est le dividende D , dimi-

* 111. nué du reste r est égal à * qd . Ainsi $D = qd \div r$. 2°. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$
& 109. : * $qd \div r$. $d :: D : d$. Or $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$. Et $\frac{1}{2} = * \frac{1}{2}$

* 117. = * q , ainsi $q \div \frac{1}{2} : 1 :: D : d$. Ce qu'il falloit démontrer.

Enfin, pour ne rien laisser sans démonstration de tout ce que l'on a dit qui étoit nécessaire pour la pratique de la division, on va démontrer que le quotient de chaque membre de la division ne peut pas surpasser 9, comme

* 130. on l'a dit dans la * quatrième Remarque. 1°. Ou le premier membre de la division n'a que le même nombre de rangs de chiffres que le diviseur, comme dans le premier exemple; & dans ce cas le diviseur ne peut pas être contenu dans ce premier membre plus de neuf fois. Car en ajoutant un 0 au diviseur 342, on aura le nombre 3420, qui surpasse le premier membre 831, celui-ci ayant un rang de chiffres de

* 15. moins. Or 3420 * contient exactement 10 fois le diviseur 342 : donc le premier membre 831 contient le diviseur 342 moins de 10 fois.

2°. Ou bien le premier membre de la division contient un rang de plus que le diviseur, comme dans le troisième exemple. il ne peut contenir qu'un rang de plus que le diviseur; puisque, s'il contient un rang de plus, le diviseur y est toujours contenu. Dans ce cas le dernier chiffre 3 du premier membre ne peut pas surpasser le dernier chiffre 3 du diviseur; & il faut, ou qu'ils soient égaux, comme dans le troisième exemple; & dans ce cas les chiffres 78 du diviseur, qui précèdent le dernier 3, doivent surpasser les chiffres 05 qui précèdent le dernier chiffre du premier membre; car autrement le diviseur 378 seroit contenu dans les trois premiers chiffres du dividende, & il ne faudroit pas prendre un qua-

trième chiffre du dividende pour faire le premier membre. Or dans ce cas si l'on écrit un 0 devant le diviseur 378, il est évident * que le nombre 3780 contiendra exactement 10 fois le diviseur 378, il est aussi évident que 3780 surpasse le membre à diviser 3058, à cause des chiffres 78 du diviseur plus grands que les chiffres 05 du membre à diviser. Donc le premier membre 3058 ne contient pas 10 fois le diviseur. Ou bien enfin il faut que le dernier chiffre du premier membre à diviser soit moindre que le dernier chiffre du diviseur, ce qui arrive le plus ordinairement, comme dans cet exemple où le diviseur est 952, & le membre à diviser 2345 (952 est 2345. Dans ce dernier cas de ce second article, il est évident qu'en ajoutant un 0 au devant du diviseur, on aura 9520 * qui contient exactement 10 fois le diviseur 952. Il est aussi évident que le membre à diviser 2345 est moindre que 9520, à cause du dernier chiffre 9 du diviseur plus grand que le dernier chiffre 2 du membre à diviser. Donc le diviseur 952 est contenu moins de 10 fois dans le membre à diviser.

Il suit, de ce que l'on vient de démontrer, que le quotient du premier membre ne peut surpasser 9. Mais l'on peut appliquer de suite aux membres suivans de la division, ce que l'on vient de démontrer du premier membre; parceque le reste qui vient de la division du premier membre, & de même le reste de chacun des autres, dont toujours être moindre que le diviseur; ce qui est cause qu'en ajoutant à chacun de ces restes le chiffre du dividende que prescrit la Règle de la division, pour faire chacun des membres suivans, chacun de ces membres ne peut avoir qu'un rang de chiffres de plus que le diviseur, ou un même nombre de rangs. Par conséquent, suivant la démonstration qu'on vient de donner pour le premier membre, le quotient de chacun des autres ne peut surpasser 9.

La maniere de s'assurer que l'on a suivi exactement les Regles de la Division en faisant une Division, & celles de la Multiplication en faisant une Multiplication.

LES démonstrations des Problèmes de la Division & de la Multiplication font voir clairement que les Regles que l'on a données, font découvrir infailliblement le quotient que l'on

cherchoit par la division, & le produit que l'on cherchoit par la multiplication. Mais pour s'assurer que l'on a suivi ces règles dans la pratique, il faut, après avoir fait une division, multiplier le diviseur & le quotient l'un par l'autre; & s'il n'y a point eu de reste dans la division, & que l'on trouve pour produit le dividende même; c'est une marque que la division est bien faite; & s'il s'est trouvé un reste à la fin de la division, il faut ajouter ce reste au produit du diviseur multiplié par le quotient; & si l'on trouve que la somme de ce produit & du reste soit égale au dividende, on est assuré par-là que la division est bonne.

Pour s'assurer de même qu'une multiplication est bien faite, il faut diviser le produit que l'on a trouvé par la multiplication, il faut, dis-je, diviser ce produit par l'un des deux côtés du produit, & si l'autre côté est le quotient exact de la division, & qu'il n'y ait aucun reste; c'est une marque que la multiplication est bonne.

Ces preuves, pour s'assurer de la bonté d'une division & d'une multiplication, sont fondées sur ce que le dividende doit être contenu autant de fois dans le dividende que le quotient contient de fois l'unité. Ainsi, * en multipliant le diviseur par le quotient, on doit trouver le dividende pour produit. Par la même raison, en divisant un produit par l'un de ses côtés, on doit trouver l'autre côté pour le quotient exact de la division.

La Division des nombres qui contiennent des parties décimales.

134. **P**OUR faire la division des nombres qui contiennent des parties décimales, 1^o, il faut que les parties décimales du dividende soient plus petites que les parties décimales du diviseur, ou du moins qu'elles leur soient égales. C'est pourquoi s'il falloit diviser un nombre entier ou un nombre qui ne contient que des dixièmes par un diviseur qui eût des millièmes, il faudroit réduire le nombre entier ou le nombre qui ne contient que des dixièmes, & qui est le dividende, au moins en millièmes, & même il est bon de la réduire en parties décimales beaucoup moindres que celles du diviseur, comme en millionnièmes, ou encore en plus petites. Cela se fait * sans

changer la valeur du dividende, en lui ajoutant autant de zero qu'il en faut pour cette réduction, & en marquant le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers.

2°. Il faut ensuite faire la division précisément * de la ^{126.} même manière que si le dividende & le diviseur étoient des nombres entiers.

3°. Pour distinguer les parties décimales dans le quotient d'avec les entiers, il faut mettre autant de rangs pour les parties décimales qu'en contient le dividende de surplus après en avoir ôté les rangs des parties décimales du diviseur; c'est à dire, si le diviseur contient trois rangs de parties décimales, & le dividende cinq rangs, le quotient doit ne contenir que deux rangs de parties décimales, parceque deux est ce qui reste de cinq, après en avoir ôté trois. D'où l'on voit que si le diviseur & le dividende avoient le même nombre de rangs de parties décimales, le quotient ne contiendrait que des entiers sans parties décimales; & que si le diviseur étoit un nombre entier sans parties décimales, le quotient contiendrait autant de rangs de parties décimales qu'en contient le dividende.

E X E M P L E.

Pour diviser 2.62842¹²⁷ par 1.234¹²⁸.
$$\begin{array}{r} 2.62842^{\circ} \left(\begin{array}{r} 1.234 \\ 2.13 \end{array} \right. \begin{array}{l} b \\ a \end{array} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 1604 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 3702 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0000 \end{array}$$

2°. Le dividende c ayant cinq rangs de parties décimales, & le diviseur b trois rangs, le dividende est tout préparé, & il n'est point nécessaire de le réduire à des parties décimales plus petites. 2°. Il faut faire la division comme dans les nombres entiers. 3°. Il faut marquer deux rangs de parties décimales au quotient, parceque le dividende ayant cinq rangs de parties décimales & le diviseur trois rangs, deux est le surplus de cinq sur trois.

Démonstration de la Division des nombres qui contiennent des parties décimales.

ON nommera C le nombre entier 262842; le nombre décimal 2.62842 sera nommé c ; le nombre entier 1234, B ; le nombre décimal 1.234, b ; le nombre entier 213, A ; le nombre décimal 2.13, a .

- * 126. 1°. Il est évident * que A est le quotient de C divisé par B .
 * 105. Ainsi $A = \frac{C}{B}$. Le quotient de c divisé par B * peut s'exprimer
 * 109. ainsi $\frac{c}{B}$. Mais $\frac{c}{B} :: C : c$. Et c (2. 61842) * vaut précie-
 * 18. sement cent mille fois moins que C (261842.) Donc $\frac{c}{B}$ doit
 valoir cent mille fois moins que $\frac{C}{B}$. Pour faire valoir $\frac{c}{B} = 123$
 * 18. cent mille fois moins qu'il ne vaut, il faut écrire * 0. 00213*.
 Ainsi $\frac{c}{B} = 0. 00213$. L'on a donc déjà démontré que quand
 le dividende c contient des parties décimales, & que le divi-
 seur B ne contient que des entiers, le quotient $\frac{c}{B}$ doit contenir au-
 tant de rangs de parties décimales qu'en contient le dividende.
 2°. Le quotient de $c = 2. 61842$ divisé par $b = 1. 234$ peut
 * 105. s'exprimer ainsi * $\frac{c}{b}$. Mais $\frac{c}{b} :: * b. B$. Et $B = 1234$ *
 * 121. vaut mille fois plus que $b = 1. 234$. Donc le quotient $\frac{c}{b}$ doit
 * 18. valoir mille fois plus que $\frac{c}{B} = 0. 00213$: & pour faire valoir
 * 12. $\frac{c}{b} = 0. 00213$ mille fois plus qu'il ne vaut * il faut avancer le
 point qui distingue les parties décimales de trois rangs vers la
 droite de cette manière 0002. 13. Ainsi $\frac{c}{b} = 0002. 13$. L'on a
 donc démontré que pour avoir le nombre des rangs des parties
 décimales du quotient venu de la division d'un nombre déci-
 mal qui a plus de rangs de parties décimales que le diviseur, il
 falloit ôter le nombre des rangs des parties décimales du divi-
 seur du nombre des rangs des parties décimales du dividende,
 & que le surplus étoit le nombre des rangs des parties décima-
 les du quotient.

D'où il suit qu'en divisant 0. 080850 par 0. 35 ; le quotient
 sera 0. 2310. Si le diviseur étoit 0. 035, le quotient seroit
 2. 310. Si le diviseur étoit 0. 00035, le quotient seroit l'en-
 tier 2310 sans parties décimales.

*Usage de la Division des nombres qui contiennent des parties
 décimales dans les Divisions qui ne sont pas exactes, c'est à
 dire, dans lesquelles on trouve une fraction outre le quotient
 qui est un nombre entier.*

135. L'ON a démontré * que quand il y avoit un reste après la
 * 133. division, le quotient que l'on trouvoit en nombres entiers joint
 à la fraction qui a le reste pour numérateur, & le diviseur pour
 dénominateur, étoit le quotient total de la division.

Or

Or le calcul des parties décimales se faisant comme celui des nombres entiers, l'on a trouvé qu'il étoit très commode dans les Sciences Mathématiques-Pratiques de réduire la fraction, qui est une partie du quotient, en parties décimales; parcequ'après être arrivé, en continuant la division, à des parties décimales très petites, par exemple,

$$\begin{array}{r}
 305852 \quad \left\{ \begin{array}{l} 378 \\ 809.132275^{re} \end{array} \right. \\
 \dots\dots \\
 \text{4. 5. 6. membre: } 3452 \\
 \dots\dots \\
 500 \text{ reste qu'on continue de diviser.} \\
 \dots\dots \\
 1220 \\
 \dots\dots \\
 860 \\
 \dots\dots \\
 1040 \\
 \dots\dots \\
 2840 \\
 \dots\dots \\
 2940 \\
 \dots\dots \\
 50
 \end{array}$$

, à des millionnièmes; on peut négliger ce qui reste, comme étant insensible dans la pratique, & comme ne pouvant causer d'erreur sensible. Voici comment cela se fait.

On prendra pour exemple le troisième, où après avoir divisé 305852 par 378, l'on a trouvé pour quotient le nombre entier 809, & pour reste de la division le nombre 50. Il faut mettre après le quotient 809 un point pour distinguer les parties décimales que l'on découvrira, d'avec les entiers 809 déjà découverts; ajouter un 0 au reste 50, ce qui donnera le nouveau membre de la division 500. Il faut diviser ce membre par le diviseur 378, & écrire au quotient le chiffre 1 qu'on trouvera pour le quotient de ce membre qui sera une dixième; & après avoir divisé ce membre, il faudra ajouter un 0 devant le reste 122, ce qui donnera un nouveau membre 1220, dont on écrira le quotient 3 au devant du quotient déjà trouvé; & après en avoir divisé ce membre, on ajoutera un 0 devant le reste 86, & l'on continuera de diviser le nouveau membre 860 toujours par le même diviseur 378, d'en écrire le quotient 2 au devant du quotient déjà découvert, & après avoir divisé ce membre, on continuera d'ajouter un 0 devant le reste 104; on continuera, dis-je, ainsi la division tant qu'on voudra. On l'a continuée ici jusqu'aux millionnièmes, & l'on a trouvé qu'en divisant 305852 par 378, le quotient étoit

809. 131275". On peut négliger le reste qui est moindre qu'une millionième.

- Voici la raison de cette opération. C'est la même chose d'ajouter 0 après le reste 50 de la division, qui a donné pour quotient le nombre entier 809, que d'ajouter ce 0 au dividende 303852, * ce qui le réduiroit en dixièmes, car l'on auroit 303852. 0. Ainsi le quotient 1 qu'on trouve, après le quotient en entiers 809, * vaut des dixièmes. C'est aussi la même chose d'ajouter successivement 0 à chacun des restes des divisions des membres suivans, que d'ajouter ces zéros en même temps au dividende 303852. Or en ajoutant, par exemple 6 zéros à ce dividende, * on le réduiroit en millionièmes, &c le quotient que l'on trouveroit ensuite * contiendrait outre le nombre entier 809, le nombre décimal 0. 131275" qui vaut des millionièmes.

Usage de la Division dans les nombres de différentes especes pour réduire les moindres especes aux plus grandes.

136. **D**ANS les nombres de différentes especes, la division sert à réduire les moindres especes aux plus grandes. Pour cela il faut diviser le nombre qui contient celle des moindres especes, qu'on veut réduire à une plus grande, par le nombre qui exprime combien de fois cette moindre espece est contenue dans la plus grande à laquelle on veut la réduire, &c le quotient sera la valeur de cette moindre espece réduite à la plus grande. Ainsi pour réduire 120 pouces en pieds, il faut diviser 120 par 12, qui est le nombre qui exprime combien de fois un pouce est dans un pied, &c le quotient 10 pieds sera la valeur de 120 pouces réduits en pieds. Pour réduire 100 pieds en toises, il faut diviser 100 pieds par 6, qui est le nombre qui exprime combien de fois un pied est dans une toise, &c le quotient 16 toises $\frac{4}{3}$ de toise sera la valeur de 100 pieds réduits en toises; c'est à dire que 100 pieds valent 16 toises plus $\frac{4}{3}$ sixièmes d'une toise, c'est à dire plus 4 pieds. Pour réduire des pouces immédiatement à des toises, il faut diviser le nombre qui exprime les pouces par 72, parcequ'un pouce est 72 fois dans une toise.

Il n'est pas nécessaire, pour réduire une moindre espece à une plus grande, que le nombre qui exprime la moindre

surpasse le nombre qui exprime combien de fois cette moindre espece est contenue dans la plus grande . Ainsi pour réduire 5 pouces en pieds, il faut écrire $\frac{5}{12}$, & cette fraction marque que 5 pouces valent cinq douzièmes d'un pied. De même pour réduire 5 pouces en toises, on écrira $\frac{5}{72}$, ce qui signifie cinq septante deuxièmes de pieds. Car $\frac{1}{12}$ * est le quotient de 5 divisé par 6, & $\frac{1}{72}$ * est le quotient de 5 divisé par 72. * 112.

Ce qu'on vient de dire des nombres de différentes especes, par rapport aux toises, doit s'appliquer aux nombres de différentes especes, par rapport aux autres grandeurs.

REMARQUE.

ON peut remarquer que c'est par le moyen de la division qu'on partage à un nombre déterminé de personnes, ce que chacune doit avoir d'une somme déterminée, par exemple, pour partager 30000 livres à 30 personnes, il faut diviser 30000 par 30, & le quotient 1000 liv. sera la part de chacun. Que c'est de même par la division qu'on trouve combien une somme déterminée doit produire d'intérêt au denier 20, au denier 18, au denier 15, ou à un autre denier. Car on entend par le denier 20 d'intérêt d'une somme, par exemple, de 40000 livres, la vingtième partie de cette somme, par le denier 15, la quinzième partie, & ainsi des autres. D'où l'on voit que pour trouver cet intérêt il faut diviser la somme proposée par 20, ou par 15, &c. & le quotient sera ce que l'on cherche.

La division sert de même à résoudre beaucoup de questions de pratique dans le Commerce; & il suffit de les entendre pour trouver leur résolution, sans qu'il soit nécessaire d'en parler dans cet Ouvrage des calculs, qui est principalement pour résoudre les questions des Mathématiques.

La Division des nombres de différentes especes.

137. POUR diviser un nombre qui contient différentes especes par un autre nombre qui contient aussi différentes especes, la Regle generale est * de réduire l'un & l'autre à la plus petite espece; de diviser ensuite le dividende réduit à la moindre espece par le diviseur aussi réduit à la moindre espece; & quand on aura trouvé le quotient (ce quotient

- * 136. n'exprime que la moindre espèce) on le réduira * aux plus grandes espèces par la division.

LA DIVISION DES GRANDEURS LITTÉRALES.

La Division des grandeurs littérales complexes.

PROBLÈME

138. **DIVISER** une grandeur littérale complexe donnée par une autre grandeur littérale complexe aussi donnée, & en trouver le quotient.

RÈGLE ou *opération*. Il y a trois choses à faire dans la division des grandeurs littérales complexes pour en trouver le quotient. 1°. Quand le dividende & le diviseur sont précédés de nombres entiers qui marquent combien chacun est pris de fois, il faut diviser, par la division des nombres entiers, le nombre qui précède le dividende par le nombre qui précède le diviseur, & le quotient sera le nombre qui doit précéder le quotient littéral qu'on cherche. Ainsi pour diviser $12ab$ par $3a$, il faut diviser 12 par 3, & le quotient 4 devra précéder le quotient littéral quand on l'aura trouvé. Quand même la division des nombres, qui précèdent le dividende & le diviseur, donneroit une fraction pour quotient, il ne faudroit pas moins marquer cette fraction au devant du quotient littéral. Par exemple, si l'on divisoit $3ab$ par $2a$, le quotient du nombre 3, divisé par 2, seroit $\frac{3}{2}$, & il faudroit écrire $\frac{3}{2}$ au devant du quotient littéral qu'on trouveroit. Mais pour ne pas multiplier les difficultés, on évitera dans la division des grandeurs complexes celles qui viendroient de ces fractions numériques que l'on expliquera à fond dans le Livre suivant, & on supposera dans la division des grandeurs complexes que le nombre qui précède chaque dividende, peut se diviser exactement par le nombre qui précède le diviseur.

- 2°. Il faut trouver le quotient du dividende littéral par le diviseur littéral, & cela renferme trois cas. Le premier est quand le dividende & le diviseur n'ont aucune lettre commune. Dans ce cas le quotient * est la fraction dont le dividende est le numérateur, & dont le diviseur est le dénominateur. Par exemple, pour diviser $12ab$ par $2c$, il faut

écrire la fraction $\frac{a}{c}$ pour le quotient. Car $a : 12ab. 2c :: 111.$
 $1 : \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2c} . x :: a : \frac{a}{c} . x$. De même $\frac{1}{2}$ est le quotient de b divisé
 par a .

Le second cas est quand le diviseur a quelques lettres communes avec le dividende, & non pas toutes, comme s'il falloit diviser abc par ad . Dans ce cas le quotient est encore une fraction, il faut écrire pour le numérateur les lettres du dividende qui ne sont pas dans le diviseur, & pour dénominateur les lettres du diviseur qui ne sont pas communes avec le dividende. Ainsi pour diviser abc par ad , on écrira pour quotient $\frac{bc}{d}$. Car $abc. ad :: bc. d :: \frac{bc}{d} . x$. Ainsi $\frac{bc}{d}$ est le quotient de abc divisé par ad . De même pour diviser a^2b par a^2bc , il faut écrire $\frac{1}{c}$ pour quotient.

Le troisième cas est quand toutes les lettres du diviseur se trouvent dans le dividende, comme s'il falloit diviser ab par b , ou a^2b par a^2b ; dans ce cas les lettres du dividende qui restent, après en avoir effacé les lettres du diviseur, sont le quotient. Ainsi a est le quotient de ab divisé par b , ab est le quotient de a^2b divisé par a^2b . La raison en est évidente, car $ab :: a : b$ étant le produit de b multiplié par a , l'on a cette proportion $a : b :: ab : a$. D'où l'on tire la proportion inverse $ab : b :: a : 1$. Ainsi a est le quotient de ab divisé par b .

Dans ce troisième cas le quotient littéral est une grandeur entière, & l'on ne se servira que de cette division des grandeurs complexes, où le quotient est une grandeur entière, dans la division des grandeurs complexes, jusqu'à ce qu'on ait expliqué dans le Livre suivant le calcul des fractions.

3°. Il faut diviser le signe $+$ ou $-$ qui précède le dividende par le signe $+$ ou $-$ qui précède le diviseur; voici la Règle qu'il faut suivre, pour trouver le signe du quotient.

Règle des signes $+$ & $-$ dans la Division.

139. QUAND le signe du dividende & celui du diviseur sont tous deux $+$, ou tous deux $-$, le signe du quotient est toujours $+$.

Quand les signes du dividende & du diviseur sont différens, c'est à dire, que l'un est $+$ & l'autre $-$; le signe du quotient est toujours $-$.

Démonstration. Il y a dans la division une proportion inverse de celle qui est dans la multiplication. Dans la multiplication de b par a , il y a cette proportion $a : b :: ab : 1$.

- * 106. Et la proportion inverse $ab, b :: a, 1$ se trouve dans la division. Ainsi dans la division le dividende ab est le produit de la multiplication. Le diviseur b est le multiplié; le quotient a est le multiplicateur, & l'unité positive est le quatrième terme. D'où l'on voit qu'en multipliant le diviseur b par le quotient a , le produit est le dividende ab .

Il suit de-là évidemment, par rapport aux signes $+$ & $-$, que le quotient dans la division doit avoir le même signe, que le multiplicateur dans la multiplication.

- Or, 1° Quand le produit ab a le signe $+$, & le multiplié b le signe $+$; cela vient de ce que * le multiplicateur a a nécessairement le signe $+$, & la proportion est $1. + a :: + b. + ab$. 2° Quand le produit ab a le signe $-$, & le multiplié b le signe $-$; cela vient de ce que * le multiplicateur a a le signe $+$. Et la proportion est $1. + a :: - b. - ab$. 3° Lorsque le produit ab a $+$, & le multiplié b a $-$; cela vient * de ce que le multiplicateur $-a$ a $-$. Et la proportion est $1. - a :: - b + ab$. 4° Enfin si le produit ab a $-$, & le multiplié b a $+$; le multiplicateur $-a$ a $+$, & la proportion est $1. - a :: + b. - ab$.

- Donc, 1° dans la division qui contient la proportion inverse de celle de la multiplication, si le produit, c'est à dire le dividende ab a le signe $+$ & le diviseur b , qui est le multiplié dans la multiplication, a aussi le signe $+$, le quotient a , qui est le multiplicateur dans la multiplication, * doit avoir $+$, & la proportion sera $ab. + b :: + a. + 1$.

Donc, 2° si le dividende ab a $-$, & si le diviseur b a aussi $-$; le quotient a doit avoir $+$, & la proportion sera $ab. - b :: + a. + 1$.

Donc, 3° si le dividende ab a $+$, & le diviseur b a $-$; le quotient $-a$ doit avoir $-$, & la proportion sera $ab. - b :: - a. + 1$.

Donc, 4° si le dividende ab a $-$, & le diviseur b a $+$; le quotient $-a$ doit avoir $-$, & la proportion sera $ab. + b :: - a. + 1$. Ce sont-là tous les cas qu'il falloit démontrer.

Cette démonstration de la Règle des signes pour la division est une suite évidente & nécessaire de celle qu'on a donnée dans l'art. 95 pour les signes de la multiplication; & il

est inutile de prolonger ce Traité d'une démonstration semblable à celle de cet article. Ceux qui en voudront une semblable, ne trouveront aucune difficulté à la faire eux-mêmes.

Exemples de division pour les grandeurs littérales incomplexes.

POUR diviser $+ 15a^2bc$ par $- 3abc$, 1°. j'écris le dividende, je tire un arc au devant, j'écris le diviseur au haut de cet arc, & je tire une ligne au dessous. La place du quotient sera sous cette ligne. Ensuite je dis $+ 15$ divisé par $- 3$ donne $- 5$ pour le quotient, j'écris $- 5$ au quotient. 2°. Je dis 15 divisé par 3 , le quotient est 5 , j'écris 5 au quotient. 3°. Enfin je dis a^2bc divisé par abc , le quotient est a^2c . J'écris a^2c au quotient, & le quotient de ma division est $- 5a^2c$.

I. EXEMPLE.

$$+ 15a^2bc \left\{ \begin{array}{l} - 3abc \\ - 5a^2c \end{array} \right.$$

II. EXEMPLE.

De même le quotient de $- 7a^2b$ divisé par $- ab$ est $+ 7a$.

III. EXEMPLE.

Le quotient de $- 12abc$ divisé par $+ 3a$ est $- 4bc$.

REMARQUE.

DANS toute fraction & dans tout rapport, la fraction est $*$ le quotient du numérateur divisé par le dénominateur. * 112. Ainsi il est bon de remarquer, par rapport aux lignes $*$ que * 139. $\frac{2}{3} = + \frac{2}{3}$, & de même $\frac{2}{1} = + \frac{2}{1}$; que $\frac{2}{2} = + \frac{2}{2}$; que $\frac{2}{3} = - \frac{2}{3}$. Enfin que $\frac{2}{2} = + \frac{2}{2}$.

COROLLAIRE.

140. **L**A division des grandeurs littérales incomplexes suffit pour faire la division d'une grandeur littérale complexe par un diviseur littéral in-complexe. Par e. $abxx + acxx - b'xx$ { $\frac{xx}{ab + ac - b'}$ exemple, pour diviser $abxx + acxx - b'xx$ par xx , il faut écrire au quotient $ab + ac - b'$, c'est

à dire, le quotient contient la somme des lettres des grandeurs littérales incomplexes qui restent au dividende après en avoir effacé toutes les lettres du diviseur, avec leurs mêmes signes.

* 139. gnes * quand le diviseur a $+$, & avec des signes oppoſez quand le diviseur a $-$.

La Diviſion des grandeurs littérales complexes.

PROBLÈME.

* 141. **DIVISER** une grandeur littérale complexe donnée par une autre grandeur littérale complexe auſſi donnée, & en trouver le quotient.

* 102. **RÈGLE** ou *operation*. 1°. Il faut ordonner * le dividende & le diviseur, par rapport à une même lettre qu'on peut choisir telle qu'on voudra, ſi ce n'est dans les diviſions dont le dividende & le diviseur contiennent les lettres qui marquent les inconnues qu'on cherche dans les Problèmes; dans ces diviſions l'on ordonne le dividende & le diviseur par rapport à ces lettres des inconnues. Quand le dividende & le diviseur ſont déjà ordonnez, on n'a pas beſoin de cette préparation.

Il faut enſuite écrire le dividende; tracer un arc au devant; écrire le diviseur au haut de cet arc, & tirer une ligne au deſſous. La place du quotient ſera ſous cette ligne.

Par exemple, pour diviſer $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$ *par* $2a^2 - 3ab$, *dont les termes ſont ordonnez par rapport à la lettre a, on*

commence par écrire le dividende & le diviseur comme on le voit ici.

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{r} 6a^3 - 13a^2b + 6ab^2 \\ 2a^2 - 3ab \end{array} \left(\begin{array}{r} 2a^2 - 3ab \\ 3a^2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{r} 6a^3 - 13a^2b + 6ab^2 \\ 0 \qquad 0 \\ - 4a^2b \end{array}$$

2°. Il faut diviſer le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, comme dans la diviſion des grandeurs incomplexes; en écrire le quotient ſous la ligne qui eſt ſous le diviseur; multiplier tous les termes du diviseur par ce quotient, & en même temps qu'on en trouve les produits, les retrancher du dividende, & en écrire le reſte au deſſous, quand il y en a un, ſ'il n'y a pas de reſte, on écrit 0.

Quand on ôte du dividende les produits du quotient multiplié

multiplié par les termes du diviseur, on tranche par une ligne les grandeurs du dividende sur lesquelles on a opéré, & qui ne doivent plus servir; mais pour la commodité de l'impression, on mettra un zero sous chaque grandeur du dividende qui ne doit plus servir.

Dans cet exemple je dis, $\rightarrow 6a^1$ divisé par $\rightarrow 2a^1$ donne pour quotient $\rightarrow 3a$, j'écris $\rightarrow 3a$ au quotient; ensuite je multiplie tous les termes du diviseur par ce quotient, & j'en ôte en même temps les produits du dividende, en disant $\rightarrow 3a \times 2a^1 = \rightarrow 6a^1$; pour ôter $\rightarrow 6a^1$ il faut supposer * que c'est $\rightarrow 6a^1$, & dire $\rightarrow 6a^1$ du dividende $\rightarrow 6a^1$ qui en est retranché, il reste 0, j'écris 0 sous $6a^1$ du dividende, pour me faire souvenir que je me suis servi de $6a^1$. Ensuite je dis $\rightarrow 3a \times 3ab = \rightarrow 9a^2b$, mais pour ôter $\rightarrow 9a^2b$, il faut s'imaginer que c'est $\rightarrow 9a^2b$, & dire $\rightarrow 13a^2b$ du dividende $\rightarrow 9a^2b$ qui en est retranché, le reste est $\rightarrow 4a^2b$, j'écris 0 sous $\rightarrow 13a^2b$, & j'écris au dessous le reste $\rightarrow 4a^2b$. Le reste du dividende après cette première opération est $\rightarrow 4a^2b \rightarrow 6ab^2$. Il faut continuer la division sur ce reste.

3^e Le reste qu'on a trouvé par l'opération précédente, & les grandeurs du dividende qui n'ont pas encore servi, sont le nouveau dividende qu'il faut continuer de diviser par le même diviseur, de la manière qu'on vient d'expliquer dans le second article. C'est à dire il faut diviser le premier terme de ce nouveau dividende par le premier terme du diviseur; en écrire le quotient devant celui qu'on a déjà trouvé; multiplier tous les termes du diviseur par ce nouveau quotient; & à mesure qu'on en trouve les produits, retrancher ces produits du dividende, & en écrire le reste au dessous, & s'il n'y a pas de reste, écrire 0 pour le reste.

Dans cet exemple le nouveau dividende est le reste $6a^1 \rightarrow 13a^2b \rightarrow 6ab^2$ $\left\{ \begin{array}{l} 2a^1 \rightarrow 3ab \\ \rightarrow 4a^2b \text{ qu'on a trouvé } 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{par l'opération précédente} \rightarrow 4a^2b \end{array} \right.$
joint aux grandeurs du dividende dont on ne s'est pas encore servi, c'est à dire le nouveau dividende est $\rightarrow 4a^2b \rightarrow 6ab^2$. Pour continuer la division je dis le quotient de $\rightarrow 4a^2b$ par $\rightarrow 2a^1$ est $\rightarrow 2b$; j'écris $\rightarrow 2b$ au quotient. Je multiplie tous les termes du diviseur par ce nouveau quotient, & à mesure que j'en trouve les produits, je les ôte du dividende, & j'en écris

le reste s'il s'en trouve, en disant $-2b \times +2a = -4ab$; mais pour ôter $-4ab$ il faut supposer que c'est $+4ab$; & dire $-4ab$ du dividende $+4ab$ qui en est retranché, le reste est 0 ; j'écris 0 sous $-4ab$; & je dis $-2b \times -3ab = +6ab$; mais pour ôter $+6ab$ il faut que je suppose $-6ab$, & je dis $+6ab$ du dividende $-6ab$ qui en est retranché, le reste est 0 ; j'écris 0 sous $+6ab$. Et comme il n'y a plus de grandeur dans le dividende, & que le reste est 0, la division est achevée, & elle est exacte. Le quotient est $3a - 2b$.

4°. Si l'opération précédente donne un reste, ce reste joint avec les grandeurs du dividende, dont on ne s'est pas encore servi, s'il y en a, fait un nouveau dividende qu'il faut diviser de la manière qu'on a expliquée dans le second & le troisième articles. L'on continue toujours la division jusqu'à ce qu'on trouve 0 pour le dernier reste, & alors la division est exacte, & le quotient qu'on a trouvé est exact ; ou bien jusqu'à ce qu'on trouve un reste qui ne peut plus se diviser par le diviseur, & alors on écrit le dernier reste pour numérateur d'une fraction, & le diviseur pour dénominateur, & le quotient en grandeurs entières joint avec cette fraction faite du dernier reste & du diviseur, est le quotient total de la division. D'où l'on voit que si l'on ôte du dividende le dernier reste avant que de faire la division, le dividende diminué de ce reste se diviserait exactement par le diviseur, & le quotient, qu'on a trouvé en grandeurs entières, seroit le quotient exact.

Exemples de la Division des grandeurs littérales complexes.

E X E M P L E I I

Pour diviser $a^2 - b^2$ par $a - b$, $a^2 \times \times - b^2$ ($\frac{a-b}{1}$), j'écris le dividende $a^2 - b^2$ en marquant par des étoiles les places des deux termes qui manquent, dans lesquelles devroient être les puissances a^2 & a ; je tire un arc au devant ; j'écris le diviseur $a - b$ au haut de cet arc, je tire une ligne au dessous, la place du quotient est sous cette ligne.

1°. Je dis a^2 divisé par a le quotient est a , j'écris a au quotient. Je dis ensuite $a \times a = +a^2$; mais pour ôter $+a^2$ il faut que je suppose $-a^2$. Et je dis $+a^2$ du dividende $-a^2$

qui en est retranché,

le reste est 0. J'écris $a^2 \times \times - b^2$ { $\frac{a-b}{a^2 + ab + b^2}$
 0 sous a^2 , &c je dis 0

$+ a^2 \times - b^2 = - a^2 b$; $+ a^2 b + ab^2$

mais pour ôter $- a^2 b$, 0 0

il faut que je suppose

$+ a^2 b$; &c comme il n'y a point de grandeur dans le dividende qui contie ne $a^2 b$, j'écris le reste $+ a^2 b$.

3°. Le reste $+ a^2 b$ joint à $- b^2$ du dividende fait le dividende nouveau $+ a^2 b - b^2$, sur lequel je continue la division, en disant $+ a^2 b$ divisé par $+ a$, le quotient est $+ ab$; j'écris $+ ab$ au quotient: je dis ensuite $+ ab \times + a = + a^2 b$, mais pour ôter $+ a^2 b$, il faut que je suppose $- a^2 b$, &c que je dise $+ a^2 b$ du dividende $- a^2 b$ qui en est retranché, le reste est 0; j'écris 0 sous $+ a^2 b$: &c je dis $+ ab \times - b = - ab^2$, pour retrancher $- ab^2$, il faut écrire $+ ab^2$ pour le reste, n'y ayant aucune grandeur dans le dividende qui contienne ab^2 , dont on puisse retrancher ab^2 . Ainsi j'écris $+ ab^2$ pour le reste.

4°. Ce reste $+ ab^2$ joint à $- b^2$ fait le dividende nouveau $+ ab^2 - b^2$. Je le divise en disant $+ ab^2$ divisé par $+ a$, le quotient est $+ b^2$. J'écris $+ b^2$ au quotient. Jedis ensuite $+ b^2 \times a = + ab^2$, pour retrancher $+ ab^2$ du dividende, il faut que je suppose $- ab^2$, &c que je dise ensuite $+ ab^2$ du dividende $- ab^2$ qui en est retranché, le reste est 0. J'écris 0 sous $+ ab^2$. Et je dis $+ b^2 \times - b = - b^3$. Mais pour retrancher $- b^3$, il faut que je suppose $+ b^3$, &c que je dise $- b^3$ du dividende $+ b^3$ qui en est retranché, le reste est 0; j'écris 0 sous $- b^3$.

Comme il n'y a plus de grandeur dans le dividende sur laquelle on n'ait opéré, &c que le dernier reste est 0, la division est exacte, &c le quotient $a^2 + ab + b^2$ est exact.

On peut remarquer que les produits qui se détruisent dans la multiplication en multipliant $a^2 + ab + b^2$ par $a - b$, viennent se représenter en divisant le produit de ces deux grandeurs qui est $a^3 - b^3$ par l'une des deux.

EXEMPLE III.

Pour diviser $c^2fx^3 - a^2cfx^3 - b^2c^2x^3 - 3b^2cfx + a^2b^2cx$
 $+ 3a^2b^2fx + 3b^2cx - 3ab^2$ par $cx - a$; après avoir ou-

P
P

dende — $3b^2cx$ qui en est retranché, le reste est 0, j'écris 0 sous $\div 3b^2cx$, & je dis $\div 3b^2x - a^2 = -3a^2b^2$. Or $-3a^2b^2$ devant être retranché, je suppose $\div 3a^2b^2$, & je dis $-3a^2b^2$ du dividende $\div 3a^2b^2$ qui en est retranché, le reste est 0, j'écris 0 sous $-3a^2b^2$. N'y ayant plus de grandeur au dividende sur laquelle je n'aye opéré, & le dernier reste étant 0, la division est exacte, & le quotient exact est $cx^2 - b^2cx - 3b^2fx \div 3b^2$.

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{r}
 x^3 \div nx^2 \div px^2 \div qx \div r \quad \left\{ \begin{array}{l} x^3 \div fx \div g \\ x^2 \div nx \div p \end{array} \right. \\
 \begin{array}{r}
 \circ \quad \circ \quad \circ \\
 -fx^3 - gx^2 - gnx - gp \\
 \circ \quad \circ \\
 -fx^2 \div fgx \div g^2 \\
 \circ \\
 \div fx^2 - fpx \div fgn \\
 \circ \\
 \div fgx - f^2g \\
 \div f^2nx \\
 -f^2x
 \end{array}
 \end{array}$$

On divisera de la même manière $x^3 \div nx^2 \div px^2 \div qx \div r$ par $x^2 \div fx \div g$, en disant le quotient de x^3 divisé par x^2 , est x . On écrira x au quotient, & l'on dira $\div x^2 \times x \div x^3 = \div x^3$, pour ôter $\div x^3$, il faut supposer $-x^3$, & dire $\div x^3$ du dividende $-x^3$ qui en est retranché, le reste est 0, il faut écrire 0 sous x^3 , & dire $\div x^2 \times x \div fx = \div fx^2$; mais pour ôter $\div fx^2$ il faut écrire $-fx^2$; & comme il n'y a point de grandeur dans le dividende semblable à fx^2 , il faut écrire le reste $-fx^2$ sous $\div nx^2$, & dire ensuite $\div x^2 \times x \div g = \div gx^2$, pour ôter $\div gx^2$ il faut écrire $-gx^2$ sous $\div px^2$, parcequ'il n'y a pas dans le dividende de grandeur semblable à gx^2 .

Pour continuer la division il faut dire $\div nx^2 - fx^2$ divisé par x^2 le quotient est $\div nx - fx$; il faut écrire au quotient $\div nx - fx$ l'une sous l'autre, parceque ces deux grandeurs se font qu'un même terme; puis il faut dire $\div nx - fx \times$
 $\div x^2 \div fx \div g = \div nx^2 - fx^2 \div fgn - f^2x^2 \div gnx - fgx^2$

mais pour ôter ce produit il faut en changer les signes, & l'on aura $-nx^3 + fx^3 - fnx^2 + f^2x^2 - gnx + fgx$. Comme dans le dividende les grandeurs $+nx^3 - fx^3$ sont semblables à $-nx^3 + fx^3$, & qu'elles se détruisent par des signes oppoſez, il faut écrire o ſous $+nx^3$ & ſous $-fx^3$. Mais il n'y a pas de grandeurs dans le dividende qui ſoient ſemblables à $-fnx^2 + f^2x^2 - gnx + fgx$; ainſi il faut écrire ces grandeurs, qui ſont des reſtes de la diſiſion qu'on vient de faire, ſous le dividende aux termes qui leur conviennent.

Pour pourſuivre la diſiſion il faut dire $+px^2 - gx^2 - fnx^2 + f^2x^2$ diviſé par $+x^2$, le quotient eſt $+p - g - fn + f^2$; ainſi il faut écrire au quotient les grandeurs $+p - g - fn + f^2$ les unes ſous les autres, parceque ces grandeurs ſont un même terme. Enſuite il faut dire $+p - g - fn + f^2 \times x^2 + fx + g = +px^2 - gx^2 - fnx^2 + f^2x^2 + fp - fg - f^2nx + f^3x + pg - g^2 - fgn + f^2g$; mais pour ôter ces produits du dividende, il faut changer leurs ſignes, & l'on aura $+px^2 + gx^2 + fnx^2 - f^2x^2 - fp + fg - f^2nx + f^3x + fgn - f^2g$. Parmi ces produits $-px^2 + gx^2 + fnx^2 - f^2x^2$ en ont d'égaux dans le dividende avec des ſignes contraires, ainſi ces grandeurs dans le dividende, & ces produits qui en ſont retranchez, donnent o pour reſte, & il faut écrire o ſous les grandeurs du dividende $+px^2 - gx^2 - fnx^2 + f^2x^2$. Les autres produits $-fp + fg + f^2nx - f^3x - gp + g^2 + fgn - f^2g$ n'ont pas de grandeurs ſemblables dans le dividende; ainſi il faut écrire ces reſtes de la diſiſion qu'on vient de faire, ſous le dividende, aux termes qui leur conviennent.

Le reſte qui doit ſervir de dividende contient deux termes, dont le premier eſt $+q - gn + fg - fp + fg + f^2n - f^3 \times x$; & le ſecond terme eſt $+r - gp + g^2 + fgn - f^2g$. Mais x n'étant que linéaire dans le premier terme du dividende, & x ayant deux diſiſions dans le premier terme $+x^2$ du diviſeur, la diſiſion ne ſçauroit ſe faire ſans fraction, c'eſt à dire le quotient du premier terme du dividende par le premier du diviſeur, ſeroit une fraction dont le dénominateur ſeroit x , & non pas une grandeur entière; ainſi la

division ne peut plus être continuée en grandeurs entières, & elle est achevée. Le quotient en grandeurs entières est celui qu'on a trouvé; il y a de plus un reste qu'on peut écrire si l'on veut au devant du quotient en fraction, dont le numérateur sera le dernier reste qu'on a trouvé, & le dénominateur sera le diviseur, & le quotient total de la division sera le quotient en grandeurs entières joint à cette fraction.

Démonstration de la Division des grandeurs littérales complexes.

142. ON se servira du premier exemple afin de rendre la démonstration plus claire.

Pour démontrer qu'en divisant une grandeur complexe, comme $6a^3 - 13a^2b + 6ab^2$, qu'on nommera D , par une autre grandeur complexe comme $2a^2 - 3ab$, qu'on nommera d , la Règle fait découvrir une grandeur, comme $3a - 2b$, qu'on nommera q , qui est le véritable quotient; il faut faire voir clairement que le dividende D est au diviseur d , comme le quotient q est à l'unité, c'est à dire, il faut démontrer * que $\frac{D}{d} = \frac{q}{1}$. En voici la démonstration. Il est évident par l'opération que le produit $q \times d$ du diviseur d multiplié par q (qui est le quotient que fait découvrir l'opération) est égal au dividende D ; puisqu'en ôtant ce produit $q \times d$ du dividende D , il ne reste rien quand la division est exacte. Donc * 1. $q \dots d \dots D$ * 71: Par conséquent l'on aura la proportion inverse * $\frac{D}{d} = \frac{q}{1}$. Cf. * 51, qu'il falloit démontrer.

Quand la division n'est pas exacte, & qu'il y a un reste, on démontrera en nommant ce reste r , comme dans l'article 133, que le quotient en grandeurs entières joint avec la fraction qui a le reste r pour numérateur, & le diviseur pour dénominateur, est le quotient total de la division, c'est à dire que $\frac{D}{d} = \frac{q + \frac{r}{d}}{1}$.

REMARQUES.

I.

LES Lecteurs qui commencent & qui veulent apprendre à fond les Mathématiques, doivent se rendre la Division très familière; pour cela il faut qu'ils fassent beaucoup

d'exemples. Voici la manière dont ils pourront former ces exemples. Ils prendront deux grandeurs complexes telles qu'il leur plaira ; ils feront homogènes toutes les grandeurs qui sont les parties des deux grandeurs complexes qu'ils auront choisies ; c'est à dire ils donneront à chacune des grandeurs incomplexes , qui composent une des grandeurs complexes qu'ils auront prise , le même nombre de dimensions ; & de même ils donneront le même nombre de dimensions à chaque partie de l'autre grandeur complexe : il n'est pas nécessaire que le nombre des dimensions des parties de l'une des grandeurs complexes , soit égal au nombre des dimensions des parties de l'autre. Ils s'accoutumeront par-là à la loi des homogènes qui donne de la facilité dans les calculs ; cependant ils n'en feroient pas moins la division , sans observer ainsi la loi des homogènes. Ils ordonneront chacune des grandeurs complexes par rapport à une même lettre , qui est arbitraire , pour distinguer les termes de ces grandeurs complexes.

Ils multiplieront ensuite l'une par l'autre les deux grandeurs complexes qu'ils auront choisies , & ils en ordonneront le produit total , par rapport à la même lettre qui leur a servi à distinguer les termes des deux grandeurs qu'ils ont multipliées l'une par l'autre.

Ils prendront le produit , qu'ils viennent de trouver , pour le dividende , & celle qu'ils voudront des deux grandeurs complexes qui ont servi à former ce produit , pour le diviseur : Ils feront la division , & ils trouveront pour quotient exact l'autre grandeur complexe qui a servi à former le produit , c'est à dire la division n'aura point de reste.

2.

On peut abréger les opérations de la division en ne multipliant point , pour chaque dividende particulier , c'est à dire pour chaque membre de la division , le premier terme du diviseur par le quotient de ce membre là , pour ôter le produit qui en vient , du premier terme de ce membre là , & il suffit d'effacer le premier terme du dividende d'un membre dès qu'on a trouvé son quotient , ou d'écrire 0 sous ce premier terme du dividende. Pour faire concevoir cet abrégé , on se servira de la troisième opération du quatrième exemple.

Le

Le dividende de cette troisième operation avoit pour premier terme $\rightarrow px^2 - gx^2 - fmx^2 \rightarrow f^2x^2$, pour second terme $\rightarrow gx - gmx \rightarrow fgx$, & pour troisième terme $\rightarrow r$. En divisant le premier terme de ce dividende par le premier terme x^2 du diviseur $x^2 \rightarrow fx \rightarrow g$, on a trouvé pour quotient $\rightarrow p - g - fm \rightarrow f^2$. Pour abréger, il faut, après avoir trouvé ce quotient, effacer le premier terme du dividende, ou écrire 0 sous chaque partie de ce premier terme du dividende. Ensuite il faut multiplier, non le premier terme x^2 du diviseur, mais les autres termes $\rightarrow fx \rightarrow g$ du diviseur par le quotient $\rightarrow p - g - fm \rightarrow f^2$ qu'on vient de trouver, & retrancher le produit que l'on trouve, des deux autres termes du dividende, & en écrire les restes sous ces deux autres termes du dividende, comme dans la troisième operation du quatrième exemple.

La raison de cet abrégé est évidente; car le produit du quotient, qu'on vient de trouver pour un membre de la division, par le premier terme du diviseur, doit être exactement le premier terme même du dividende de ce membre de la division. Ainsi pour ôter ce produit égal au premier terme du dividende, de ce premier terme du dividende, il n'y a qu'à effacer ce premier terme, ou écrire 0 au dessous pour le reste, puisque ce premier terme — un produit qui lui est égal, est 0.

3.

Quand le premier terme du dividende est complexe, & le premier terme du diviseur incomplexé, le quotient se trouve sans difficulté, comme on l'a pu voir dans les exemples, & sur-tout dans celui de la Remarque précédente. Mais quand le premier terme du dividende est complexe, & que le premier terme du diviseur est aussi complexe, il peut y avoir des cas où l'on ne trouve pas tout d'un coup le quotient. Pour faire concevoir plus clairement la méthode de trouver le quotient dans ces cas, on se servira d'un exemple où le premier terme du dividende or-

$$\begin{array}{rcl} 20a^2x^3 - 5ac^2x - c^3d^2 & & \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow 4ax - c^2 \\ - 2bx \end{array} \right. \\ \text{donné par rap. A} \quad \rightarrow 2abx^2 - 3b^2c^2x & & \\ \text{port à la lettre x,} & & \\ \text{est la grandeur} & & \\ & & \quad - 6b^2x^2 \rightarrow 4ad^2x \\ & & \quad - 2bd^2x \end{array}$$

complexe $\rightarrow 20a^2x^3 \rightarrow 2abx^2 - 6b^2x^2$, & le premier terme du

diviseur est aussi la grandeur complexe $+ 4ax - 2bx$. Comme on ne voit pas d'abord quel est le quotient du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, voici les méthodes qu'il faut suivre.

1°. Il faut voir si l'on ne pourroit point ordonner le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre différente de celle qu'on a prise, qui donnât pour premier terme du diviseur une grandeur incomplexe, il n'importe pas que cette lettre, qui donnera pour premier terme du diviseur une grandeur incomplexe, donne pour le premier terme du dividende une grandeur complexe, & même celle qui donnera pour premier terme du dividende une grandeur complexe qui aura plus de parties, rendra le calcul de la division plus court.

Dans cet exemple, en prenant a , ou b , ou c , pour ordonner le dividende & le diviseur, on rendra incomplex le premier terme du diviseur, & il n'importeroit pas laquelle prendre. Mais en prenant la lettre c pour ordonner le dividende & le diviseur, on rend le premier terme du diviseur incomplex, qui est ce que l'on cherche, & on rend en même temps le premier terme du dividende complexe, ce qui rendra la division plus courte. C'est pourquoi il faut ordonner le dividende

& le diviseur, par rapport à la lettre c , comme on le voit ici, où l'on a écrit la lettre c la première pour la distinguer.

$$\begin{array}{r}
 - 5axc^2 + 20a^2x^2 \\
 0 \\
 - 3bxc^2 + 2abx^2 \\
 0 \\
 - d^2c^2 - 6b^2x^2 \\
 0 \\
 + 4ad^2x \\
 - 2bd^2x
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 - c^2 + 4ax \\
 - 2bx \\
 \hline
 + 5ax + 3bx + d^2
 \end{array}
 \right.$$

L'on dira ensuite, le quotient du premier terme $- 5axc^2 - 3bxc^2 - d^2c^2$ du dividende par le premier terme $- c^2$ du diviseur est $+ 5ax + 3bx + d^2$. Il faut écrire cette grandeur complexe au quotient, & marquer 0 sous chaque partie du premier terme du dividende par la 2^e Remarque; puis multiplier les termes du diviseur, excepté le premier, par ce quotient, & retrancher le produit $+ 20a^2x^2 - 10abx^2 + 12abx^2 - 6b^2x^2 + 4ad^2x - 2bd^2x$, du dividende, & comme il ne reste rien, la division est achevée, & le quotient est exact.

— $6b^2x^2$ du dividende total marqué par A , par le premier terme $\div 4ax - 2bx$ du diviseur, est $\div 5ax \div 3bx$. Ainsi il

$$\begin{array}{r}
 \div 20a^2x^2 - 5ac^2x - c^2a^2 \\
 \quad \quad \quad \circ \quad \quad \quad \circ \\
 A \div 2abx^2 - 3bc^2x \\
 \quad \quad \quad \circ \quad \quad \quad \circ \\
 - 6b^2x^2 \div 4ad^2x \\
 \quad \quad \quad \circ \quad - 2bd^2x
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \div 4ax - c^2 \\
 - 2bx \\
 \hline
 \div 5ax \\
 \div 3bx
 \end{array}
 \right.$$

faut écrire 0 sous les grandeurs du premier terme du dividende ; multiplier le second terme — c^2 du diviseur par le quotient $\div 5ax \div 3bx$, & ôter le produit — $5ac^2x - 3bc^2x$ du second terme du dividende, & le reste sera $\div 4ad^2x - 2bd^2x - c^2a^2$, qu'il faut continuer de diviser par le diviseur $\div 4ax - 2bx - c^2$.

Mais comme le premier terme du diviseur $\div 4ax - 2bx$ est complexe, & que le premier terme $\div 4ad^2x - 2bd^2x$ du dividende est aussi complexe, il faut trouver le quotient par la première ou par la seconde méthode qu'on vient d'expliquer : la première étant plus facile que la seconde, on va appliquer la seconde (pour la mieux faire concevoir) à trouver ce quotient.

Il faut considérer $\div 4ad^2x - 2bd^2x$ comme un dividende total d'une division qu'on fera à part, & $\div 4ax - 2bx$, comme en étant le diviseur total, & on ordonnera l'un & l'autre, par rapport à la lettre a ou b différente de x , & il n'importe pas laquelle ; on prendra ici la lettre b , & le dividende & le diviseur seront ordonnez comme on le voit ici. Et l'on dira, le quotient du pre-

mier terme — $2a^2xb$ du — $2a^2xb \div 4ad^2x$ (— $2xb \div 4ax$
dividende par le pre- $\circ \quad \circ \quad \circ$ $\div a^2$)
mier terme — $2xb$ du
diviseur, est $\div a^2$, il faut écrire a^2 au quotient, écrire 0 sous
— $2a^2xb$ du dividende ; multiplier $\div a^2$ par $\div 4ax$, en re-
trancher le produit $\div 4ad^2x$, du dividende $\div 4ad^2x$: & comme il ne reste rien, il faut écrire 0 sous $\div 4ad^2x$ du dividende.

Cette division sans reste, faite à part, fait connaître que

le quotient du premier terme $\div 4ad^2x - 2bd^2x$ du dividende, qu'on divisoit avant cette division faite à part, par le premier terme $\div 4ax - 2bx$ du diviseur, est $\div a^2$. Ainsi il faut écrire 0 sous chacune des grandeurs $\div 4ad^2x - 2bd^2x$ du premier terme de cette division dans le dividende A; multiplier $\div a^2$ par $-c^2$, & en retrancher le produit

$$\begin{array}{r}
 \div 10a^2x^2 - 5ac^2x - c^2d^2 \\
 \div 2abx^2 - 3bc^2x \\
 A \quad \div 6b^2x^2 \div 4ad^2x \\
 \div \quad \quad \quad \div 2bd^2x \\
 \div \quad \quad \quad \div
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \div 4ax - c^2 \\
 - 2bx \\
 \hline
 \div 5ax \div a^2 \\
 \div 3bx
 \end{array}
 \right.$$

$\div c^2d^2$ du dernier terme $- c^2d^2$ du dividende; & comme il ne reste rien, il faut écrire 0 sous $- c^2d^2$ du dividende. La division totale est achevée, & le quotient qu'on a trouvé est exact.

4.

Quand il y a quelque lettre dans le premier terme du diviseur qui n'est pas dans le dividende, il est clair que la division ne s'auroit le faire sans fraction, comme aussi quand il y a quelque lettre qui a plus de dimensions dans le premier terme du diviseur, que la même lettre n'en a dans le dividende.

SECTION V.

Où l'on explique la composition ou la formation des Puissances des grandeurs entières.

DÉFINITION I.

143. ON a déjà dit * que les produits $1a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, &c. *82, qui viennent de la multiplication d'une grandeur quelconque a par l'unité, &c ensuite de la grandeur a par elle-même,

Q üj

puis du produit a par a , du produit a^2 par a , &c ainsi de suite à l'infini, s'appellent *les puissances* de cette grandeur. $1a$, qu'on peut aussi marquer ainsi $1a^1$ ou a^1 , est la première puissance, ou la puissance *linéaire* de a ; a^2 la 2^e puissance, qu'on nomme aussi *le carré* de a ; a^3 la 3^e puissance qu'on nomme aussi *le cube* de a ; a^4 , la 4^e puissance; a^5 , la 5^e puissance, &c ainsi de suite à l'infini. Les nombres 1, 2, 3, 4, &c. que l'on met à droite de a , un peu au dessus, s'appellent *les Exposants* des puissances de a ; ainsi 1 est l'exposant de la première puissance; 2, celui de la 2^e puissance; 3 est l'exposant de la 3^e puissance, &c ainsi des autres. On dit aussi que ces exposants marquent *les degrés* des puissances, &c ainsi a^1 est la puissance de a du premier degré; a^2 la puissance de a du 2^e degré; Il en est de même des autres.

2^e DEFINITION.

144. UNE grandeur *linéaire*, ou d'une seule dimension, est toute élevée à la puissance que marque l'exposant, lorsque cet exposant est écrit au haut de cette grandeur à la droite. Ainsi a^7 est la grandeur a élevée à la 7^e puissance. Mais quand la grandeur est de plusieurs dimensions, comme ab , abc , ou quand elle est complexe, comme $a + b$; $a^2 + b^2$; &c que sans l'élever à une puissance, par exemple à la 3^e, on veut cependant marquer qu'elle y est élevée; on tire une ligne sur cette grandeur qui la couvre, &c l'on écrit à l'extrémité de cette ligne, vers la droite, l'exposant de la puissance à laquelle on veut marquer que cette grandeur est élevée. Ainsi \overline{ab}^3 ; \overline{abc}^3 ; $\overline{a + b}^3$; $\overline{a^2 + b^2}^3$; expriment qu'on conçoit chacune de ces grandeurs élevée à la 3^e puissance.

3^e DEFINITION.

145. UNE puissance peut être au numérateur ou au dénominateur d'une fraction, &c l'on peut concevoir une opposition entre les deux places du numérateur &c du dénominateur d'une fraction. Le signe —, devant l'exposant d'une puissance, marque cette opposition de place; c'est à dire, le signe — devant l'exposant d'une puissance, marque que cette puissance est dans celle des deux places du numérateur ou du dénominateur, qui est opposée à la place où elle est écrite. Ainsi

dans $\frac{a^3}{1}$, le signe — devant l'exposant 3 de la puissance 3^e de a écrite au numérateur, marque que a^3 doit être conçue au dénominateur, c'est à dire $\frac{a^3}{1} = \frac{1}{a^3}$. De même dans $\frac{1}{a^3}$ le signe — marque que la puissance a^3 , qui est écrite au dénominateur, doit être conçue dans la place opposée, c'est à dire au numérateur, & que $\frac{1}{a^3} = \frac{a^3}{1}$. Ainsi $a^3 b^{-3} = \frac{a^3}{b^3}$,

$$a^{-3} b^{-3} = \frac{1}{a^3 b^3}, \quad \frac{b^{-3}}{a^{-3}} = \frac{a^3}{b^3}.$$

. Le signe + devant l'exposant d'une puissance, lequel signe ne s'exprime point, & qui est toujours sous-entendu, ne marque aucune opposition entre les deux places du numérateur, ou du dénominateur, mais simplement que la puissance, qui a son exposant positif, est dans la place où elle se trouve, soit du numérateur, soit du dénominateur.

COROLLAIRE.

146. CETTE distinction d'exposans positif & négatif fournit le moyen de donner différentes expressions aux puissances des grandeurs sans changer leur valeur, ce qui est d'usage dans le calcul. Par exemple $a^{1-3} = \frac{a^1}{a^3} = \frac{1}{a^2}$, $a^3 b^{-3} = \frac{a^3}{b^3}$, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, * 138.
* $a^1. a^{-3} = \frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{1-1} = b^1 = b$, &c. * 138.

4^e DÉFINITION.

147. ON peut exprimer la puissance quelconque d'une grandeur, dont l'exposant est un nombre entier quelconque, d'une manière générale, en prenant une lettre pour exposant. Par exemple, supposant que n représente un nombre entier quelconque, en y comprenant l'unité; a^n signifie la grandeur a élevée à une puissance quelconque, dont l'exposant est tel nombre entier qu'on voudra, représenté par l'indéterminée n . On rend cette expression déterminée en substituant un nombre entier quelconque à la place de n . Par exemple si l'on veut que a^n représente la troisième puissance de a , il faut écrire a^3 , &c. a^{-n} représentera de même une puissance quelconque de a , dont l'exposant est un nombre entier négatif, quelque soit ce nombre entier.

Le calcul des puissances d'une même grandeur par le moyen des exposans, lorsqu'ils sont des nombres entiers positif ou négatif.

LA MULTIPLICATION.

148. **P**OUR multiplier la puissance d'une grandeur par une puissance de la même grandeur, il faut simplement écrire la somme des deux exposans au haut de cette grandeur vers la droite, & ce sera le produit.

Par exemple, pour multiplier, 1° , a^2 par a^3 , il faut écrire $a^{2+3} = a^5$ pour le produit. De même, 2° , pour multiplier a^4 par

148. a^{-2} , ou a^{-3} par a^5 , il faut écrire pour le produit $a^{5-2} = a^3$. 3° , pour multiplier a^{-2} par a^{-3} , il faut écrire pour le produit $a^{-2-3} = a^{-5}$. En général, pour multiplier, 1° , a^m par a^n , il faut écrire pour le produit a^{m+n} . 2° . Pour multiplier a^m par a^{-n} , ou a^{-m} par a^n , il faut écrire pour le produit a^{m-n} . 3° . Pour multiplier a^{-m} par a^{-n} , il faut écrire pour le produit a^{-m-n} .

88 & 89. *Démonstration.* 1° . a^2 , par exemple, est la même chose que aa , & $a^3 = aaa$. Or le produit de aa , par aaa , est $*aaaaa = a^{2+3} = a^5$. Et il est évident que c'est la même chose, quelques nombres entiers positif représentez par m & p que puissent être les exposans des deux puissances d'une même grandeur, qui sont multipliées l'une par l'autre. Par conséquent en donnant pour exposant à la grandeur a , la somme des exposans, ce sera le produit des deux puissances.

117 **145.** 2° . $a^3 = *a^3$, & $a^{-2} = *a^{-2}$. Or $\frac{a^3}{a^2} = *a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} =$

123 **145.** $*a^{3-2} = *a^1$. Par conséquent $a^3 \times a^{-2} = a^{3-2} = a^1$. Il est clair que c'est la même chose, quelques nombres entiers, représentez par m & p , que puissent être les exposans des deux puissances d'une même grandeur, qui sont multipliées l'une par l'autre, lorsque l'un de ces exposans est positif & l'autre négatif.

145. 3° . Enfin $a^{-2} = *a^{-2}$, & $a^{-3} = *a^{-3}$. Mais pour multiplier

145. a^{-2} par a^{-3} , il faut écrire $*a^{\frac{-2}{1}-\frac{-3}{1}} = *a^{\frac{-2-3}{1}} = *a^{-5} = a^{-5}$.

145. Par conséquent $a^{-2} \times a^{-3} = a^{-2-3} = a^{-5}$. Il est évident que c'est la même chose, quelques nombres entiers négatif, représentez par $-m$ & $-p$, que puissent être les exposans

DES PUISSANCES DES GR. LITT. LIV. I. 119
 exposans des deux puissances d'une même grandeur qui sont
 multipliées l'une par l'autre.

LA DIVISION.

149. **P**OUR diviser la puissance d'une grandeur par une puissance
 de la même grandeur, il faut ôter l'exposant du diviseur de
 l'exposant du dividende, & écrire au haut de cette grandeur
 vers la droite, la différence des deux exposans, & ce sera le
 quotient.

Pour diviser, 1°. a^5 par a^3 , il faut ôter l'exposant 3 du di-
 viseur de l'exposant 5 du dividende, & écrire leur différence
 $5 - 3$ pour l'exposant du quotient, qui sera $a^{5-3} = a^2$. 2°.
 Pour diviser a^3 par a^{-1} ; il faut retrancher l'exposant -3
 du diviseur, de l'exposant $+5$ du dividende, & écrire leur
 différence $5 + 3$ pour l'exposant du quotient, qui sera a^{5+3}
 $= a^8$. 3°. Pour diviser a^{-1} par a^{-3} , il faut ôter -3 de -5 ,
 & écrire leur différence $-5 + 3$ pour l'exposant du quo-
 tient, qui sera $a^{-5+3} = a^{-2}$. 4°. De même, pour diviser
 a^{-1} par a^{+3} , il faut écrire pour le quotient $a^{-1-3} = a^{-4}$.

En general, pour diviser, 1°. a^m par a^p , il faut écrire a^{m-p} .
 2°. Pour diviser a^m par a^{-p} , il faut écrire pour quotient a^{m+p} .
 3°. Pour diviser a^{-m} par a^p , il faut écrire a^{-m-p} . 4°. Pour di-
 viser a^{-m} par a^{-p} , il faut écrire a^{-m+p} .

Démonstration. 1°. a^5 divisé par $a^3 = * \frac{a^5}{a^3} = * a^{5-3}$. *105. *145.

2°. $a^3 = \frac{a^5}{a^2}$, & $a^{-1} = \frac{1}{a}$. Mais pour diviser $\frac{a^5}{a^2}$ par $\frac{1}{a}$, il
 faut écrire $* \frac{a^5 \times a}{a^2} = * \frac{a^{5+1}}{a^2} = a^3$. *124. *127.

3°. $a^{-1} = \frac{1}{a}$, & $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Mais pour diviser $\frac{1}{a}$ par $\frac{1}{a^3}$, il
 faut écrire $* \frac{1 \times a^3}{a} = * a^{3-1} = * a^2$. *89. *124. *145.

4°. Enfin $a^{-1} = * \frac{1}{a}$. Et $a^3 = * \frac{a^5}{a^2}$. Or pour diviser $\frac{1}{a}$
 par $\frac{a^5}{a^2}$, il faut écrire $* \frac{1 \times a^2}{a \times a^5} = \frac{1}{a^{5-2}} = * a^{-3} = a^{-3}$. *138. *145. *157.
 *124. *145.

Il est évident que c'est la même chose quelques soient les
 deux nombres entiers représentés par m & p , qui sont les
 exposans du dividende & du diviseur, dans tous les cas qu'on
 vient de démontrer. Ainsi en écrivant la différence, qui est

entre l'exposant du dividende & l'exposant du diviseur, pour exposant de la grandeur a , ce sera le quotient.

La maniere d'élever la puissance donnée d'une grandeur a à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier donné positif ou négatif.

150. **P**OUR élever la puissance d'une grandeur, dont l'exposant est un nombre entier positif ou négatif, à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier positif ou négatif, il faut multiplier l'exposant de la puissance à élever, par l'exposant donné, & écrire la grandeur, en lui donnant pour exposant, le produit des deux exposans, avec le signe de l'exposant de la puissance à élever quand le signe de l'exposant donné est $+$; avec le signe opposé à celui de l'exposant de la puissance à élever, quand le signe de l'exposant donné est $-$, & ce sera la puissance qu'on cherche.

1°. Pour élever a à la puissance 3 , dont l'exposant est 3 , il faut multiplier 3 par 3 , & écrire $a^{3 \times 3} = a^9$ pour la puissance qu'on cherche.

2°. Pour élever a^{-2} à la puissance 3 , dont l'exposant donné est $+$ 3 , il faut écrire, pour la puissance qu'on cherche, $a^{-2 \times 3} = a^{-6}$.

3°. Pour élever a à la puissance dont l'exposant donné est -3 , il faut écrire $a^{3 \times -1} = a^{-3}$.

4°. Pour élever a^{-2} à la puissance dont l'exposant donné est -3 , il faut écrire $a^{-2 \times -1} = a^6$.

En general, 1°. pour élever a^n à la puissance p , il faut écrire a^{np} .

2°. Pour élever a^{-n} à la puissance p , il faut écrire a^{-np} .

3°. Pour élever a^n à la puissance $-p$, il faut écrire a^{-np} .

4°. Enfin pour élever a^{-n} à la puissance $-p$, il faut écrire $a^{n \times p} = a^{np}$.

Quand les exposans sont des grandeurs complexes, le calcul se fait de la même maniere. Par exemple, pour élever a^n à la puissance $-p + q$, il faut écrire $a^{-np + nq}$. De même pour élever a^{m-n} à la puissance $p - q$; il faut écrire $a^{mp - nq - np + nq} = a^{mp - np - nq + nq}$.

Quand l'un des exposans est un nombre, & l'autre une grandeur littérale, le calcul se fait de la même manière. Par exemple, pour élever a^m à la puissance 2^o , 3^o , 4^o , &c. il faut écrire a^{2m} , a^{3m} , a^{4m} , &c.

Démonstration. 1^o . $a \times a \times a$ est a^3 élevée à la puissance 3^o . Et il est clair que $a \times a \times a = a^3 = a^3$. 2^o . $a^2 = \frac{a^2}{1}$, or pour élever $\frac{a^2}{1}$ à la puissance 3^o , il faut multiplier $\frac{a^2}{1}$ deux fois par elle-même, ce qui donne $\frac{a^2}{1} \times \frac{a^2}{1} \times \frac{a^2}{1} = \frac{a^6}{1} = a^6 = a^6$. * 89.

Dans le 3^o & le 4^o cas, dans lesquels l'exposant de la puissance 3^o , à laquelle on veut élever a^2 & a^3 , est négatif, c'est à dire -3 ; le signe $-$, qui précède cet exposant 3 , marque que le signe de l'exposant de la puissance qu'on cherche doit être opposé au signe de l'exposant de a^2 ou a^3 qui doit être élevée à la puissance -3 . Ainsi dans le 3^o & 4^o cas, il faut multiplier l'exposant $+2$ ou -2 de la puissance à élever a^2 ou a^3 par l'exposant donné 3 de la puissance à laquelle on veut élever a^2 , & le produit $+2 \times 3 = 6$ ou $-2 \times 3 = -6$, est l'exposant qu'il faut donner à la grandeur a pour l'élever à la puissance qu'on cherche, comme on vient de le faire voir dans le premier & le second cas; mais il faut que le signe $+$ ou $-$, qui le doit précéder, soit opposé à celui de l'exposant de la puissance à élever, qui est a^2 ou a^3 . D'où l'on voit que pour élever a^2 à la puissance -3 , il faut écrire a^{-6} ; & que pour élever a^3 à la puissance -3 , il faut écrire a^{-9} . * 123.
* 145.
* 145.

Il est évident que la même démonstration convient à toute puissance d'une grandeur quelconque a , dont l'exposant est un nombre entier m , qu'on veut élever à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier donné représenté par p , quelques signes $+$ ou $-$ que puissent avoir les deux exposans.

On verra ci-après, *article 100*, quand on a une puissance donnée faite d'une autre puissance moindre, la manière de trouver cette autre puissance.

REMARQUES.

1.

Ce calcul des puissances d'une même grandeur par le

R ij

moyen des exposans, est de grand usage dans la résolution des Problèmes les plus composés ; les expressions générales des exposans des puissances font découvrir d'une manière facile, simple & qui n'embarasse point l'imagination, dans la résolution d'un seul Problème, la résolution d'une infinité d'autres, qui se trouvent compris sous l'expression générale de cette résolution. Cet usage doit porter les Commensans à se rendre ce calcul très familier.

2.

151. On fait l'addition, la soustraction, la multiplication & la division des puissances de différentes grandeurs de la même manière qu'on les fait des autres grandeurs littérales ; $a^n + b^n$ est la somme de a^n & de b^n ; $a^n - b^n$ est leur diffé-

* 145. rences ; $a^n b^n$, est leur produit ; $\frac{a^n}{b^n} = * a^n b^{-n}$ est le quotient de a^n divisée par b^n .^c

3.

152. Quand les puissances, dont les exposans sont des lettres, doivent être les termes d'une grandeur complexe, on doit prendre garde que tous les termes soient homogènes ; c'est à dire, le nombre ou la somme des dimensions d'un terme doit être égal au nombre des dimensions de chaque autre terme. En voici quelques exemples pour y accoutumer les Commensans. Dans la grandeur complexe $a^{m+n} - a^m b^n$, les deux termes ont chacun le même nombre de dimensions exprimé par $m + n$. Dans $a^n + a^{n-m} b^m$, le terme $a^{n-m} b^m$ a le même nombre de dimensions que a^n . Car le nombre des dimensions de $a^{n-m} b^m$ est exprimé par la somme des exposans $n - m + m = n$. Ces deux exemples suffisent pour faire voir comment la somme des dimensions d'un terme peut être égale à la somme des dimensions d'un autre terme. Quand les termes ne sont pas homogènes, on y peut suppléer, en prenant une des lettres pour l'unité, & faisant en sorte que les dimensions de l'unité suppléent à celles qui manquent à quelques termes pour les rendre tous homogènes. Par exemple, si l'on avoit $a^2 - b^2 + c^{-2}$, on pourroit rendre tous ces termes homogènes, en prenant a pour l'unité, en écrivant $a^2 - a^{2-2} b^2 + a^{2-2} c^{-2}$, car il est évident que

la somme des dimensions de chaque terme est, dans cette expression, égale à n , &c le produit de l'unité &c des puissances de l'unité par une grandeur quelconque, ne changeant point la valeur de cette grandeur, la seconde expression où les termes sont homogènes, a la même valeur que la première expression dans laquelle ils ne l'étoient pas.

5^e DÉFINITION.

133. LA grandeur quelconque a , qui étant multipliée par elle-même a pour produit son carré a^2 , s'appelle la *racine quarrée*, ou la *racine 2^e de a^2* . a est la *racine cubique*, ou 3^e de a^3 . ab est la *racine 4^e de a^4b^4* . a^3 est la *racine 3^e de $a^3 = a^1 \times a^1 \times a^1$* , &c.

Pour exprimer les racines, on se sert des deux marques suivantes, 1^o, de la marque $\sqrt{}$ qu'on nomme *le signe radical*, &c l'on écrit au dessus en petit caractère le nombre qui marque si c'est la racine 2^e, 3^e, 4^e, &c. d'une puissance, de cette manière. $\sqrt[3]{a^3}$ marque la racine 3^e de a^3 . Ainsi $\sqrt[3]{a^3} = a$. Quand on marque la racine quarrée, on ne met point d'ordinaire le nombre 2 sur le signe radical $\sqrt{}$. Ainsi $\sqrt{a^2}$ marque la racine 2^e de a^2 qui est a . Le nombre qu'on écrit sur le signe radical, pour exprimer qu'elle est la racine qu'on veut marquer, s'appelle l'*exposant* de la racine. Ainsi dans $\sqrt[3]{a^3}$, le nombre 3 écrit sur le signe radical, s'appelle l'exposant de la racine 3^e de a^3 qui est a .

Quand on veut marquer la racine d'une grandeur complexe, on écrit le signe radical au devant de la grandeur complexe vers la gauche, avec l'exposant au dessus qui détermine qu'elle est racine, &c l'on tire une ligne du haut du signe radical qui couvre toute la grandeur complexe dont on veut exprimer la racine. Ainsi $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ exprime la racine 3^e ou cubique de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Il faut bien remarquer que la grandeur qui est sous le signe radical est supposée la puissance qui auroit pour exposant le même nombre qui sert d'exposant au signe radical.

Ainsi dans l'expression $\sqrt[3]{a^3}$, la grandeur a^3 , qui est sous le signe radical, est supposée une troisième puissance dont on exprime la racine 3^e par le signe radical $\sqrt[3]{}$. De même dans

$\sqrt[4]{b}$, on regarde b comme une quatrième puissance, dont $\sqrt[4]{b}$ exprime la racine 4^e. D'où l'on voit que a étant la racine 3^e de a^3 , il ne faut pas écrire $\sqrt[3]{a}$, mais simplement a pour la racine 3^e de a^3 ; car $\sqrt[3]{a}$ signifie la racine 3^e de a considérée comme représentant une grandeur élevée à la 3^e puissance.

On se sert, 2^o, des fractions numériques pour marquer les racines des puissances. Dans cette seconde manière d'exprimer les racines, on n'emploie point le signe $\sqrt{}$; mais on marque ces racines comme les exposans des puissances, en écrivant vers la droite au haut de la puissance, dont on veut marquer la racine, une fraction dont le numérateur est l'unité, &c dont le dénominateur est 2, si l'on veut exprimer la racine 2^e, 3 si l'on veut exprimer la racine 3^e, &c ainsi des autres.

Par exemple, pour marquer la racine 2^e de la grandeur a regardée comme une 2^e puissance, on écrit $a^{\frac{1}{2}}$. Pour marquer la racine 3^e, on écrit $a^{\frac{1}{3}}$; pour marquer la racine 5^e, on écrit $a^{\frac{1}{5}}$. De même $\sqrt{x^2 - x^2}^{\frac{1}{2}}$ exprime la racine 2^e de le grandeur complexe $x^2 - x^2$. Il en est de même des autres.

Quand la puissance dont on veut exprimer la racine est déjà un exposant qui est un nombre entier, on fait ce nombre entier le numérateur du nouvel exposant de la racine, &c on écrit dessous pour dénominateur, le nombre 2, si c'est la racine 2^e que l'on veut exprimer; 3, si c'est la racine 3^e, &c ainsi des autres.

Par exemple $a^{\frac{1}{2}}$ exprime la racine 2^e de a^2 ; $\sqrt{x^2 - x^2}^{\frac{1}{2}}$ exprime la racine 2^e de la 5^e puissance de la grandeur complexe $x^2 - x^2$. De même $\sqrt{x - b^2}^{\frac{1}{3}}$ exprime la racine 3^e de la 5^e puissance à laquelle on suppose que la grandeur complexe $x - b^2$ est élevée.

Les grandeurs qui sont les racines des puissances, étant

exprimées de la manière qu'on vient d'expliquer, sont regardées comme des puissances dont les exposans sont des nombres rompus, c'est à dire, sont des fractions. Ainsi $a^{\frac{1}{2}}$ est regardée comme une puissance dont l'exposant est la fraction $\frac{1}{2}$.

Lorsque ces exposans sont négatifs, cela exprime que la racine est dans le dénominateur. Par exemple $\sqrt[r]{x} = x^{-\frac{1}{r}}$ exprime cette fraction $\frac{1}{x^{\frac{1}{r}}}$. De même $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. De la même manière $a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}$.

REMARQUES.

CETTE manière d'exprimer les racines comme des puissances, dont les exposans sont des nombres rompus, a donné lieu de multiplier & de diviser les différentes racines d'une même grandeur, à la façon des puissances dont les exposans sont des nombres entiers, par l'addition & la soustraction de leurs exposans, comme aussi d'élever ces racines à telle puissance qu'on veut en multipliant les exposans de ces racines considérées comme puissances, par l'exposant de la puissance à laquelle on les veut élever. On démontrera en son lieu ce calcul des puissances dont les exposans sont des nombres rompus.

PROBLÈME.

A

$$154. \div \&c. \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot a^0 \text{ ou } 1 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot \&c.$$

B

$$\div \&c. a^{-2} \cdot a^{-2} \cdot a^{-2} \cdot a^{-2} \cdot a^{-2} \cdot a^{-2} \cdot a^{-2} \cdot a^{-2} \cdot a^0 \text{ ou } 1 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot \&c.$$

Si l'on écrit a^0 qui est prise pour l'unité, c'est à dire que a^0 représente l'unité, & vers la droite les puissances positives prises de suite d'une grandeur quelconque a , dont les exposans sont les nombres entiers pris de suite; & vers la gauche

- les mêmes puissances de a au dénominateur d'autant de fractions, en donnant l'unité à chacune pour numérateur, comme
- * 145. dans l'expression A ; ou, * ce qui revient au même, si l'on écrit vers la gauche de a^0 , qui est prise pour l'unité, les puissances négatives de a prises de suite, comme dans l'expression B . Toutes ces puissances de a sont une progression géométrique; le même rapport, qui règne dans la progression, c'est à dire, le rapport de chacun des termes à celui qui le suit immédiatement vers la droite, est le rapport de 1 à a ; & en allant de la droite vers la gauche, c'est le rapport de a à 1. Les exposans de ces puissances pris de suite, sont une progression arithmétique, & l'unité est la différence qui règne dans cette progression. 0, qui est l'exposant de l'unité ou de a^0 , est le terme de la progression arithmétique qui se trouve entre les exposans positifs & les négatifs.

- Démonstration. 1°. Par rapport aux puissances dont les exposans sont les nombres entiers positifs pris de suite.* Pour avoir le rapport géométrique d'un terme à celui qui le suit, il faut diviser le
- * 116. premier par le second, & * le quotient en exprimera le rapport. Ainsi en commençant par l'unité le rapport de 1 à a^1 est $\frac{1}{a}$. Le rapport de a^1 à a^2 , est $\frac{a^1}{a^2} = \frac{1}{a}$, & ainsi de suite; car le terme suivant vers la droite, contenant un a de plus que celui qui le précède, le rapport d'un terme à celui qui le
- * 109. suit, se réduira toujours à * $\frac{1}{a}$.

- 2°. Pour les puissances dont les exposans sont négatifs.* Les termes qui sont à la gauche de 1 ou a^0 , dans l'expression A , ont tous l'unité pour numérateur, ainsi les numérateurs sont
- * 121. égaux; par conséquent * le rapport de chacun de ces termes, à celui qui le suit immédiatement, est égal au rapport des dénominateurs, en les prenant dans un ordre renversé;
- * 109. par exemple, $\frac{1}{a^1} \cdot \frac{1}{a^2} :: a^2 \cdot a^1 :: * 1 \cdot a$. Mais il est évident qu'en prenant ainsi deux dénominateurs voisins, dans un ordre renversé, l'un a toujours a de plus que l'autre; ainsi, dans la progression géométrique A , en allant de la gauche à la droite, le rapport de deux termes voisins se réduira toujours à $\frac{1}{a}$; &
- * 124. celui du terme $\frac{1}{a}$ à 1 ou à $\frac{1}{a}$, ou à $a^0 = 1$, * est aussi égal à $\frac{1}{a}$. Mais en allant de la droite à la gauche, le rapport de deux termes voisins sera égal à $\frac{1}{a}$, qui est l'inverse de $\frac{1}{a}$.

3°. Pour

3°. Pour la progression arithmétique des exposans. Les exposans pris de suite de la gauche à la droite, dans l'expression B , sont, 1^o , les nombres naturels, avec le signe —, qui diminuent d'une unité d'un terme à celui qui le suit, jusqu'à zéro qui est l'exposant de l'unité, 2^o , les exposans depuis zéro vers la droite sont les nombres naturels 1, 2, 3, &c. avec le signe +, qui augmentent d'une unité d'un terme à celui qui le suit; d'où l'on voit clairement qu'en ôtant un exposant quelconque de l'exposant qui le suit vers la droite, la différence est 1; par conséquent les exposans font une progression arithmétique, & la différence de chacun des termes à son voisin est 1.

COROLLAIRE I.

155. **D**ANS la progression des puissances d'une grandeur quelconque a , dont les exposans sont des nombres entiers positifs, la 1^o puissance occupe le second rang depuis l'unité non comprise; la 3^o puissance, le 3^o rang; la 4^o puissance, le 4^o , &c. ainsi de suite; c'est à dire qu'une puissance quelconque positive de a occupe, dans la progression depuis l'unité non comprise, le rang qui est marqué par le nombre des unités de son exposant; par exemple, la 10^o puissance de a occupe le 10^o rang depuis l'unité non comprise. Il en est de même des puissances négatives; par exemple, la 10^o puissance a^{-10} de a^{-10} occupe le 10^o rang en allant vers la gauche depuis l'unité non comprise.

COROLLAIRE II.

156. **D**ANS la progression des mêmes puissances, a racine 2^e de a est un moyen proportionnel entre 1 & la puissance 2^e de a . a racine 3^e de a est le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & a^3 . a racine 4^e de a est le premier de trois moyens proportionnels entre l'unité & a^4 ; &c. ainsi de suite: c'est à dire, que la racine quelconque d'une puissance positive est le premier d'autant de moyens proportionnels entre 1 & cette puissance, qu'il y a d'unités moins une dans l'exposant du signe radical de cette racine, qui est toujours égal à l'exposant de la puissance. Ainsi $\sqrt[10]{a^{10}} = a$ est le premier de neuf moyens proportionnels qui sont entre 1 & a^{10} dixi-

me puissance de a . Il est évident qu'il en est de même des racines des puissances négatives.

COROLLAIRE III.

157. **D'**où l'on voit que chercher la puissance quelconque d'une grandeur a , ou élever cette grandeur à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier, c'est supposer une progression géométrique, dont l'unité est le premier terme, & la grandeur a le second, & chercher le terme de cette progression, qui occupe le rang depuis l'unité non comprise, qui est marqué par le nombre qui est l'exposant de cette puissance; c'est à dire le second terme, si l'on cherche la 1^{re} puissance; le 3^e terme, si l'on cherche la 3^e puissance; le 4^e terme, si l'on cherche la 4^e puissance, &c.

COROLLAIRE IV.

158. **D'**où l'on voit aussi que chercher la racine quelconque d'une puissance proposée, c'est supposer une progression géométrique qui commence par l'unité, & dans laquelle on connoît la puissance proposée, & le rang qu'elle occupe dans la progression par le moyen de l'exposant donné de cette puissance, & chercher le premier d'autant de moyens proportionnels entre l'unité & la puissance proposée que l'exposant donné de la puissance proposée, qui est aussi l'exposant du signe radical de la racine qu'on cherche, contient d'unités moins une; c'est à dire, un seul moyen proportionnel entre l'unité & la puissance proposée, si c'est la racine 2^e, le premier de deux moyens proportionnels entre l'unité & la puissance proposée, si l'on cherche la racine 3^e; le premier de trois moyens proportionnels entre l'unité & la puissance proposée, si c'est la racine 4^e que l'on cherche, &c.

REMARQUE.

DANS la multiplication & dans la division d'une grandeur donnée par une autre grandeur donnée, on suppose une proportion dans laquelle trois termes sont connus, savoir l'unité & les deux grandeurs données, & l'on cherche le quatrième terme que la multiplication & la division font découvrir; mais quand on veut élever une grandeur donnée a à une puissance quelconque, ou trouver la racine quelconque

d'une grandeur donnée considérée comme la puissance de la racine qu'on cherche, on suppose une progression geometrique qui commence par l'unité, & où il y a deux termes connus, sçavoir l'unité & la grandeur qu'on veut élever à une puissance quelconque, ou bien l'unité & la puissance donnée dont on veut trouver la racine; & outre ces deux termes connus on sçait encore les rangs que doivent occuper dans la progression la puissance donnée & sa racine quelconque; car le rang de la puissance est connu par le moyen de son exposant; & le rang de la racine est le premier qui suit l'unité. Cette remarque sert, quand on s'applique à la Geometrie, à faire appercevoir clairement le rapport des calculs de ce Traité, avec les proportions & les progressions des lignes & des figures de la Geometrie, & que ces calculs expriment les proportions & les progressions des lignes & des figures, & sont découvrir les termes que l'on cherche dans les Problèmes de la Geometrie qui appartiennent à ces proportions & progressions; & cela sans embarrasser les sens de l'imagination.

PROBLÈME.

159. *ELEVER une grandeur littérale incomplexé ou complexé à une puissance telle qu'elle puisse être, dont l'exposant est un nombre entier positif qui est donné.*

Operation. Il faut multiplier la grandeur qu'on veut élever à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier positif, laquelle grandeur sera nommée, pour abréger, la racine, 1^o, par elle-même & le produit sera la 2^e puissance. 2^o. Il faut multiplier cette seconde puissance par la racine, & le produit sera la 3^e puissance. 3^o Il faut multiplier cette 3^e puissance par la racine, & l'on aura la 4^e puissance, & continuer ainsi de multiplier chaque nouveau produit par la racine jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la puissance dont l'exposant est celui de la puissance à laquelle on veut élever la racine. On appellera cette maniere de multiplier une grandeur, & les produits qui naissent par ordre de ces multiplications, par cette même grandeur; on la nommera, dis-je, la multiplication continuée ou répétée de cette grandeur par elle-même. Ainsi pour élever une grandeur à une puis-

sance donnée, il faut la multiplier continuellement cette grandeur par elle-même autant de fois que l'exposant de la puissance qu'on demande a d'unstez moins une; c'est à dire une fois, si l'on veut la 1^e puissance; deux fois, si l'on veut la 3^e puissance; trois fois, si l'on veut l'élever à la 4^e puissance, &c.

Mais les grandeurs complexes pouvant être élevées tout d'un coup à telle puissance qu'on voudra, on va mettre par articles la manière la plus courte de les élever à une puissance quelconque.

Pour les grandeurs complexes.

1^o. **Q**UAND la grandeur complexe est d'une seule dimension, * il n'y a qu'à écrire au haut de cette grandeur vers la droite l'exposant donné, & elle sera élevée à la puissance à laquelle on veut l'élever. Ainsi pour élever a à la 5^e puissance, il faut écrire a^5 . Il en est de même des autres.

2^o. Si la grandeur complexe contient plusieurs lettres qui sont un produit de plusieurs dimensions, mais dans lequel chacune des lettres n'a qu'une dimension, il faut écrire au haut de chacune de ces lettres, vers la droite, l'exposant donné. Par exemple, pour élever abc à la 3^e puissance, il faut écrire $a^3b^3c^3$ pour la 3^e puissance de abc .

3^o. Lorsque les différentes lettres de la grandeur complexe de plusieurs dimensions sont déjà toutes ou quelques-unes élevées à des puissances dont les exposants sont des nombres entiers positifs, il faut écrire dans la racine 1 pour l'exposant de chacune des lettres qui sont linéaires, s'il y en a, & ensuite multiplier l'exposant de chacune des lettres différentes de la racine par l'exposant donné, & écrire pour exposant de chacune des différentes lettres le produit de son exposant particulier, par l'exposant donné de la puissance à laquelle on veut élever la racine, & la racine sera élevée à la puissance proposée. Ainsi pour élever $a^2b^3c^4$ à la 3^e puissance, il faut écrire $a^{2 \times 3} b^{3 \times 3} c^{4 \times 3} = a^6b^9c^{12}$. De même pour élever a^2bcd^2 à la 5^e puissance, il faut écrire 1 pour l'exposant des grandeurs linéaires b & c , ce qui donnera $a^5b^1c^1d^{10}$, & écrire pour la 5^e puissance qu'on demande $a^{2 \times 5} b^{1 \times 5} c^{1 \times 5} d^{2 \times 5} = a^{10}b^5c^5d^{10}$.

d'un degré d'un terme à celui qui le suit jusqu'au dernier terme où est la plus haute puissance de b sans a . Dans chaque terme les puissances de a & de b font ensemble autant de dimensions, que l'exposant de la puissance contient d'unités, & tous les termes d'une puissance sont homogènes.

COROLLAIRE II.

162. CHAQUE puissance contient autant de termes, & un de plus que l'exposant de cette puissance contient d'unités. La 2^e puissance contient trois termes; la 3^e contient quatre termes, &c. Le nombre des termes de chaque puissance impaire est un nombre pair; & le nombre des termes de chaque puissance paire, est un nombre impair. Ce Corollaire est une suite évidente du précédent.

COROLLAIRE III.

163. DANS chaque puissance le nombre des termes où se trouve b est égal à l'exposant de la puissance, dans la 2^e puissance, il y a deux termes où est b , dans la 3^e il y en a trois, &c. Il en est de même de a .

COROLLAIRE IV.

164. EN nommant dans chaque puissance les nombres qui précèdent chaque terme, les *coefficients numériques* de ces termes, le coefficient numérique du premier & du dernier terme est l'unité. Le coefficient numérique du second terme est toujours égal à l'exposant de la puissance. Ainsi le coefficient numérique du second terme de la 2^e puissance est 2, le coefficient du second terme de la 3^e est 3, &c. De plus le second terme de chaque puissance contient toujours le produit de la puissance de a , dont l'exposant est moindre d'une unité que l'exposant de cette puissance, par b linéaire, & ce produit est multiplié par l'exposant de la puissance; c'est à dire, le second terme de la 2^e puissance est $2a \times b$. Le second terme de la 3^e puissance est $3a^2b$; le second terme de la 4^e est $4a^3b$; le second terme de la 5^e est $5a^4b$; & ainsi des autres.

COROLLAIRE V.

165. SI l'on se rend très familière la formation des puissances de la table, qu'on peut continuer tant qu'on voudra, on verra clairement la raison de tous les Corollaires qui précé-

dent; & de plus, 1^o, que le coefficient numerique d'un terme quelconque est égal à la somme du coefficient numerique du terme de la puissance précédente qui est au dessus de lui, joint au coefficient numerique du terme de la même puissance précédente, qui est au dessus vers la gauche. Par exemple, dans la 5^e puissance le coefficient 10 du troisième terme est égal à la somme 6 + 4 des coefficients numeriques, qui sont au dessus de ce 3^e terme, savoir de 6 qui est immédiatement au dessus, & de 4 qui est au dessus vers la gauche. 2^o. Que ce coefficient est encore égal à la somme de tous les coefficients numeriques qui sont au dessus dans la colonne à gauche. Par exemple, le coefficient 10 du troisième terme de la 5^e puissance est égal à 4 + 3 + 2 + 1, qui est la somme de tous les coefficients numeriques qui sont au dessus de ce troisième terme dans la colonne qui le précède vers la gauche. 3^o Que dans chaque puissance, les coefficients de deux termes également éloignez des extremités sont égaux. Par exemple, dans la 5^e puissance le coefficient du second & du cinquième terme est 5. Le coefficient du troisième & du quatrième terme est 10, &c.

COROLLAIRE VI.

166. **D**ANS chaque puissance, en ne prenant point les coefficients numeriques; mais les seules grandeurs litterales des termes, tous les termes pris de suite sont une progression geometrique où le rapport d'un terme à celui qui le suit est égal au rapport $\frac{a}{b}$. Par exemple, dans la 3^e puissance les termes $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^2b}{b^2}$, $\frac{ab^2}{b}$, $\frac{b^3}{1}$ font une progression geometrique & le rapport d'un terme à l'autre est égal à $\frac{a}{b}$. Car $a * \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3}{b^2}$ 109.
 $= \frac{a^3}{b^2} = \frac{a^3}{b^2}$.

DEFINITION.

167. **L**ORSQUE l'on met dans une expression litterale à la place d'une des lettres de cette expression, une autre grandeur, soit litterale, soit numerique, qu'on suppose égale à cette lettre, ou représentée par cette lettre, on appelle cela *substituer* cette grandeur à la place de la lettre à laquelle on la suppose égale: & cette operation s'appelle *substitution*. Par exemple, si l'on suppose $s = n$, & que l'on mette s à la place de n dans l'expression $a * x^{\frac{n-1}{2}} * x^{\frac{n-1}{2}}$ ce qui la chan-

gera en $5 \times \frac{1-2}{1} \times \frac{1-3}{1} = 5 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 5 \times 2 \times 1 = 10$, cela s'appelle substituer 5 à la place de n . De même si l'on suppose $a = b + c$, & qu'on mette $b + c$ à la place de a dans $2ab$, on trouvera $2b^2 + 2bc = 2ab$, & on appelle cela substituer $b + c$ à la place de a dans $2ab$. L'on doit, par la substitution, mettre la nouvelle grandeur à la place de la lettre à laquelle on la substitue, de la même manière qu'est cette lettre dans l'expression littérale. C'est à dire, si une lettre est par addition, ou par soustraction, ou par multiplication, ou de quelqu'autre manière que ce puisse être dans une expression littérale, & qu'on veuille substituer à sa place une nouvelle grandeur qu'on lui suppose égale, il faut mettre cette nouvelle grandeur dans cette expression aussi par addition, ou par soustraction, ou par multiplication, en un mot de la même manière que la grandeur, à la place de laquelle on substitue la nouvelle grandeur, étoit dans cette expression.

DÉFINITION.

168. **U**NE expression littérale, dont on regarde les lettres comme des indéterminées, laquelle par là représente une infinité d'expressions, en concevant qu'on peut substituer d'autres grandeurs à la place des lettres indéterminées, s'appelle une *formule générale*, ou simplement une *formule* de toutes les expressions qu'elle représente. Par exemple, $a + b$ est une formule de toutes les grandeurs complexes de deux termes positifs, en concevant a & b comme des indéterminées qui représentent l'une le premier terme, & l'autre le second terme de toutes les grandeurs complexes de deux termes.

COROLLAIRE VII.

169. **C**HACUNE des puissances de la table est une formule qui représente une semblable puissance de toute grandeur complexe binôme, soit littérale, soit numérique, a dans chaque formule représente le premier terme de ce binôme, & b le second terme; de manière qu'il n'y qu'à substituer dans chaque formule le premier terme de tel binôme qu'on voudra à la place de a , & le second à la place de b , & la formule deviendra par cette substitution la puissance semblable de ce binôme. Chaque formule marque même les opérations qu'il faut

faut faire pour élever un binôme à la puissance de cette formule.

Par exemple, pour élever $a^2 - b^2$ à la 2^e puissance, il faut substituer dans la formule $a^2 + 2ab + b^2$ de la 2^e puissance, a^2 à la place de a , & $-b^2$ à la place de b . La formule $a^2 + 2ab + b^2$ marque aussi qu'il faut prendre d'abord la 2^e puissance de a^2 , ensuite deux produits de a^2 par $-b^2$; & enfin la 2^e puissance de $-b^2$, & l'on aura $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$.

De même pour élever 23 à la 2^e puissance, il faut supposer $a = 2$, & $b = 3$, écrire dans les rangs qui leur conviennent la 2^e puissance de 2, ensuite deux fois le produit de 2 par 3, & enfin le carré de 3, & l'on aura 529 pour la 2^e puissance ou le carré de 23.

REMARQUE.

170. **L**ES Lecteurs qui commencent, doivent se rendre très familiers les produits de chaque puissance, & sur-tout de la 1^e & de la 3^e. Sçavoir que le carré d'un binôme représenté par $a + b$, contient le carré a^2 du premier terme, deux fois le produit du premier terme par le second, lequel produit est $2ab$; & enfin le carré b^2 du second terme. Que la 3^e puissance d'un binôme représenté par $a + b$ contient la 3^e puissance a^3 du premier terme, trois fois le produit du carré du premier terme par le second, c'est à dire $3a^2b$; trois fois le produit du premier terme par le carré du second, c'est à dire $3ab^2$, enfin la 3^e puissance b^3 du second terme. Et ainsi des autres.

2^e. Pour les grandeurs complexes de trois termes qu'on appelle trinômes, de quatre termes qu'on nomme quadrinômes; & pour les grandeurs complexes de tant de termes qu'on voudra, & même d'une infinité de termes.

171. **P**OUR élever une grandeur complexe de trois termes, de quatre termes, & de tant de termes qu'on voudra, qu'on pourra représenter par les lettres de l'alphabet; par exemple, pour élever $a + b + c + d + e + f + g + \&c.$ à telle puissance qu'on voudra, dont l'exposant soit un nombre entier qu'on représentera ici pour s'expliquer plus clairement par l'indéterminée n , il faut multiplier continuellement cette grandeur complexe par elle-même autant de fois qu'il y a

d'unités dans l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever cette grandeur moins une, c'est à dire autant de fois qu'il y a d'unités dans $n - 1$, & le dernier produit sera la puissance que l'on cherche; le premier produit sera la 1^{re} puissance, le second sera la 3^e puissance de la grandeur complexe, & ainsi de suite.

171. Ou bien on se servira de cette seconde manière que l'on doit se rendre très familière. On prendra dans la table des puissances, la formule de la puissance de $a \rightarrow b$, qui a le même exposant que la puissance à laquelle on veut élever la grandeur complexe de plusieurs termes proposée, & ensuite 1^o, on élèvera les deux premiers termes $a \rightarrow b$ de la grandeur proposée, par le moyen de la formule à la puissance de la formule. 2^o. On supposera ensuite que a de la formule représente les deux premiers termes $a \rightarrow b$ de la grandeur proposée, que b de la formule en représente le troisième terme c , & que la puissance de a seule dans le premier terme de la formule, représente les deux premiers termes de la grandeur proposée, déjà élevés par la première opération à la puissance qu'on demande; ensuite on substituera, dans les termes de la formule qui suivent le premier, la somme des deux premiers termes $a \rightarrow b$ de la grandeur proposée, & les puissances de cette somme, à la place de a , & des puissances de a dans la formule; & on substituera c , & les puissances de c , à la place de b , & des puissances de b dans tous les termes de la formule qui suivent le premier; & après ces substitutions l'on aura déjà les trois premiers termes $a \rightarrow b \rightarrow c$ de la grandeur proposée, élevés à la puissance qu'on demande. 3^o. On supposera que a de la formule représente la somme des trois termes $a \rightarrow b \rightarrow c$ de la grandeur proposée; que b de la formule représente le quatrième terme d de la grandeur proposée; & que la puissance seule de a , dans le premier terme de la formule, représente la puissance semblable de la somme des trois premiers termes $a \rightarrow b \rightarrow c$ que l'on a déjà trouvée; ensuite on substituera $a \rightarrow b \rightarrow c$, & les puissances de $a \rightarrow b \rightarrow c$ à la place de a & des puissances de a dans les termes de la formule qui suivent le premier; on substituera dans les mêmes termes & dans le dernier, d & les puissances de d à la place de b & des puissances semblables de b , & l'on aura les quatre premiers termes $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ de la grandeur

proposée élevez à la puissance qu'on demande. 4°. On trouvera de même par ordre tous les autres termes de la puissance de la grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra, en supposant tous les termes de cette grandeur, dont on a déjà la puissance, représentés par a de la formule, celui qui les suit représenté par b de la formule, & que la puissance seule de a , dans le premier terme de la formule, représente la puissance de la somme de tous les termes précédens qu'on a déjà formée, & en substituant dans les autres termes de la formule les grandeurs qu'on vient de supposer égales à a & b de la formule, à leur place, & les puissances de ces grandeurs à la place des puissances semblables de a & de b de la formule. Cette méthode s'éclaircira par les exemples suivans.

173. On remarquera que quand il faut substituer dans une formule à la place de toutes les lettres qu'elle contient les grandeurs particulières que représentent ces lettres, sans qu'il reste une lettre de la formule, elle marque alors simplement les opérations qu'il faut faire sur les grandeurs que représentent les lettres de la formule, pour avoir l'expression de ces grandeurs particulières représentée par la formule, & dans ce cas on entend par substituer les grandeurs particulières dans la formule, à la place des lettres qui les représentent, faire sur ces grandeurs particulières les opérations de multiplication, de division, &c. que marque la formule : & c'est ce qu'on entend ici.

E X E M P L E I.

Pour élever $a + b + c + d + e$ à la 2^e puissance, on se servira de la formule $a^2 + 2ab + b^2$, & elle sera la 2^e puissance des deux premiers termes $a + b$; mais si les deux premiers termes de $a + b + c + d + e$ n'étoient pas ceux de la formule, on trouveroit leur 2^e puissance * à la manière des binomes. 169

2°. On supposera que a de la formule représente $a + b$, & que b de la formule représente c , & que a^2 représente la 2^e puissance $a^2 + 2ab + b^2$ des deux premiers termes de $a + b + c + d + e$ déjà trouvée, & les deux autres termes $2ab + b^2$ marquent qu'il faut multiplier $2 \times a + b$, représenté par $2a$ de la formule, par c représenté par b de la formule, & b^2 de la formule marque

qu'il faut prendre c^2 représenté par b^2 de la formule ; & l'on aura déjà $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ pour la 2^e puissance des trois premiers termes $a + b + c$ de $a + b + c + d + e$.

3^e. Il faut supposer que a de la formule représente $a + b + c$, b de la formule représente d , & que a^2 de la formule représente la 2^e puissance de $a + b + c$ déjà formée ; ensuite $2ab + b^2$ de la formule marquent les produits $2 \times a + b + c \times d$ & d^2 . Ainsi l'on aura déjà $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$.

4^e. On supposera $a + b + c + d = a$ de la formule, & $e = b$ de la formule, & les termes $2ab + b^2$ de la formule, marquent qu'il faut prendre le produit $2 \times a + b + c + d \times e = 2ab$ de la formule, & $e^2 = b^2$ de la formule. Ainsi la 2^e puissance de $a + b + c + d + e$ sera $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 + 2ae + 2be + 2ce + 2de + e^2$.

S'il y avoit eu encore d'autres termes dans la grandeur complexe $a + b + c + d + e$ on auroit continué de la même manière de les élever à la 2^e puissance.

EXEMPLE II.

POUR élever $a + b + c + d + e$ à la 3^e puissance, il faut se servir de la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & 1^o. les deux premiers termes de la grandeur proposée étant $a + b$ les mêmes que ceux de la formule, l'on a déjà dans la formule ces deux premiers termes élevez à la 3^e puissance, s'ils en étoient différents, on les éleveroit à la 3^e puissance * comme les binomes par le moyen de la formule.

2^o. Il faut supposer que a de la formule représente $a + b$ de la grandeur à élever, que b de la formule représente le troisième terme c , & que a^2 représente la 3^e puissance des deux premiers termes déjà trouvée. Les termes $3a^2b + 3ab^2$ marquent qu'il faut prendre $3 \times a + b \times c = 3a^2b$; $3 \times a + b \times c^2 = 3ab^2$, & $c^3 = b^3$; & faisant le calcul, on aura déjà $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$ pour la 3^e puissance de $a + b + c$.

3^o. On supposera que a de la formule représente $a + b + c$

que b de la formule représente d , que a de la formule représente la 3^e puissance de $a + b + c$ déjà trouvée, les trois termes de la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ marquent qu'il faut

prendre $3 \times a + b + c \times d = 3a^2b$, $3 \times a + b + c \times a^2 = 3ab^2$, &c. $d^3 = b^3$; & faisant le calcul, on trouvera que les termes qu'il faut ajouter à ceux que l'on a déjà trouvés sont $3a^3d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3$.

4^e. Enfin on supposera que a de la formule représente $a + b + c + d$, que b de la formule représente e , que a de la formule représente la 3^e puissance de $a + b + c + d$ déjà trouvée; &c. les termes $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ de la formule mar-

quent qu'il faut prendre $3 \times a + b + c + d \times e = 3a^2b$;

$3 \times a + b + c + d \times e^2 = 3ab^2$, &c. $e^3 = b^3$; & faisant le calcul on trouvera que les termes qu'il faut ajouter à ceux que l'on a déjà trouvés, sont $3a^3e + 6abe + 3b^2e + 6ace + 6bce + 3c^2e + 6ade + 6bde + 6cde + 3a^2e + 3ae^2 + 3be^2 + 3ce^2 + 3de^2 + e^3$.

Si l'y avoit eu plus de termes dans la grandeur proposée $a + b + c + d + e$, on auroit trouvé tous les autres termes de la 3^e puissance par le moyen de la formule, comme l'on a trouvé tous les précédens.

REMARQUES.

I.

174. ON pourra de la même manière élever toute grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra à la 4^e puissance, à la 5^e, &c. par le moyen des formules de ces puissances. Mais il suffit ordinairement pour apprendre les Mathématiques de se rendre familière la formation de la 2^e &c. de la 3^e puissance, &c. de retenir, 1^o, Que le carré ou la 2^e puissance d'une grandeur complexe de plusieurs termes, contient le carré du premier terme, plus deux produits du premier terme par le second, plus le carré du second terme, plus deux produits de la somme des deux premiers termes par le troisième, plus le carré du troisième terme, plus deux produits de la somme des trois premiers termes par le quatrième, plus le carré du quatrième terme; & ainsi de suite.

2^o. Que le cube ou la troisième puissance d'une grandeur com-

plus contient le cube du premier terme, plus trois produits du quarré du premier terme par le second, plus trois produits du premier terme par le quarré du second, plus le cube du second terme, plus trois produits du quarré de la somme des deux premiers termes par le troisiéme, plus trois produits de la somme des deux premiers termes par le quarré du troisiéme, plus le cube du troisiéme terme, plus trois fois le produit du quarré de la somme de trois premiers termes par le quatriéme, plus trois fois le produit de la somme des trois premiers termes par le quarré du quatriéme, plus le cube du quatriéme terme, &c ainsi de suite.

2.

175. La premiere methode de former les puissances des grandeurs complexes par la multiplication continue de la même grandeur, est une suite évidente de la définition * des puissances, &c la seconde où l'on se sert des puissances d'un binome comme de formules pour trouver les puissances des grandeurs complexes de tant de termes qu'on voudra, n'a pas besoin de démonstration, ce n'est qu'une application de l'universalité des expressions littérales qui représentent toutes sortes de grandeurs; c'est une application de l'étendue du calcul de ces expressions générales qui représente les calculs particuliers; c'est l'avantage que donnent ces expressions générales d'abréger les expressions même littérales les plus composées, en les réduisant à une expression très simple. Par exemple, on peut représenter par le simple produit ab des deux grandeurs a & b le produit de deux grandeurs les plus complexes, pour ainsi dire qu'on puisse imaginer, comme de $c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g$, &c. par $b \rightarrow i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow m$, &c. en supposant la premiere représentée par a , &c la seconde par b . Ce sont des signes arbitraires qu'on ne sauroit contester, &c dont on tire des avantages infinis pour représenter les objets les plus composés, &c tous les rapports, dans les bornes de notre esprit que les objets passent de beaucoup par leurs expressions particulières.

3.

176. Lorsqu'un ou plusieurs termes de la grandeur complexe à élever à une puissance donnée sont précédés du signe —, la formation de la puissance de cette grandeur se fait de la même

me maniere, & l'on trouve les mêmes termes, en observant seulement que les produits où se trouve un terme négatif avec des dimensions impaires, comme 1, 3, 5, &c. doivent avoir le signe —, & que les produits où se trouvent plusieurs termes négatifs, doivent encore avoir le signe —, si les exposans des dimensions de ces termes joints ensemble font un nombre impair; par exemple, s'il y avoit $-b - c$ parmi les termes de la grandeur à élever, les produits où il y auroit $-b \times c^2$, $b^2 \times -c^3$, $b^2 \times -c^3$; $-c^3 \times b^2$, &c. * 98, seroient négatifs. De même s'il y avoit $-b - c - d$, les produits $-b \times -c \times -d^2$, $-b^2 \times -c \times -d^2$, $-b^2 \times -c^2 \times -d^3$, &c. seroient négatifs.

La formation des puissances des grandeurs numeriques.

PROBLÈME IV.

177. **E**LEVER un nombre entier quelconque à telle puissance qu'on voudra, dont l'exposant est un nombre entier positif.

IL faut se servir des mêmes methodes que l'on a employées pour les grandeurs litterales. La premiere est de multiplier le nombre proposé continuellement par lui-même autant de fois que l'exposant de la puissance à laquelle on le veut élever contient d'unités moins une. Et le premier produit sera la 2^e puissance ou le quarré; le second sera le cube ou la 3^e puissance, le troisieme sera la 4^e puissance, & ainsi de suite. C'est par cette methode qu'il faut former les puissances seules des premiers chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 & 10.

La seconde methode est de se servir des formules de la table des puissances. Pour faire clairement concevoir l'application de cette methode, on fera les remarques suivantes, 1^o. Que l'on peut regarder un nombre qui a plusieurs rangs, par exemple 2345, comme une grandeur complexe d'autant de termes que ce nombre a de rangs. Le premier chiffre 2 à gauche est le premier terme; le suivant 3 vers la droite est le second, & ainsi de suite.

2^o. Que quoique la multiplication d'un nombre complexe par lui-même, comme de 2345 par 2345, ou par un autre nombre complexe, se fasse ordinairement en commençant

par le premier chiffre de la droite en allant de suite vers la gauche, on peut cependant la faire en commençant par le premier chiffre 2 de la gauche en allant de suite de la gauche à la droite, pourvu qu'on observe de mettre devant

- * 81. le produit du premier chiffre à gauche par lui-même, * autant de rangs qu'il y en a devant le chiffre multiplié & devant le chiffre multiplicateur, c'est à dire deux fois autant de rangs qu'il y en a devant le chiffre multiplié par lui-même, & qu'on observe la même règle des rangs dans
- * 82. tous les produits suivants, c'est à dire * de mettre toujours devant le produit d'un chiffre par un autre, la somme des rangs qui sont devant le multiplié & le multiplicateur.

Après ces remarques on supposera d'abord le premier chiffre 2 le plus à gauche du nombre complexe, représenté par a de la formule, & le second 3 en allant vers la droite représenté par b de la formule, & l'on prendra les puissances & les produits de 2 & de 3 marquez par les produits de a & de b de la formule que l'on écrira les uns sous les autres en observant de les placer aux rangs qui leur conviennent. Ensuite on supposera que a de la formule représente les deux premiers chiffres 23 du nombre donné pris selon la valeur de leurs rangs, c'est à dire 2300, que b représente le troisième 4 pris aussi suivant la valeur de son rang, c'est à dire 40, & que la puissance de a qui est le premier terme de la formule représente la puissance déjà trouvée de 23: & l'on prendra les puissances & les produits de 23 = a & de 4 = b que marque la formule, & on les écrira sous les autres chacun au rang qui lui convient. En un mot on supposera que tous les chiffres dont on a déjà trouvé la puissance, sont représentés par a , & le suivant à droite par b , & on en écrira les puissances & les produits marquez par la formule aux rangs qui conviennent à chacun, jusqu'à ce qu'on ait employé le dernier chiffre le plus à droite. Enfin on ajoutera tous ces produits en une somme qui sera la puissance que l'on cherche.

I E X E M P L E.

P OUR élever 2345 au quarré, on supposera que a , de la formule $a^2 + 2ab + b^2$, représente 2, & que b représente 3. Et l'on prendra comme le marque la formule,

2345

Ensuite on supposera que a de la formule représente 234 ; que b représente 5 , & que a^2 représente le carré de 234 qu'on a déjà formé , & l'on prendra $2 \times 234 \times 5 = 2340 = 2ab$, & $25 = b^2$, & on écrira ces produits sous les précédens dans les rangs qui leur conviennent .

Enfin on ajoutera tous les produits qu'on a formés , dans une somme , & l'on aura 5499025 pour le carré de 2345 .

REMARQUE.

2345							
2345							
4000000	=	2000	×	2000	=	a^2	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} a^2$
600000	=	2000	×	300	=	$2ab$	
600000	=	300	×	2000	=	$2ab$	
90000	=	300	×	300	=	b^2	
92000	=	2300	×	40	=	$2ab$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a^2$
92000	=	40	×	2300	=	$2ab$	
1600	=	40	×	40	=	b^2	
21700	=	2340	×	5	=	$2ab$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a^2$
21700	=	5	×	2340	=	$2ab$	
25	=	5	×	5	=	b^2	
5499025							

5499025 carré de 2345

Les Lecteurs qui commencent pourront remarquer , qu'en suivant la formule , on distingue les produits qui composent le carré de 2345 , & qu'on les range dans un ordre qui sert à les retrouver , quand ce carré étant donné on en cherche la racine carrée 2345 . Et s'ils multiplient 2345 par 2345 par la multiplication ordinaire , soit en commençant par la droite en allant vers la gauche , soit en commençant par la gauche en allant vers la droite , en observant de placer les produits particuliers dans les rangs qui leur conviennent , ils verront clairement que quoiqu'on ne distingue pas ces produits , en faisant la multiplication ordinaire , elle les contient pourtant tous , & qu'elle n'en contient aucun autre . Il leur sera plus utile de le voir eux-mêmes en faisant beaucoup d'exemples , que si l'on employoit un long discours pour l'expliquer .

II. EXEMPLE.

179. **P**OUR élever 2345 à la 3^e puissance ou au cube, il faut se servir de la formule $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & supposer d'abord que a de la formule représente 2, & que b représente 3, & prendre les puissances & les produits de 2 & de 3 marquez par la formule; les écrire les uns sous les autres dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit ici.

Exemple 11.

2345 nombre à élever à la 3^e puissance.

$$\begin{array}{rcl}
 2 & = a^3 & 8 \cdot 000 \cdot 000 \cdot 000 = a^3 \\
 3 & = b^3 & 3 \cdot 600 \cdot 000 \cdot 000 = 3a^2b \\
 & & \cdot \cdot \cdot 540 \cdot 000 \cdot 000 = 3ab^2 \\
 & & \cdot \cdot \cdot 27 \cdot 000 \cdot 000 = b^3 \\
 & & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} a^3 \\
 \\
 23 & = a^3 & \cdot 634 \cdot 800 \cdot 000 = 3a^2b \\
 4 & = b^3 & \cdot \cdot \cdot 18 \cdot 040 \cdot 000 = 3ab^2 \\
 & & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 64 \cdot 000 = b^3 \\
 & & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a^3 \\
 \\
 234 & = a^3 & \cdot \cdot \cdot 82 \cdot 134 \cdot 000 = 3a^2b \\
 5 & = b^3 & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 175 \cdot 500 = 3ab^2 \\
 & & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 125 = b^3 \\
 \hline
 & & 12: 895 : 213 : 625 \text{ cube de } 2345. \\
 & & *qr: pqr : pqr : pqr \\
 & & \cdot A \quad B \quad C \quad D
 \end{array}$$

Après cette première opération, il faut supposer que a de la formule représente 23, que b représente 4, & que a^3 représente la 3^e puissance de 23 déjà formée, & prendre les puissances & les produits des nombres représentés par a & par b que prescrit la formule, & les écrire sous les précédens dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans l'exemple.

Ensuite il faut supposer que a de la formule représente 234, que b représente 5, & que a^3 représente la 3^e puissance de 234 déjà formée, & prendre les puissances & les produits des grandeurs représentées par a & par b que prescrit la formule, & les écrire sous les précédens dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans l'exemple.

Enfin il faut ajouter tous les produits qu'on a trouvez dans une somme, & l'on aura 12895213615 pour le cube, ou la 3^e puissance de 2349.

REMARQUES.

1.

180 **P**OUR élever un nombre donné à la 4^e puissance, il faut d'abord l'élever à la 2^e puissance, & élever cette 2^e puissance, considérée comme une racine, à la 2^e puissance, & ce sera la 4^e puissance du nombre proposé.

Pour élever un nombre à la 6^e puissance, il faut d'abord l'élever à la 2^e puissance, & élever cette 2^e puissance à la 3^e puissance, & ce sera la 6^e puissance qu'on cherche. Ou bien il faut élever le nombre proposé à la 3^e puissance, & élever cette 3^e puissance à la 2^e, & ce sera la 6^e puissance qu'on cherche.

Pour élever un nombre à la 8^e puissance, il faut d'abord l'élever à la 2^e puissance; élever ensuite cette 2^e puissance à la 2^e puissance; enfin élever cette dernière à la 2^e puissance: ce sera la 8^e puissance qu'on cherche.

En general, lorsque l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever un nombre, se peut diviser exactement par des nombres entiers, differens de l'unité (par exemple, l'exposant 4 de la 4^e puissance peut se diviser par 2 & 2, l'exposant 6 de la 6^e par 2 & 3, l'exposant 8 de la 8^e par 2, 2, 2, & encore par 2 & 4; l'exposant 9 de la 9^e par 3 & 3, l'exposant 12 de la 12^e par 2, 2, 3, & encore par 3 & 4, & encore par 2 & 6, & ainsi des autres:) au lieu d'élever le nombre immédiatement à la puissance proposée, il est plus court de choisir, pour exposans particuliers, les diviseurs, qui étant multipliez les uns par les autres, donnent pour produit l'exposant de la puissance cherchée, & d'élever le nombre proposé à la puissance marquée par le premier de ces diviseurs, celle-ci à la puissance marquée par le second des diviseurs, cette dernière à la puissance marquée par le diviseur suivant, & ainsi de suite jusqu'à la puissance marquée par le dernier des diviseurs, laquelle sera la puissance qu'on cherche.

Par exemple, pour élever un nombre à la 12^e puissance, dont l'exposant 12 a pour diviseurs $2 \times 2 \times 3 = 12$, il faut l'élever à la 2^e, celle-ci à la 2, & cette dernière à la 3^e, la-

quelle sera la 12 puissance qu'on cherche. On remarquera qu'il faut choisir les diviseurs, dont le produit forme l'exposant de la puissance qu'on cherche, qui sont les exposans des puissances les plus faciles à former. Par exemple, les diviseurs de 12, dont le produit forme 12, étant $2 \times 2 \times 3$, 3×4 ; 2×6 . il est visible que les trois $2 \times 2 \times 3$ sont les exposans des puissances plus aisées à calculer que 3×4 , &c que 2×6 .

La raison de cette pratique est évidente. Car supposez que a représente le nombre à élever, que le nombre entier qui est l'exposant de la puissance qu'on cherche soit représenté par n , que les diviseurs exacts de n soient marquez par b, c, d . De façon que $bcd = n$, il est évident * que $a^n = a^b \times a^c \times a^d =$ * 150.

II. REMARQUE.

D'où l'on voit qu'il n'y a que les puissances, dont les exposans n'ont pas d'autres diviseurs que l'unité, comme la 2^e, la 3^e, la 5^e, la 7^e, la 11^e, la 13^e, la 17^e, la 19^e, &c qu'il faille le trouver immédiatement, &c que toutes les autres peuvent s'y réduire.

III. EXEMPLE.

181. POUR élever 234 à la 5^e puissance, il faut se servir de la formule $a^n = 3a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, &c supposer

Exemple III

234 nombre à élever à la 5^e puissance,

$$\left. \begin{array}{l} 2 = a \cdot 32 \cdot 00000 \cdot 00000 = a^5 \\ \quad \cdot 24 \cdot 0.0000 \cdot 00000 = 5a^4b \\ 3 = b \cdot 7 \cdot 20000 \cdot 00000 = 10a^3b^2 \\ \quad \cdot 1 \cdot 080.00 \cdot 00000 = 10a^2b^3 \\ \quad \cdot \quad \cdot 8100 \cdot 00000 = 5ab^4 \\ \quad \cdot \quad \cdot 243 \cdot 00000 = b^5 \end{array} \right\} = a^5$$

$$\begin{array}{l} 23 = a \cdot 5 \cdot 59682 \cdot 00000 = 5a^4b \\ 4 = b \cdot 19467 \cdot 20000 = 10a^3b^2 \\ \quad \cdot \quad \cdot 338 \cdot 560.00 = 10a^2b^3 \\ \quad \cdot \quad \cdot 2 \cdot 94400 = 5ab^4 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot 1024 = b^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} : 70 : 15833 : 71424 & 5^e \text{ puiss. de } 234, \\ f1 & pqrfs & pqrfs & & \\ A & B & C & & \end{array}$$

d'abord que a représente 2 ; que b représente 3. Prendre les puissances & les produits de 2 & de 3 que prescrit la formule, & les écrire les uns sous les autres dans les rangs qui leur conviennent, comme on le voit dans la page précédente.

Il faut ensuite supposer $23 = a$, & $4 = b$, & que a^5 représente la 5^e puissance de 23 qu'on vient de former, prendre les puissances & les produits de 23 & de 4 que prescrit la formule, les écrire sous les précédens dans les rangs qui leur conviennent ; enfin ajouter tous les produits dans une somme, & l'on aura 701583371424 pour la 5^e puissance de 234.

REMARQUE.

IL est inutile d'apporter ici d'autres exemples de la formation des puissances numériques. Il suffit aux Lecteurs de se rendre familière la formation de la 2^e & de la 3^e puissance, & d'avoir entendu la méthode de former les autres plus élevées, dont on a rarement besoin dans les Mathématiques.

182. *Démonstration de la méthode de former les puissances par le moyen de la table des puissances* 1°. Il est évident qu'une grandeur complexe littérale, comme $a + b + c + d$, &c. peut représenter un nombre qui aura autant de rangs qu'on voudra, en prenant autant de termes de la grandeur littérale qu'il y aura de rangs dans le nombre qu'on prendra ; par exemple $a + b + c + d$ peut représenter le nombre 2345, de manière que a représentera 2 ; b , 3 ; c , 4 ; d , 5 ; & ainsi des autres. 2°. Il est clair qu'en élevant $a + b + c + d$ à telle puissance qu'on voudra, cette puissance littérale représentera tous les produits particuliers des termes d'une semblable puissance de la grandeur numérique représentée par $a + b + c + d$, lesquels produits particuliers composent la puissance semblable de la grandeur numérique, avec cette seule chose particulière à la puissance numérique, qu'il faut observer que tous ces produits particuliers de la puissance numérique soient placés dans les rangs qui leur conviennent, *suivant la règle des rangs* ; mais ce sont toujours les vrais produits numériques représentés par les produits des Lettres, qui, joints ensemble, forment la puissance numérique.

- *171. &c. Or on a fait voir * que les formules des puissances des grandeurs complexes binômes représentoient tous les produits des semblables puissances des grandeurs complexes littérales

de tant de termes qu'on voudra, & faisoient découvrir ces produits. Ces mêmes formules font donc aussi découvrir tous les produits particuliers des termes des grandeurs numériques, qui composent joints ensemble chaque puissance de ces grandeurs numériques, en observant de les placer les uns sous les autres, à mesure qu'on les trouve, dans les rangs qui leur conviennent, & en les ajoutant dans une somme qui les contient tous, & qui est la puissance numérique qu'on cherchoit.

DÉFINITION.

183. **U**N nombre entier qui est formé par le produit d'un nombre entier multiplié continuellement par lui-même, s'appelle une *puissance parfaite*; Ainsi 4 produit de 2×2 est un carré parfait. $8 = 2 \times 2 \times 2$ est un cube parfait. $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ est une 4^{e} puissance parfaite. Les autres nombres entiers, quand on les considère comme des puissances, & qu'ils ne peuvent être formés par le produit d'un nombre entier multiplié continuellement par lui-même, s'appellent *des puissances imparfaites*. Ainsi $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$, & les autres semblables sont des puissances imparfaites.

COROLLAIRES.

I.

184. **Q**UAND on a la puissance parfaite telle qu'on voudra d'un nombre entier quelconque qui sera nommé a , pour l'exprimer d'une manière indéterminée qui convienne à tout nombre entier; si l'on veut trouver la puissance semblable parfaite du nombre $a + 1$, qui surpasse le nombre a d'une unité, il n'y a qu'à prendre dans la table des puissances la formule de cette puissance, supposer que a de la formule représente le nombre entier a qui est la racine de la puissance parfaite; que la puissance la plus haute de a , qui est le premier terme de la formule, représente la puissance parfaite du nombre supposé égal à a , & mettre 1 à la place de b , & des puissances de b dans la formule, & tous les termes de la formule ainsi changée, qui suivent le premier, marqueront les produits qu'il faut ajouter à la puissance supposée de a , pour former la puissance parfaite de $a + 1$.

Ainsi $a^2 + 2a + 1$ marque que, quand on a le carré par-

fait d'un nombre, comme 9 carré de 3; si l'on veut le carré de $4 = 3 + 1$, il faut ajouter à 9, $2 \times 3 + 1$, & l'on aura 16 pour le carré de $3 + 1 = 4$.

De même $a^3 + 3aa + 3a + 1$ est la formule pour trouver, quand on a le cube parfait d'un nombre, le cube parfait du nombre qui surpasse le premier d'une unité. Par exemple, 8 est le cube de 2; la formule fait découvrir $8 + 12 + 6 + 1 = 27$ pour le cube parfait de $3 = 2 + 1$. Il est facile de trouver les formules des puissances plus élevées, & de les appliquer à des exemples.

REMARQUE.

LA formule $a^2 + 2a + 1$ fait découvrir une propriété des nombres impairs pris de suite 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. que voici.

L'unité qui est le premier terme, étant d'abord prise seule, & prenant ensuite les sommes des deux premiers termes, des trois premiers termes, des quatre premiers termes, & ainsi de suite, l'unité & ces sommes sont par ordre les quarrés parfaits des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. Cela vient, 1°. de ce que toutes les puissances & toutes les racines de l'unité n'étant que l'unité même, l'unité est le carré de l'unité: 2°. De ce que la différence des nombres impairs est 2. 3°. Enfin, de ce que les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. expriment de suite les nombres des termes de la progression arithmétique des nombres impairs 1, 3, 5, &c. Ainsi le nombre impair qui suit une somme des termes impairs, contient le nombre des termes de cette somme deux fois, & 1 de plus. D'où il suit qu'en mettant dans $a^2 + 2a + 1$ le carré de l'unité, qui est l'unité, à la place de a , & la racine de l'unité, qui est aussi l'unité, à la place de a , on aura $1 + 2 + 1 = 1 + 3 = 4$ carré de $1 + 1 = 2$. Substituant ensuite 4 à la place de a , & 2, racine carrée de 4, à la place de a , on aura $4 + 4 + 1 = 1 + 3 + 5 = 9$, carré de $1 + 1 = 3$. Substituant à présent 9 à la place de a , & 3 racine carrée de 9 à la place de a , on aura $9 + 2 \times 3 + 1 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ carrée de $3 + 1 = 4$; & ainsi de suite. D'où l'on voit que le nombre des termes d'une somme des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. est la racine carrée de cette somme; & que cette somme est le carré parfait du nombre des termes.

AVERTISSEMENT.

A V E R T I S S E M E N T.

ON a vû * dans la formation des puissances numeriques * 177. d'un nombre complexe qui a plusieurs rangs ou caracteres, (lequel nombre est la racine de ces puissances,) que chaque puissance totale contenoit la semblable puissance de chacun des caracteres de la racine, & de plus les autres produits representez par la formule de cette puissance; par exemple, que le quarré de 2345 contenoit le quarré de chacun des caracteres 2, 3, 4, 5, & de plus les autres produits que fait découvrir la formule des quarréz. Il est important de bien distinguer dans chaque puissance totale numerique, les places ou les rangs des puissances semblables de chaque caractère de la racine de cette puissance, & les rangs ou les places des autres produits particuliers qui sont, étant joints ensemble, la puissance totale. C'est ce qu'on va enseigner dans les Theorèmes & les Corollaires suivans.

T H E O R È M E.

185. **D**ANS la puissance quelconque d'un nombre complexe, la puissance semblable particuliere de chaque caractère de la racine, a devant elle un nombre de rangs qui contient autant de fois le nombre des rangs qui sont devant ce caractère dans la racine, que l'exposant de la puissance contient d'unités.

Dans le quarré d'un nombre qui a plusieurs caracteres ou plusieurs rangs, par exemple, dans le quarré dont 2345 est la racine quarrée, le quarré particulier de chaque caractère a devant lui le double des rangs qui sont devant ce caractère dans la racine. Par exemple, 2 a trois rangs devant lui dans 2345; dans le quarré de 2345 le quarré particulier de 2 a deux fois trois rangs devant lui; le quarré de 3 a deux fois deux rangs devant lui; le quarré de 4 a deux fois un rang devant lui; le quarré de 5 est au rang des unités.

Dans la 3^e puissance, ou dans le cube d'un nombre, le cube particulier de chaque caractère de la racine a devant lui le triple des rangs qui sont devant ce caractère dans la racine.

Dans la 4^e puissance d'un nombre, la 4^e puissance particuliere de chaque chiffre ou de chaque caractère de la racine

a devant elle le quadruple des rangs qui sont devant ce caractère dans la racine.

Dans la 5^e puissance, dont l'exposant est 5, la 5^e puissance particulière de chaque caractère de la racine a devant elle le quintuple des rangs qui sont devant ce caractère dans la racine.

- * 81. & 177. Ce Théorème est une suite évidente * de la règle que l'on a donnée pour placer les produits de la multiplication dans les rangs qui leur conviennent.

A B C D

D É F I N I T I O N.

q. p. q. p. q.

5, 4, 9, 90, 25

Si l'on distingue par des points ou par des virgules, ou par de petites lignes droites dans un nombre complexe comme 5499025, les rangs des deux en deux, ou de trois en trois, ou de quatre en quatre, &c. en commençant par les rangs de la droite en allant vers la gauche; on nommera cela partager ce nombre complexe en tranches chacune de deux rangs, ou chacune de trois rangs, ou chacune de quatre rangs, &c. & toutes les tranches auront chacune le même nombre de rangs, excepté celle qui est la plus à gauche qui peut en avoir moins.

On nommera A la tranche la plus à gauche, qui est celle qui se présente la dernière en partageant le nombre complexe en tranches; on nommera B, C, D, E, &c. celles qui suivent vers la droite. On nommera aussi A la première tranche; B, la seconde; C, la troisième, & ainsi de suite.

On nommera, dans chaque tranche, p le chiffre le plus à gauche, q, r, s, t, &c. les autres suivans vers la droite. On nommera aussi dans chaque tranche le chiffre ou le rang p, le premier rang de cette tranche; & q, r, s, t, &c. le second le troisième, le quatrième rang, &c. de cette tranche,

- * 177. On a fait distinguer * dans la puissance parfaite d'un nombre complexe qui en est la racine, quels étoient les puissances particulières & les produits des caractères de la racine, qui joints ensemble composoient la puissance totale. Pour marquer en quelle tranche & en quel rang d'une tranche chacun de ces produits commence à se trouver, on dira qu'il se trouve

en tel rang d'une telle tranche. Les Lecteurs voyent bien que si chacun de ces produits a plusieurs, rangs il ne peut y avoir au plus que son premier chiffre à droite

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
qui se trouve contenu	<i>q</i>	<i>pq</i>	<i>pq</i>	<i>pq</i>
dans le rang où l'on dira qu'il se trouve, &c	<i>5</i>	<i>49</i>	<i>90</i>	<i>25</i>

que les autres chiffres sont dans les rangs qui suivent ce rang vers la gauche. Par exemple le carré *5* de la racine *2345*, se trouve au dernier rang marqué *q* de la dernière tranche *D* du carré de *2345*; parcequ'il commence à se trouver dans ce dernier rang. Le carré de *4* se trouve dans le dernier rang *q* de la troisième tranche *C*. Le carré de *3* se trouve dans le rang *q* de la seconde tranche *B*. Le carré de *2* se trouve dans le rang *q* de la première tranche *A*; il en est de même des autres.

THEOREME.

186. *Si l'on partage une puissance numerique quelconque en tranches chacune d'autant de rangs que l'exposant de la puissance contient d'unités, c'est à dire chacune de deux rangs, si c'est une 2^e puissance, de trois rangs, si c'est une 3^e puissance, &c ainsi des autres; la racine de cette puissance contiendra autant de rangs ou de caractères qu'il y aura de tranches: & elle n'en pourroit contenir ni plus ni moins.*

On prendra, afin de rendre la démonstration plus facile à concevoir, le carré nu-

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>q</i>	<i>pq</i>	<i>pq</i>	<i>pq</i>
<i>5</i>	<i>49</i>	<i>90</i>	<i>25</i>

merique qui a quatre tranches, &c dont la racine est *2345*.

Démonstration. Si l'on suppose une racine *2345* qui ait autant de rangs que la puissance a de tranches, c'est à dire dans notre exemple quatre rangs, la puissance aura par le * Theorème précédent autant de tranches que cette racine a de rangs; car la puissance du premier chiffre à gauche aura devant elle autant de tranches qu'il y a de rangs dans la racine devant ce caractère, &c cette puissance elle-même en ajoutera une de plus. Mais si l'on suppose que la racine a un seul rang de plus ou de moins que la puissance n'a de tranches, il est évident par le Theorème précédent que la puissance aura une tranche de plus ou de moins. D'où il suit que la

racine de cette puissance ne peut avoir qu'autant de rangs ou de caractères que la puissance a de tranches.

2^e Démonstration. Supposant que la puissance numérique a quatre tranches, & que ce soit la 2^e puissance, qu'on prenne l'unité précédée de quatre zero, il est évident que la 2^e puissance de 10000, qui est 1, 00, 00, 00, 00 aura cinq tranches. Mais 10000 est le plus petit des nombres qui ont cinq rangs, & 1, 00, 00, 00, 00 le plus petit des nombres qui ont cinq tranches. La racine d'un nombre qui n'a que quatre tranches, ne peut donc avoir cinq rangs.

Si l'on prend l'unité précédée de trois zero 1000, il est évident que la seconde puissance 1, 00, 00, 00 aura quatre tranches. Et 1000 étant le plus petit des nombres qui ont quatre rangs, & 1, 00, 00, 00 le plus petit de ceux qui ont quatre tranches, il est clair que la racine d'un nombre qui a quatre tranches, ne sauroit avoir moins de quatre rangs, puisqu'elle si elle n'en avoir que trois, étant moindre que 1000, sa 2^e puissance seroit moindre que celle de 1000, laquelle est la moindre de 2^e puissances qui ont quatre tranches.

Comme l'on n'a pris la 2^e puissance & quatre tranches que pour rendre la démonstration plus facile à entendre, & qu'on peut l'appliquer à toute puissance numérique d'autant de tranches qu'on voudra. Il est évident que la racine d'une puissance numérique doit avoir autant de caractères que cette puissance a de tranches.

THEORÈME.

187. *LES termes de chaque formule des puissances servent à distinguer, dans les puissances numériques semblables, les puissances des caractères de la racine de ces puissances, & les autres produits de ces caractères, représentés par les termes de la formule.*

Explication. Si l'on partage une puissance numérique quelconque en tranches, chacune d'autant de rangs que l'exposant de la puissance contient d'unités, (si c'est une 2^e puissance, chaque tranche contiendra deux rangs, comme dans le pré-

- * 178. mier exemple. * Si c'est une 3^e puissance, chaque tranche contiendra trois rangs, comme dans le 2^e exemple, * si c'est une 5^e puissance, chaque tranche contiendra cinq rangs, comme dans le 3^e exemple, * & ainsi des autres.) Si l'on prend ensuite dans la table des puissances la formule de cette puissance,

& qu'on suppose d'abord, x^a , que a de la formule représente le premier caractère le plus à gauche de la racine, & b le second la puissance du dernier caractère représentée par la plus haute puissance de a , commencera à se trouver dans le dernier rang, c'est à dire le plus à droite de la tranche A , & dans les rangs qui sont plus à gauche, s'il y en a. Ainsi * le quarré du premier caractère a , représenté par a^2 , se trouve au dernier rang q de la tranche A . Le cube * du premier caractère a représenté par a^3 , se trouve au dernier rang r de la tranche A . * la 5^e puissance de a représentée par a^5 , se trouve au dernier rang t de la tranche A . * Il en est de même des autres puissances. * 178. * 179. * 181.

Les produits représentés par les autres termes de la formule qui suivent la plus haute puissance de a , & qui sont les produits des puissances du premier & du second caractère représentés par a & b , se trouvent de suite dans la tranche B , savoir celui de la puissance de a moindre d'un degré que la plus haute, par b , dans le premier rang p de B . Le suivant cù est b^2 , dans le second rang q de B , le suivant cù est b^3 , dans le troisième rang r de B , & ainsi de suite, jusqu'à la puissance la plus haute de b seule sans a , qui est dans le dernier rang de B .

Ainsi dans le quarré, * $2ab$ est dans le rang p de la tranche B , b^2 est dans le rang q de B . Dans le cube, * $3a^2b$ est dans le rang p de B ; $3ab^2$ est dans le rang q de B , b^3 est dans le rang r de B . Il en est de même des autres puissances. * 178. * 179.

2°. Supposant ensuite que les deux premiers caractères à gauche de la racine sont représentés par a de la formule, & le troisième par b , la plus haute puissance de a , qui est seule, représentera la puissance semblable des deux premiers caractères contenue dans les tranches A & B de la manière qu'on vient d'expliquer, & les produits suivans de la formule dans lesquels se trouve b , représenteront de suite les produits des puissances des deux premiers caractères & du troisième, lesquels se trouvent aussi de suite dans les rangs p , q , r , &c. de la tranche C , de la manière qui a été expliquée dans le premier article précédent.

3°. Enfin si l'on suppose de suite, par rapport aux tranches suivantes D , E , &c. que a de la formule représente les trois premiers caractères de la racine, & b le quatrième; après cela

que a représente les quatre premiers caractères, & b le cinquième, & ainsi de suite jusqu'au dernier caractère à droite de la racine a ; la plus haute puissance seule de a représentera la puissance de tous les caractères marquez par a , qui est contenue dans les tranches précédentes, & les autres produits des puissances de a & de b qui suivent dans la formule, représenteront les produits qui se trouvent de suite dans les rangs de la tranche D , ou E , ou F , &c. qui répond au caractère de la racine représenté par b , c'est à dire de la quatrième, de la cinquième tranche, &c. si b représente le quatrième, le cinquième caractère, &c. de la racine.

* 81. Ce Théorème est une suite évidente des précédens, & * de la règle des rangs des produits de la multiplication.

Corollaire sur la formation des puissances des nombres qui contiennent des grandeurs décimales.

188. COMME la multiplication des grandeurs décimales ne diffère point de la multiplication des nombres entiers, & qu'il n'y a qu'à observer de marquer le point qui sépare les parties décimales des entiers, ou qui marque l'endroit où commencent les parties décimales, il est évident que la formation des puissances des nombres qui contiennent des parties décimales, est entièrement semblable à la formation des puissances des nombres entiers, & qu'il n'y a aussi qu'à observer de marquer le point qui précède les parties décimales à l'endroit qui lui convient; ce qui ne renferme aucune difficulté. Les rangs des produits particuliers sont les mêmes que si les nombres étoient entiers.

SECTION VI.

Où l'on explique la résolution des puissances numériques & littérales, ce qu'on nomme aussi l'extraction des racines.

DÉFINITION.

189. LA racine quarrée d'un nombre quarré, la racine cubique d'un nombre cubique; en un mot la racine d'une puissance

laquelle racine a le même exposant que cette puissance, se nommera simplement la racine de cette puissance. L'on a déjà dit que l'opération par laquelle on élève une grandeur donnée à une puissance, s'appelle la formation des puissances. L'opération par laquelle on trouve la racine d'une puissance donnée, s'appelle *l'extraction des racines*, ou la *résolution des puissances*.

Quand la puissance donnée n'est pas parfaite, l'extraction des racines fait découvrir la grandeur qui est la racine de la plus grande puissance parfaite qui est contenue dans la puissance imparfaite. Ainsi si l'on cherchoit la plus grande racine cubique de 40, on trouveroit 3 pour la racine cubique de 27, 27 est le plus grand nombre cube contenu dans 40.

De l'extraction des racines numériques.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

190. ON suppose que l'on sçait les puissances des neuf chiffres, 1, 2, 3, &c. voici la table qui les contient.

Table des puissances des neuf chiffres.

racines	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9
quarrez	1	4	9	16	25	36	49	64	81
cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4 ^{te} puiss.	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5 ^{te} puiss.	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6 ^{te} puiss.	1	128	3187	16384	78125	279936	823743	2097152	4782969

PROBLÈME.

191. TROUVER la racine d'une puissance numérique quelconque, dont l'exposant peut être représenté par l'indéterminé n , qui marquera un nombre entier quelconque.

REGLE ou *Operation*. 1°. Il faut partager la puissance numérique donnée en tranches chacune d'autant de rangs que l'exposant n de la puissance contient d'unités, excepté celle qui sera la plus à gauche qui peut en avoir moins. C'est à dire, si l'on cherche la racine de la 2^e puissance, chaque tranche doit contenir deux rangs; si l'on cherche la racine

de la 3^e puissance, chaque tranche doit contenir trois rangs; si l'on cherche la racine de la 4^e puissance, chaque tranche doit contenir quatre rangs; &c ainsi des autres.

Le nombre des tranches fera connoître le nombre des caractères ou des rangs de la racine qu'on cherche, puisque * la racine doit avoir autant de caractères que l'on trouvera de tranches.

On tirera une petite ligne ou un petit arc vers la droite de la puissance numérique; la place de la racine sera au devant de cet arc. La première tranche *A* seule fera le premier membre de l'extraction; ce qui restera de la première tranche, après qu'on aura opéré sur elle, étant joint avec la seconde tranche *B*, fera le second membre de l'extraction. Quand on aura opéré sur le second membre, le reste qui en viendra étant joint avec la troisième tranche *C*, fera le 3^e membre de l'extraction, &c ainsi de suite. De manière qu'il y aura autant de membres, de l'extraction, qu'il y a de tranches, &c qu'il y a de caractères dans la racine qu'on cherche, &c autant d'opérations à faire pour découvrir ces caractères.

Après cela il faut prendre dans la table des puissances la formule de la puissance dont on veut extraire la racine, savoir $a^2 \rightarrow 2ab \rightarrow b^2$ si l'on veut tirer la racine quarrée, $a^3 \rightarrow 3a^2b \rightarrow 3ab^2 \rightarrow b^3$ si l'on veut extraire la racine cubique ou 3^e, &c ainsi des autres. Cette formule servira de règle pour * trouver la racine que l'on cherche, puisqu'elle représente * &c 172. par ordre tous les produits qui composent la puissance qu'on veut résoudre, &c qui sont formez par les caractères de la racine qu'on cherche.

La plus haute puissance de la formule, savoir a^2 pour la 2^e puissance, a^3 pour la 3^e, &c. servira à trouver le premier caractère vers la gauche de la racine qu'on cherche, en supposant que *a* représente ce premier caractère.

Pour trouver ce premier caractère représenté par *a*, on prendra dans la table des puissances des neuf chiffres la puissance du degré dont on cherche la racine, qui est la plus grande qui soit contenue dans la première tranche *A*, &c on écrira celui des neuf chiffres, qui en est la racine, à la place destinée pour la racine.

On retranchera la puissance de ce chiffre représentée par la puissance de *a* dans la formule, on la retranchera, dis-je,

vis-à-vis, de la tranche *A*, &c l'on écrira le reste au dessous.

On appliquera chacun des articles de l'opération à un exemple pour le faire concevoir clairement à ceux qui commencent.

Par exemple, pour trouver la racine cubique ou 3^e du nombre 12893213625, 1^o. On le partagera en tranches chacune de trois rangs en commençant par la droite, & allant vers la gauche, la première tranche *A* peut avoir moins de trois rangs. On tirera un arc vers la droite, & la place qui est au devant de cet arc sera celle où il faudra écrire les caractères de la racine à mesure qu'on les découvrira. Les quatre tranches que l'on trouve * 186, font déjà connaître que la racine aura quatre caractères.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	(la racine.
qr	pqr	pqr	pqr	(2 . . .
12	895	213	625	
8				
4, 8				

On prendra pour règle de l'opération la formule $2a^2 + 3a^2b + b^3$. Et supposant que *a* représente le premier caractère à gauche de la racine, *a* marque que, pour le trouver, il faut prendre parmi les cubes des neuf chiffres, le cube 8 qui est le plus grand cube contenu dans la tranche *A*. En écrire la racine cubique 2 à la place destinée pour la racine, & retrancher 8 cube de 2, de la tranche *A*, & écrire le reste 4 au dessous de cette tranche. On s'est déjà par cette première opération que 2 précède de trois rangs est le premier caractère de la racine qu'on cherche.

On remarquera que la plus haute puissance a^3 de la formule ne sert que pour trouver le premier caractère ou celui dont la puissance est contenue dans la première tranche *A*. Et que les autres produits de la formule d'une puissance dans lesquels se trouve *b*, sont ceux qui doivent servir seuls de règle (sans la plus haute puissance de *a*) pour découvrir dans chaque tranche, par le moyen de la division, le caractère de la racine qui a rapport à cette tranche, comme on le va voir dans les articles suivans de l'opération.

2^o. Il faut descendre le chiffre *p* le plus à gauche de la 2^e tranche *B* au devant du reste qu'a donné la première opération; ce reste joint au caractère *p* sera considéré comme un dividende. Il faut supposer que *a* de la formule représente le premier caractère de la racine déjà découvert, que *b* représente le second caractère que l'on cherche, * &c que le * 174

177 & dividende est représenté par le premier des produits de la for-
 137 mule, dans lequel b est linéaire. Ainsi pour trouver le second caractère représenté par b , il faut prendre le produit du premier caractère déjà trouvé, qui est représenté par le premier des produits de la formule du même degré, dans lequel b est linéaire, divisé par b , c'est à dire, sans b ; ce produit est représenté par $2a$ pour le carré, par $3a^2$ pour la 3^e puissance, par $4a^3$ pour la 4^e , &c ainsi des autres: &c diviser le dividende par ce produit, le quotient qu'on trouvera sera le second caractère de la racine représenté par b de la formule.

Il faut former à part tous les produits, des deux premiers caractères déjà découverts, qui sont représentés par ceux de la formule du degré de la puissance numérique, dont on cherche la racine.

Ajouter ces produits dans une somme, observant qu'ils soient placés dans les rangs qui leur conviennent; & après avoir écrit au devant du dividende tous les chiffres q , r , s , &c. qui restent dans la tranche B , ce qui sera le second membre de l'extraction, il faut retrancher de ce second membre la somme des produits, & écrire le reste au dessous.

$$2 = a$$

A	B	C	D	
qr, pqr, pqr, pqr				(la racine.
12,	895,	213,	625	23..
8				
4, 895				
4, 167				
728,				
				12 = $3a^2$ divisé du 2ème
				3 = b
				3600 = $3a^2b$
				540 = $3ab^2$
				27 = b^3
				4167 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

187. Dans notre exemple il faut transporter 8, premier chiffre à gauche de la tranche B , devant le reste 4, de la première opération: & 48 sera considéré comme un dividende: & supposant que 2 de la formule représente le premier chiffre 2 de la racine, & que b représente le second qu'on cherche, * le dividende 48 doit contenir le produit représenté par $3a^2b$, qui est formé par $3a^2$ multiplié par b . Dans ce produit le second caractère de la racine représenté par b est inconnu, & c'est celui qu'on cherche; mais 2 représenté par a étant connu, il faut former le produit représenté.

par $3a'$ sans b , & l'on aura $3 \times 4 = 12 = 3a'$, que l'on prendra pour diviseur. Il faut diviser le dividende 48 par $12 = 3a'$. Et le quotient qui est 3 (car on verrait bientôt que si l'on prenoit 4 pour le quotient, on trouverait qu'il seroit trop grand) est le second caractère de la racine que l'on cherche, qui est représenté par b , il faut écrire 3 à la racine devant 2.

Il faut ensuite former à part les trois produits représentés par $3a'b + 3ab^2 + b^3$, & l'on trouvera $3600 + 540 + 27$, qu'il faut écrire les uns sous les autres dans les rangs qui leur conviennent, les ajouter ensemble, & après avoir écrit les chiffres 9 & 5 de la tranche B devant le dividende pour en composer le second membre 4, 895, retrancher de ce membre la somme 4167 des produits, & marquer le reste 727 au dessous, & la partie de l'opération qui fait découvrir les deux premiers caractères de la racine qu'on cherche est achevée.

3° Il faut transporter le premier chiffre à gauche p de la troisième tranche C devant le reste qu'on a trouvé par l'opération précédente, & ce reste joint au caractère p sera considéré comme un dividende. Il faut supposer les deux premiers caractères de la racine déjà découverts représentés par a de la formule, & le troisième caractère qu'on cherche représenté par b de la formule, & former le produit des deux premiers représenté par le produit de la formule, dans lequel b est linéaire, sans pourtant que b , qui est inconnu, soit dans ce produit; c'est à dire, il faut former le produit des deux premiers caractères, regardez comme une seule grandeur, représenté par $2a$ dans le carré, par $3a^2$ dans la 3^e puissance, & ainsi des autres; diviser le dividende par ce produit, & écrire le quotient de cette division à la racine pour son troisième caractère.

Il faut former à part les produits des deux premiers caractères (marquez par a) & du troisième (marqué par b) qui sont représentés par les produits de la formule.

Ajouter ces produits dans une somme, observant qu'ils soient placés dans les rangs qui leur conviennent.

Après avoir ajouté devant le dividende les caractères q , r , s , &c. qui restent dans la troisième tranche C, ce qui fera le troisième membre de l'extraction, il faut ôter de ce membre la somme des produits, & écrire le reste au dessous.

Dans notre exemple il faut abaisser le premier chiffre à gauche

A B C D	
9 ^r , 89 ^r , 213, 625	(la racine)
8	234
x. memb. 4, 895	
4 167	
1. memb. 728, 213	
645 904	
82 309	

Pour le second membre.

$$\begin{aligned}
 2 &= a \\
 12 &= 3a^2 \text{ Div. du 2. me.} \\
 3 &= b \\
 4167 &= 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

Pour le troisième membre.

$$\begin{aligned}
 23 &= a \\
 1587 &= 3a^2 \text{ Div. du 3. me.} \\
 4 &= b \\
 634800 &= 3a^2b \\
 11040 &= 3ab^2 \\
 64 &= b^3
 \end{aligned}$$

$$645904 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

2 de la troisième tranche C devant le reste 728 de l'opération précédente, & 7282 sera regardé comme un dividende. Il faut supposer que les deux premiers chiffres 23 de la racine déjà découverte sont représentés par a de la formule, & que le troisième caractère

- * 187. Etant qu'on cherche est représenté par b. * Et comme le dividende 7282 contient le produit représenté par $3a^2b$, il faut former le produit représenté par $3a^2$, que l'on trouvera être 1587 = $3a^2$, le prendre pour diviseur; diviser 7282 par 1587. Le quotient 4 que l'on trouvera, est le troisième caractère de la racine que l'on cherche, qui est représenté par b de la formule. Il faut l'écrire à la racine au devant de 23.

Il faut ensuite former à part les produits représentés par $3a^2b$ = $3ab^2 + b^3$, & l'on trouvera $634800 + 11040 + 64 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Il faut les écrire les uns sous les autres dans les rangs qui leur conviennent. On les ajoutera ensemble; & après avoir transporté les chiffres 1 & 3 qui restoient dans la tranche C, au devant du dividende, pour rendre complet le troisième membre de l'extraction, on ôtera de ce membre 728213 la somme des produits 645904, & on écrira le reste 82309 au dessous: & la partie de l'opération qui fait découvrir les trois premiers caractères de la racine est achevée.

4°. Quand la puissance numerique, dont on cherche la racine, a beaucoup de tranches, on trouvera de suite le quatrième caractère de la racine, le cinquième, le sixième, &c les autres suivans jusqu'au dernier, de la même maniere qu'on a trouvé le troisième, en supposant pour découvrir de suite chacun de ces caractères, que dans les produits de la formule, a représente tous les caractères déjà découverts, &c que b représente le caractère qu'on cherche, qui est celui qui les suit; &c employant les produits de la formule pour le découvrir, comme on l'a expliqué dans le troisième article qui précède; &c quand on aura opéré sur la dernière tranche à droite, l'opération sera achevée; &c si l'on ne trouve aucun reste, c'est à dire, si après la dernière opération il reste zero, la puissance numerique est parfaite, &c la racine qu'on a découverte en est la racine exacte; si l'on trouve un reste, la racine découverte est la racine de la plus grande puissance parfaite du même degré, qui est contenue dans la puissance numerique imparfaite proposée; c'est à dire, le nombre proposé étant diminué de ce reste, est la puissance numerique parfaite de la racine qu'on a trouvée.

A B C D

qr, pqr, pqr, pqr, { la racine.
12,895,213,625 { 2345
8 = a^3

a. memb.

4,895

4 167 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. memb.

728,213

645 904 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4. memb.

82 309,625

82 309,625 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

60,000,000

Pour le second membre.

2 = a 12 = $3a^2$ div. du 2. m.3 = b 4167 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le troisième membre.

23 = a 1587 = $3a^2$ div. du 2. m.4 = b 645904 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pour le quatrième membre.

234 = a 164268 = $3a^2$ div. du 4. m.5 = b 82134000 = $3a^2b$ 175500 = $3ab^2$ 125 = b^3 82309625 = $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Y iij

194. Dans chaque tranche le dividende est toujours le reste de l'opération précédente joint au premier chiffre à gauche de cette tranche-là; le membre de l'extraction de cette tranche est le dividende joint à tous les caractères qui ressoient dans cette tranche-là. Dans la pratique on transporte ordinairement toute la tranche sur laquelle on va opérer au devant du reste de l'opération précédente, ce qui fait le membre sur lequel on va opérer, & l'on met un point sous le chiffre de ce membre, qui est le premier à gauche de la tranche qu'on a transportée, pour marquer que le dividende de ce membre ne commence qu'à ce chiffre-là. On tranche aussi par une petite ligne chaque chiffre de la tranche transportée, ou bien on marque des points au dessous des chiffres de cette tranche, pour faire souvenir qu'on a opéré sur cette tranche. Le diviseur est toujours le double de tous les caractères déjà découverts pour la racine quarrée, le triple de la 2^e puissance de la somme des caractères déjà découverts pour la racine cubique ou 3^e, le quadruple de la 3^e puissance de la somme des caractères déjà découverts pour la racine 4^e, le quintuple de la 4^e puissance de la somme des caractères déjà découverts pour la racine 5^e, & ainsi de suite. Le caractère de la tranche ou du membre sur lequel on opère, se trouve en faisant la division du dividende de ce membre par son diviseur, & prenant le quotient de la division pour ce caractère. Mais il arrive souvent qu'il est trop grand, c'est pourquoi avant de l'écrire à la racine, il faut former les produits que prescrit la formule pour ce membre-là, & si l'on trouve que la somme de ces produits est contenue dans ce membre-là, il faut écrire à la racine le quotient qu'on a trouvé; si la somme de ces produits surpasse ce membre-là, ce qui arrive souvent, il faut diminuer le quotient de 1, 2, 3, & ainsi de suite, jusqu'à ce que la somme des produits que prescrit la formule, soit contenue dans le membre sur lequel on opère; & le quotient ainsi diminué sera le caractère qui convient à la tranche sur laquelle on opère. Et l'on remarquera que quand même la somme des produits se trouveroit précisément égale au membre sur lequel on opère, & qu'en l'ôtant de ce membre il ne resteroit rien, le quotient n'en seroit pas

moins le caractère de cette tranche, & qu'ainsi, pourrô que la somme des produits prescrits par la formule puisse être retranchée du membre sur lequel on opère, le quotient ne scauroit être trop grand.

4.

195. Si le diviseur d'une tranche n'étoit pas même contenu une fois dans le dividende, ou si y étant contenu une fois la somme des produits prescrits par la formule étoit plus grande que le membre sur lequel on opère, il faudroit écrire zero à la racine pour le caractère de cette tranche-là, & l'opération seroit finie pour cette tranche, il faudroit abaisser le premier chiffre à gauche de la tranche suivante devant le membre qui a donné zero pour la racine, & ce membre joint à ce premier chiffre seroit le dividende de la tranche suivante : l'on peut même trouver plusieurs zeros de suite pour les caractères de la racine.

5.

196. Lorsqu'on cherche la racine d'un nombre, qui est telle que son exposant a des nombres entiers pour diviseurs exacts, dont le produit forme cet exposant, on pourroit bien trouver cette racine par la formule qui lui convient; mais il est bien plus facile de trouver la racine du nombre proposé, en cherchant d'abord la racine de ce nombre marquée par l'un des diviseurs exacts, en commençant par le plus simple; puis la racine du nombre qu'on vient de trouver pour racine, qui est marquée par le diviseur suivant; ensuite la racine du nombre qu'on vient de découvrir, qui est marquée par le diviseur suivant, & continuer ainsi jusqu'à la racine qui est marquée par le dernier des diviseurs exacts, dont le produit forme l'exposant de la racine qu'on cherche. Par exemple, si l'on veut la racine 4° d'un nombre, l'exposant de cette racine étant $4 = 2 \times 2$, il faut d'abord chercher la racine 2° du nombre proposé, puis la racine 2° de la racine qu'on vient de trouver : * cette dernière sera la racine 4° du nombre proposé. De même si l'on veut la racine 6° d'un nombre proposé, l'exposant étant $6 = 2 \times 3$, il faut d'abord chercher la racine 2° du nombre proposé, & ensuite la racine 3° de la racine précédente, & cette racine 3° sera la racine 6° du nombre proposé.

Si l'on veut la racine 8° ; l'exposant étant $8 = 2 \times 2 \times 2$, il faut d'abord chercher la racine 2° du nombre proposé, puis la racine 2° de la racine précédente ; & enfin la racine 2° de la précédente. Cette dernière * sera la racine 8° qu'on cherchoit. * 180.

Si l'on veut la racine 12° , l'exposant étant $12 = 2 \times 2 \times 3$, il faut d'abord chercher la racine 2° , puis la racine 2° de la précédente, & enfin la racine 3° de la précédente. Cette dernière * sera la racine 12° qu'on cherchoit. Il en est de même * 180. des autres racines dont les exposans ont des nombres entiers pour diviseurs exacts.

Application du Problème à des exemples.

I.

Exemples de l'extraction de la racine quarrée.

AVERTISSEMENT.

L'EXTRACTION de la racine quarrée ou 2° est plus d'usage dans les Mathématiques que l'extraction des racines dont les exposans sont plus élevés ; c'est pourquoi on en va donner la pratique qui paroît la plus facile de toutes, & qui est cependant déduite de la formule $a^2 \pm 2ab \pm b^2$.

Pratique qui paroît la plus facile de l'extraction de la racine quarrée.

ON partage le nombre, dont on cherche la racine quarrée, en tranches, chacune de deux rangs, allant de la droite à la gauche : la tranche la plus à gauche peut n'avoir qu'un caractère.

On tire un arc à la droite du nombre proposé, & la place qui est au haut de cette arc sera celle de la racine qu'on veut trouver.

On cherche par le moyen de la table de l'article 190 quel est le plus grand quarré contenu dans la première tranche *A*. On en écrit la racine à la place qui lui est destinée, pour le premier caractère de la racine qu'on cherche. On retranche le quarré de cette racine de la tranche *A* ; & l'on écrit le reste au dessous. On abaisse la tranche *B* au devant du reste qu'on vient d'écrire, c'est le second membre de l'extraction.

On marque un point sous celui des chiffres de la tranche **B** qu'on vient d'abaisser, qui est le plus à gauche, & le reste joint à ce chiffre est le dividende de ce membre. On distingue de la même manière le dividende de chacun des membres suivans.

Pour avoir le diviseur de chaque membre, on multiplie les caractères de la racine déjà découverts par 2, & on en écrit le produit au dessous de la racine, c'est le diviseur de ce membre; c'est à dire, on écrit le double des caractères déjà découverts, & ce double est le diviseur du membre sur lequel on opere.

On cherche combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, & l'on écrit le quotient qui marque ce nombre de fois, au devant des caractères de la racine qui sont déjà découverts, & on l'écrit encore au devant du diviseur.

On multiplie par le quotient qu'on vient de trouver le diviseur augmenté, comme on l'a dit, du même quotient, & à mesure qu'on fait cette multiplication, sans l'écrire, on retranche les produits particuliers qu'on trouve, du membre sur lequel on opere, comme dans la pratique abrégée de la division, & on écrit le reste au dessous du membre sur lequel on opere.

On continue cette manière d'opérer sur toutes les tranches; & quand on a opéré sur la dernière, l'opération est achevée, & le nombre que l'on a écrit à la racine, est la racine quarrée du nombre proposé que l'on cherchoit.

I E X E M P L E.

	A	B	C	D	{ racine.		
	5	49	90	25	{ 2345	2 = a	} Pour le 1. membre
						3 = b	
					4		
1. membre.	1	49				43	= 2a + b
2. membre.		20	90			464	= 2a + b
3. membre.			2	34	25	4685	= 2a + b
reste.			0	00	00		

Pour extraire la racine quarrée du nombre 5499025, 1°, on le partage en tranches chacune de deux caractères allant de droite à gauche, & la tranche la plus à gauche n'a que le

seul chiffre 5. Comme il y a quatre tranches, la racine doit avoir quatre caractères. On trouve le premier en considérant que 4 est le plus grand carré contenu dans 5 qui fait la tranche A. On écrit la racine du carré 4, qui est $2 = a$, à la racine, & l'on retranche 4 carré du premier caractère 2, de 5, & l'on écrit le reste 1 au dessous.

2°. Pour trouver le second caractère représenté par b, on abaisse la seconde tranche B devant le reste 1, & l'on a le second membre 149. On marque un point sous 4 pour distinguer le dividende qui est 14. On écrit le double du premier caractère $2 = a$, lequel double de 2 est $4 = 2a$, sous la racine : c'est le diviseur de ce membre.

On dit ensuite combien de fois le diviseur 4 est-il dans le dividende 14? On trouve qu'il y est 3 fois. On écrit $3 = b$ à la racine, & encore au devant du diviseur 4.

Puis on multiplie $43 = 2a + b$ par $3 = b$, & en même temps l'on ôte le produit $129 = 2ab + b^2$ du membre 149, sans rien écrire que le reste, de cette manière. $3 \times 3 = 9$, étant 9 de 9 il reste 0. On écrit 0 sous 9. Puis on dit $3 \times 4 = 12$; $14 - 12 = 2$, on écrit 2 sous 4, & l'opération du second membre est finie, & le reste est 20.

3°. On abaisse devant le reste 20 la tranche C, c'est à dire 90, & l'on a le troisième membre 2090, on marque un point sous 9, & le dividende est 209. On multiplie les deux caractères déjà découverts $23 = a$ par 2, & l'on écrit le produit $46 = 2a$ sous le diviseur du membre précédent, & c'est le diviseur du troisième membre. Comme le diviseur $46 = 2a$ a deux rangs, on conçoit que 6 est sous 9 du dividende, & 4 sous 0. Et l'on dit combien de fois 4 est-il dans 20? Il y est 5 fois; mais voyant que 5×46 surpasserait le dividende 209, on ne prend que 4 pour quotient. On écrit $4 = b$ à la racine, & encore au devant du diviseur 46, ce qui fait $464 = 2a + b$. On multiplie $464 = 2a + b$ par $4 = b$, ce qui fait $1856 = 2ab + b^2$, & on retranche 1856 du troisième membre 2090, & l'on écrit le reste 234 au dessous. Cette multiplication & cette soustraction se font en même temps de cette façon. $4 \times 4 = 16$. On ne peut ôter 16 de 0; mais étant 16 de 20, il reste 4, qu'on écrit au dessous de 0, & on retient 2. Puis on dit $4 \times 6 = 24$, & 2 qu'on retient, cela fait 26. On ôte 26 de 29, & l'on écrit le reste 3 sous 9, &

on retient 2. Enfin l'on dit $4 \times 4 = 16$, $+ 2 = 18$, or $20 - 18 = 2$. On écrit 2 sous 0, & l'opération de ce membre est finie, le reste est 234.

4°. On abaisse la tranche *D*, c'est à dire 25 devant 234, cela fait le quatrième membre 23425. On marque un point sous 2 pour distinguer le dividende 2342. On multiplie les trois caractères 234 = *a* déjà découverts par 2, & l'on écrit le produit $468 = 2a$ pour diviseur de ce membre sous le diviseur du précédent.

On conçoit que le diviseur 468 est sous le dividende 2342; & l'on dit combien de fois 4 est-il dans 23? On trouve qu'il y est 5 fois. On écrit 5 = *b* à la racine, & encore devant le diviseur, ce qui fait $4685 = 2a + b$. On le multiplie par 5 = *b*, & l'on ôte le produit $23425 = 2ab + b^2$ du membre 23425, & il ne reste rien. Cela se fait en même temps de cette façon. $5 \times 5 = 25$. $25 - 25 = 0$, on écrit 0 sous 5, & on retient 2. Puis on dit $5 \times 8 = 40$, $40 + 2 = 42$. $42 - 42 = 0$, on écrit 0 sous 2, & on retient 4. Après on dit $5 \times 6 = 30$, $30 + 4 = 34$. $34 - 34 = 0$, on écrit 0 sous 4, & on retient 3. Enfin $5 \times 4 = 20$, $20 + 3 = 23$. $23 - 23 = 0$. On écrit si l'on veut 0 sous 23.

L'opération ayant été faite sur le dernier membre, elle est achevée, & comme le dernier reste est 0; 2345 est la racine exacte du nombre proposée 5499025 qui est un carré parfait.

On a marqué dans ce premier exemple le rapport de chaque opération à la formule, pour faire voir que la méthode dont on s'est servi revient à celle du Problème. Pour abréger, en ne marquera plus ce rapport de la formule dans les exemples suivans.

II. EXEMPLE.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>racine</i>	
7,	29,	16,	20,	09,	00,	00,	(2700300	
3	29						47	
0	00	16	20	09			54	} Diviseurs.
0	00	00	00	00			540	
							54003	

Pour trouver la racine carrée du nombre 7291620090000,

1°. On le partagera en tranches chacune de deux rangs, excepté celle qui est à gauche; & s'en trouvant sept, il y aura sept caractères dans la racine. Pour avoir le premier caractère, on dira, le plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche, c'est à dire dans 7 est 4, dont la racine 2 doit être le premier caractère de la racine qu'on cherche. Il faut écrire 2 à la racine, & retrancher 4 carré de 2, de 7, & écrire le reste 3 sous la première tranche.

2°. Il faut transporter la seconde tranche 29 au devant du reste, ce qui sera le second membre 32, & marquer un point sous 2, pour distinguer le dividende 32. Il faut aussi doubler le caractère 2 déjà découvert, & écrire 4 pour le diviseur du second membre: & dire le diviseur 4 est contenu 8 fois dans le dividende 32. Mais pour examiner, avant d'écrire le quotient 8 à la racine, s'il n'est point trop grand, il faut imaginer 8 écrit à la racine & devant le diviseur, & faire par la pensée la multiplication de 48 par 8, en commençant de gauche à droite, & faire en même temps la soustraction, en disant $8 \times 4 = 32$, $32 - 32 = 0$, ainsi il ne resteroit que 9 dans le second membre, & disant $8 \times 8 = 64$; mais 64 ne peut pas se retrancher de 9, étant plus grand. Cette opération faite par la seule pensée, fait connoître que 8 est trop grand; ainsi il ne faut écrire que 7 à la racine, & encore devant le diviseur 4; & dire $7 \times 7 = 49$. $49 - 49 = 0$, on écrit le reste 0 sous 9, & on retient 4 dizaines ajoutées à 9 pour le faire valoir 49, & l'on dit $7 \times 4 = 28$ $28 + 4$ qu'on retenoit $= 32$ $32 - 32 = 0$; on écrit le reste 0 sous 2 & sous 3, & le reste de ce membre n'est que 0.

3°. On transporte la troisième tranche 16 devant le reste précédent, on marque un point sous le chiffre 1 pour distinguer le dividende, & l'on écrit pour diviseur $2 \times 27 = 54$. Mais appercevant que 54 n'est point contenu dans le dividende 1, on écrit 0 à la racine, & l'opération de ce troisième membre est achevée.

4°. On transporte la quatrième tranche 10 devant le membre précédent, & l'on a 1620 pour le quatrième membre, on marque un point sous 2, pour distinguer le dividende 162, & l'on écrit pour diviseur $2 \times 270 = 540$. Mais voyant que ce diviseur surpasse le dividende 162, on écrit 0 à la racine pour son quatrième caractère, & l'opération du quatrième membre est achevée.

5°. On abaisse la cinquième tranche 09 devant le membre précédent, ce qui fait le cinquième membre 162009. On marque un point sous 0, qui est le premier caractère à gauche de la cinquième tranche abaissée, pour distinguer le dividende 16200. On écrit $2 \times 2700 = 5400$ pour le diviseur de ce membre : & imaginant ce diviseur sous le dividende, le chiffre 5 du diviseur se trouve sous 16 du dividende : & l'on dit 5 est 3 fois dans 16 ; ainsi il faut mettre le quotient 3 à la racine & encore au devant du diviseur, & dire $3 \times 3 = 9$. $9 - 9 = 0$. On écrit le reste 0 sous 9. Puis on dit $3 \times 0 = 0$, $0 - 0 = 0$, on écrit le reste 0 sous 0 du dividende, & l'on dit $3 \times 0 = 0$, $0 - 0 = 0$, on écrit le reste 0 sous 0 du dividende : & l'on dit $3 \times 4 = 12$, $12 - 12 = 0$, on écrit le reste 0 sous 2, & l'on retient 1. Enfin l'on dit $3 \times 5 = 15$, $15 - 15 = 0$ qu'on retenoit $= 16$; $16 - 16 = 0$, on écrit le reste 0 sous 16. Ainsi l'opération du cinquième membre est achevée, & le reste est 0.

6°. Le dernier reste étant 0, & n'y ayant plus que des zeros dans les tranches suivantes, il est inutile de faire des opérations pour ces tranches, par lesquelles on ne trouveroit que 0 pour le caractère de chaque tranche ; il suffit d'écrire au devant des caractères de la racine déjà découverts autant de zeros qu'il reste de tranches ; sçavoir un zero pour le caractère de chacune de ces tranches, & l'opération sera entièrement achevée. 2700300 est la racine quarrée exacte du nombre proposé 7291620090000.

III. EXEMPLE.

On trouvera de la même manière la racine quarrée du nombre 3433923. 1°. Après l'avoir partagé en tranches, on dira le plus grand quarré contenu dans la première tranche à gauche 3 est 1. La racine quarrée de 1 est 1. Il faut écrire 1 pour le premier caractère de la racine, & retrancher le quarré 1, de la tranche 3, & écrire au dessous le reste 2.

2°. On abaissera la seconde tranche 43 devant le reste 2,

3433923	(racine.
243	1853
1939	28
11423	365
reste 314	3703

} Divid.

ce qui fera le second membre 243, on mettra un point sous 4 pour distinguer le dividende 24. On écrira 2, double du premier caractère 1, pour le diviseur du second membre. Et l'on dira combien de fois le diviseur 2 est-il contenu dans dividende 24 ? Il y est 12 fois ; mais on ne peut écrire que 9 : & faisant l'opération par la pensée, comme dans l'article second de l'exemple précédent, pour éprouver si le quotient 9 n'est point trop grand, on trouvera qu'on ne peut écrire que 8 pour le second caractère de la racine, on écrira encore 8 au devant du diviseur 2. Puis on multipliera 28 par 8, & on retranchera du second membre 243 le produit à mesure qu'on le formera, & l'on écrira le reste 19 au dessous du second membre.

3°. On transportera la troisième tranche 39 devant le reste 19, & l'on aura le troisième membre 1939. On distinguera par un point sous 3 le dividende 193. On écrira aussi le diviseur $2 \times 18 = 36$; & l'on trouvera en faisant l'épreuve qu'on ne doit écrire que 5 pour le troisième caractère de la racine, on l'écrira encore devant le diviseur 36, & l'on ôtera le produit 5×365 , du troisième membre 1939, & l'on écrira le reste 114 au dessous.

4°. On descendra la dernière tranche 23 au devant du reste 114, ce qui donnera le quatrième & dernier membre 11423. On distinguera par un point le dividende 1142. On formera le diviseur $2 \times 185 = 370$. On trouvera que le quotient est 3. On l'écrira pour le dernier caractère de la racine, & encore au devant du diviseur 370. On retranchera le produit 3×3703 du dernier membre 11423, & l'on écrira au dessous le reste 314.

Le reste 314 fait voir que le nombre proposé 2433923, n'est pas un carré parfait. La racine trouvée 1853 est la racine du plus grand carré parfait contenu dans le nombre proposé, lequel carré est 3433609; c'est à dire le nombre proposé diminué du reste 314.

La Méthode pour extraire les racines des nombres qui contiennent des parties décimales.

197. **L'**EXTRACTION des racines des nombres qui contiennent des parties décimales, se fait de la même manière que l'extraction des racines des nombres entiers. Il faut seule-

ment observer, 1°. Quand le nombre proposé contient des nombres entiers & des parties décimales, d'extraire d'abord la racine des entiers, comme s'ils étoient seuls, en les distinguant en tranches, comme s'il n'y avoit que ces entiers, & d'ajouter aux tranches des entiers les tranches des parties décimales du nombre proposé, faisant la distinction de ces tranches des parties décimales en allant de gauche à droite. Par exemple, si l'on propose de trouver la racine quarrée de 13.242321, les entiers 13 n'occupant que deux rangs, il en faut faire une tranche comme s'ils étoient seuls, & distinguer ensuite les tranches des parties décimales chacune de deux rangs en allant de gauche à droite de cette manière 13., 24, 23, 21. Et si la dernière tranche à droite n'avoit qu'un caractère, par exemple, le seul caractère 2, il faudroit ajouter un 0 pour la faire de deux rangs. Si dans le nombre proposé il y avoit eu trois rangs de nombres entiers comme dans 132 41321, il auroit fallu faire deux tranches des seuls nombres entiers, & ajouter à ces tranches celles des parties décimales de cette manière 2, 32., 42, 32, 10. S'il falloit trouver la racine cubique ou 3° de 1324. 2321 où les entiers 1324 occupent quatre rangs, il en faudroit distinguer les tranches comme on le voit ici 1, 324., 232, 100, c'est à dire, il faudroit distinguer les tranches des entiers comme s'ils étoient seuls, & y ajouter les tranches des parties décimales chacune de trois rangs.

2°. On remarquera que le point qui distinguera dans la racine les parties décimales des entiers, doit être placé immédiatement après les caractères de la racine des entiers.

3°. Quand le nombre dont on veut extraire la racine ne contient que des parties décimales sans entiers, il faut commencer la distinction des tranches par la gauche en allant vers la droite, & pour faire mieux concevoir aux Commencans la manière de distinguer les tranches, on supposera toujours que zero qui est au devant du point qui sépare les parties décimales d'avec les entiers qui sont représentés par zero quand il n'y en a point, que ce zero, dis-je, qui représente la place des entiers, doit faire la première tranche, laquelle ne donnera pour la racine que zero : la tranche suivante en allant de gauche à droite, doit contenir deux rangs quand on cherche la racine quarrée ; trois rangs quand on cherche

cherche la racine 3^e; quatre rangs quand on cherche la racine 4^e, &c ainsi de suite. Les tranches suivantes vers la droite doivent contenir chacune autant de rangs que la précédente, &c quand la dernière à droite en contient moins, il faut lui donner le même nombre de rangs en lui ajoutant des zeros.

Par exemple, si l'on veut trouver la racine quarrée de 0. 13242321, on distinguera ainsi les tranches 0., 13, 24, 23, 21. Si l'on veut chercher la racine quarrée de 0 013242321, on en distinguera ainsi les tranches 0., 01, 32, 42, 32, 10. Si l'on cherche la racine quarrée de 0. 00013242321, on en distinguera ainsi les tranches 0., 00, 01, 32, 42, 32, 10.

Si l'on cherche la racine 3^e de 0. 13242321, on en distinguera ainsi les tranches 0., 132, 423, 210. Si c'est la racine 3^e de 0 013242321, on en distinguera ainsi les tranches 0., 013, 242, 321. Si l'on veut la racine 3^e de 0 0013242321, on le distinguera ainsi en tranches 0., 001, 324, 232, 100. Si l'on cherche la racine 3^e de 0. 0000013242321, on en marquera ainsi les tranches 0., 000, 001, 324, 232, 100. Il en est de même des autres.

Il faut d'abord écrire 0 dans la racine pour représenter la racine des entiers, &c marquer ensuite à droite de ce 0 le point qui separe les parties décimales de la racine d'avec les entiers; &c quand il y a encore des tranches de zeros, comme dans 0., 009, 000, 001, 324, 232, 100, il faut marquer à la racine un 0 pour chaque tranche qui ne contient que des zeros sans chiffre, &c commencer l'opération à la tranche qui contient quelque chiffre; dans cet exemple on la commencera à la tranche 001.

IV. E X E M P L E.

Qui contient des parties décimales.

13., 24, 23, 21	{	racine.
4 24		3.639
28 23		66
6 54 21		723
		7269
reste. 0 00 00		} diviseurs.

POUR trouver la racine quarrée du nombre 13.242321, 1^o.
On le partagera en tranches suivant la methode d'extraire

les racines des nombres qui ont des parties décimales, comme on le voit dans l'exemple. Ensuite on dira, 1°. Le plus grand carré contenu en 13 est 9, sa racine est 3, qu'on écrira à la racine, & on marquera au devant de ce 3 le point qui doit séparer les parties décimales. On retranchera 9, carré de 3, de 13, & on écrira le reste 4.

2°. On abaissera 24 devant le reste 4, & le second membre sera 424. On distinguera le dividende 42 par un point sous 2, & on doublera 3 de la racine pour avoir le diviseur 6. Puis on dira 6 est 7 fois dans 42; mais faisant l'épreuve par la pensée, on trouvera qu'il ne faut écrire que 6 à la racine & encore au devant du diviseur on ôtera le produit 6×66 de 424, & on écrira le reste 18 au dessous.

3°. On transportera 23 devant le reste, l'on distinguera par un point dans le troisième membre 2823, le dividende 282; on écrira $2 \times 36 = 72$ pour diviseur; & ayant trouvé le quotient 3, on l'écrira à la racine & encore au devant du diviseur. On ôtera 3×723 , de 2823, & l'on écrira le reste 654 au dessous.

4°. On descendra 21 devant le reste précédent, & on distinguera par un point dans le quatrième membre 65421, le dividende 6542. On écrira le diviseur $2 \times 363 = 726$; on écrira à la racine le quotient 9 & encore devant le diviseur. On ôtera 9×7269 de 65421, & l'on écrira le reste 0 au dessous. Et ce dernier reste 0 fera connaître que 3. 639 est la racine exacte du nombre proposé.

V. EXEMPLE.

2, 32, 42, 32, 10	{ racine.	
0 32	11, 507	
11 42	21	} diviseurs.
0 17 32 10	225	
reste 1 21 61	239	
	23007	

POUR trouver la racine 2° du nombre décimal 132.42321 qui a trois rangs d'entiers, 1°. Il faut partager les entiers en deux tranches 1, 32, & partager, en allant de gauche à droite, les parties décimales en tranches chacune de deux rangs, ajoutant un zero à la dernière tranche à droite pour lui donner

deux rangs. Ensuite on dira 1 est le plus grand carré contenu dans la première tranche à gauche. On écrira 1 racine carrée de 1 à la racine. On retranchera 1, carré de 1, de la première tranche 1, &c on écrira le reste zero au dessous. On abaissera la seconde tranche 32 devant le reste 0; on continuera l'opération comme on le voit dans l'exemple, &c l'on trouvera la racine 11. 507, &c le reste 12161 qui marque que le nombre proposé n'est pas un carré parfait; mais étant diminué du reste 12161, il devient 132. 411049 qui est un carré parfait, dont la racine est 11. 507. On marquera dans la racine le point qui sépare les parties décimales après 11, qui expriment la racine des tranches du nombre entier 132.

VI. EXEMPLE.

0,00,01,32,42,32,10	{	racine.
0 32		0,011507
11 42		21
0 17 32 10		225
		230
reste 1 21 61		23007
	}	diviseurs.

POUR trouver la racine carrée du nombre décimal 0,000132423210, 1°. on le partagera en tranches, comme on le voit dans l'exemple on écrira d'abord 0 à la racine pour le caractère de la première tranche à gauche, &c il représentera la place des entiers. On marquera devant ce 0 de la racine, le point qui doit séparer les parties décimales de la racine d'avec les entiers; &c à cause de la seconde tranche 00, qui ne contient que des zeros, on écrira un zero à la racine pour le caractère de cette tranche. Mais la troisième tranche 01 contenant le chiffre 1, on commencera à cette tranche l'opération, &c l'on dira 1 est le plus grand carré contenu dans cette tranche, la racine carrée de 1 est 1, on écrira 1 à la racine, l'on retranchera 1 carré de 1, de la tranche 01, &c on écrira le reste 0 sous cette tranche.

2°. On abaissera la tranche suivante 32 devant ce reste; on continuera l'opération que l'on voit toute faite dans l'exemple, comme dans les exemples précédens.

Exemples de l'extraction de la racine cubique ou 3^e.

VII. EXEMPLE.

A	B	C	D		Pour le second membre.		
19,748,688,691	}	racine.	2703	9 = b	2 = a		
8					12 .. = 3a ² diviseur.		
11 748	second membre.						
11 683							
00065,688,691	3 ^e & 4 ^e membre						
65 682 927							
00 005 764	reste.						
	Pour le troisième membre:						
0 = b	27 = a						
	2187 .. = 3a ² diviseur.						
	Pour le quatrième membre:						
	270 = a						
	218700 .. = 3a ² diviseur.						
3 = b	2430 .. = 3ab						
	9 = b ³						
	21894309 = 3a ² + 3ab + b ³						
	3 = b						
	65682927 = 3a ² b + 3ab ² + b ³						

POUR trouver la racine cubique ou troisième du nombre 29748688691, 1^e, on le partagera en tranches de trois rangs chacune, en allant de la droite à la gauche. La première à gauche ne se trouve avoir que deux rangs. Ensuite on dira le plus grand cube contenu dans la première tranche A est 8. Sa racine cubique est 2, on écrira 2 = a pour le premier

caractère de la racine, on ôtera de la première tranche, 8 cube de 2, & l'on écrira le reste 11 au dessous.

2°. On abaissera la seconde tranche 748 au devant du reste 11, ce qui donnera le second membre 11748. On distinguera le dividende 117 par un point sous 7. On formera le diviseur en multipliant $2 \times 2 = 4 = a^2$ par 3, & l'on aura $12 = 3a^2$ pour diviseur, qu'on écrira à part. Faisant la division on trouvera le quotient 9. Mais avant de l'écrire à la racine, on examinera si 9 n'est point trop grand: on supposera $9 = b$ de la formule, on formera à deux fois les produits prescrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. On prendra d'abord les produits $3 \times 2 \times 9 = 54 = 3a^2b$, & $9 \times 9 = 81 = b^2$, qu'on écrira les uns sur les autres dans les rangs qui leur conviennent, & on multipliera leur somme 1821 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ par $9 = b$, & on verra que le produit 16389 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ surpasse le second membre 11748. Ainsi 9 est trop grand.

On forme à deux fois les produits prescrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pour abréger le calcul dans la pratique, comme on le va voir dans cet exemple. Pour éprouver si 9 n'est point trop grand, on fera par la pensée la multiplication de 1821 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ par $9 = b$, en allant de gauche à la droite, & l'on fera en même temps la soustraction du second membre, en disant $9 \times 1 = 9$; $11 - 9 = 2$; 2 avec 7 dans le rang suivant $= 27$. Puis on dira $9 \times 8 = 72$, mais 72 surpasse 27, ainsi on ne peut pas faire la soustraction. Cela fait connoître que 9 est trop grand.

On supposera que le quotient qui doit être le second caractère de la racine est 8 $= b$, on formera les produits prescrits par $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ qu'on ajoutera dans une somme, & l'on multipliera par la pensée cette somme 1744 $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ par 8 $= b$, en allant de gauche à droite pour voir si 8 n'est point trop grand, & on fera en même temps la soustraction des produits à mesure qu'on les formera, du second membre, en disant $8 \times 1 = 8$. $11 - 8 = 3$. 3 avec 7 dans le rang suivant $= 37$. Puis on dira $8 \times 7 = 56$. On ne peut pas ôter 56 de 37. Ainsi 8 est encore trop grand.

On n'écrira donc que 7 à la racine pour le caractère du 2° membre, & même on ne l'écrira qu'après avoir éprouvé par l'esprit, de la manière qu'on vient de le faire pour 9 & pour 8,

que 7 n'est point trop grand. On supposera $7 = b$, on formera les produits prescrits par la formule $3a^2 + 3ab + b^3$, &c on sera à l'ordinaire la multiplication de la somme de 1669 $= 3a^2 + 3ab + b^3$ par $7 = b$, en allant de la droite à la gauche, &c à mesure qu'on trouvera les produits particuliers, on les retranchera, sans les écrire, du second membre, &c l'on écrira seulement le reste au dessous du second membre, en disant $7 \times 9 = 63$. $68 - 63 = 5$, on écrira le reste 5 sous 8 du second membre, &c l'on retiendra 6 ajouté à 2 pour le faire valoir 68. Puis l'on dira $7 \times 6 = 42$, $42 + 6$ qu'on retenoit $= 48$. $54 - 48 = 6$. On écrira le reste 6 sous 4, &c on retiendra 5. Après on dira $7 \times 6 = 42$. $42 + 5$ qu'on retenoit $= 47$. $47 - 47 = 0$. On écrira le reste 0 sous 7, &c on retiendra 4. Après on dira $7 \times 1 = 7$. $7 + 4$ qu'on retenoit $= 11$. $11 - 11 = 0$. On écrira le reste 0 sous 11, &c l'opération du second membre sera achevée : le reste sera 65.

3°. On transportera la troisième tranche 688 devant le reste 65. Cela fera le troisième membre 65688. On distinguera le dividende 656 par un point sous 6. On formera le diviseur en supposant $27 = a$, &c prenant le produit $3 \times 27 \times 27 = 2187 = 3a^3$. Ce produit sera le diviseur du troisième membre. Mais voyant que le diviseur 2187 n'est pas contenu dans le dividende 656, on écrira 0 pour le troisième caractère de la racine, &c l'opération du troisième membre sera achevée.

4°. On écrira la quatrième tranche 691 devant le troisième membre. Cela fera le quatrième membre 65688691. On distinguera le dividende 656886 par un point sous 6. Pour avoir le diviseur de ce membre on supposera $270 = a$, &c l'on prendra le produit $3 \times 270 \times 270 = 218700 = 3a^3$. On trouvera que le quotient est 3, que l'on écrira à la racine. On supposera $3 = b$. On formera les produits que prescrit la formule $3a^2 + 3ab + b^3$. On les ajoutera dans une somme : on multipliera par l'esprit cette somme $21894309 = 3a^2 + 3ab + b^3$ par $3 = b$, &c à mesure qu'on formera les produits particuliers, on les retranchera, sans les écrire, du quatrième membre, &c on écrira le reste au dessous. On dira donc $3 \times 9 = 27$. $31 - 27 = 4$; on écrira le reste 4 sous 1, &c on retiendra 3 qu'on a ajouté à 1 pour le faire valoir 31. Puis on dira $3 \times 0 = 0$. $0 + 3$ qu'on retenoit $= 3$. $9 - 3 = 6$. On écrira le reste 6

sous 9. Après on dira $3 \times 3 = 9$. $16 - 9 = 7$. On écrira le reste 7 sous 6, & on retiendra 1. On dira ensuite $3 \times 4 = 12$. $12 + 1$ qu'on retenoit $= 13$. $18 - 13 = 5$. On écrira 5 au dessous de 8, & on retiendra 1. Après quoi on dira $3 \times 9 = 27$. $27 + 1$ qu'on retenoit $= 28$. $28 - 28 = 0$. On écrira le reste 0 sous 8, & on retiendra 2; & l'on dira $3 \times 8 = 24$, $24 + 2$ qu'on retenoit $= 26$. $26 - 26 = 0$. On écrira le reste 0 sous 6, & on retiendra 2. Ensuite on dira $3 \times 1 = 3$. $3 + 2$ qu'on retenoit $= 5$. $5 - 5 = 0$; on écrira le reste 0 sous 5. Enfin on dira $3 \times 2 = 6$. $6 - 6 = 0$. On écrira, si l'on veut, le reste 0 sous 6. Le reste du quatrième membre est 5764.

L'opération est achevée, n'y ayant plus de tranches sur lesquelles il faille opérer. 2703 est la racine du plus grand cube contenu dans le nombre proposé 19748688691. Si l'on diminue le nombre proposé du dernier reste 5764, on aura ce plus grand cube.

VIII. E X E M P L E.

Qui contient des parties décimales.

$$\begin{array}{r} A \quad B \quad C \text{ (racine.} \\ 932. \text{, } 413, 024 \text{) } 9.76 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 203 \quad 413 \text{ second membr.} \\ \hline 183 \quad 673 \end{array}$$

$$19 \quad 740 \quad 024 \text{ 3. membr.}$$

$$17 \quad 041 \quad 176$$

$$2 \quad 698 \quad 848 \text{ resto.}$$

Pour le troisième membre.

$$97 = a$$

$$6 = b$$

$$28227. = 3a^3$$

$$1746. = 3ab$$

$$36 = b^3$$

$$2840196 = 3a^2 + 3ab + b^2$$

$$6 = b$$

$$17041176 = 3a^3 + 3ab + b^3$$

Pour le second membre.

$$9 = a$$

$$243. = 3a^3 \text{ diviseur.}$$

$$3 = b$$

$$216. = 3ab$$

$$64 = b^3$$

$$26524 = 3a^2 + 3ab + b^2$$

$$8 = b$$

$$211191 = 3a^3 + 3ab + b^3$$

Pour le second membre.

$$9 = a$$

$$243. = 3a^3 \text{ diviseur.}$$

$$7 = b$$

$$189. = 3ab$$

$$49 = b^3$$

$$16239 = 3a^2 + 3ab + b^2$$

$$7 = b$$

$$183673 = 3a^3 + 3ab + b^3$$

ON trouvera de la même manière la racine cubique du nombre décimal 932.413024 : la seule chose à quoi il faut prendre garde, est de commencer le partage des tranches par les entiers. Et comme ils occupent trois rangs, ce qui fait une tranche; la première tranche sera des nombres entiers 932. On fera les tranches suivantes, en allant de gauche à droite, chacune de trois rangs; & si la dernière à droite avoit moins de trois rangs, on y suppléeroit par des zéros. On opérera ensuite à l'ordinaire.

1°. On cherchera dans la table des puissances des neuf chiffres le plus grand cube contenu dans la première tranche 932, & l'on trouvera que c'est 729 cube de 9. Ainsi on écrira 9 à la racine pour le premier caractère qui est celui des entiers, & l'on mettra au devant de 9 le point qui doit distinguer les parties décimales d'avec les entiers, on ôtera 729, cube de 9, de la première tranche 932, & on écrira le reste 203 au dessous.

2°. On abaissera la seconde tranche 413 devant le reste, ce qui fera le second membre 203413. On distinguera le dividende 2034 par un point sous 4. On supposera $9 = a$; on formera le diviseur $243 \dots = 3a^2$. On fera la division, & on verra d'abord que le quotient 9 seroit trop grand. Car en multipliant par la pensée le diviseur 243 de gauche à droite par 9, & faisant en même temps la soustraction, on diroit $9 \times 2 = 18$. $20 - 18 = 2$. Et 2 avec le 3 suivant seroit 23. On diroit ensuite $9 \times 4 = 36$: on ne peut pas ôter 36 de 23. Ainsi 9 seroit trop grand.

On éprouvera aussi, comme on le voit marqué dans l'exemple, que 8 seroit trop grand; c'est pourquoi on n'écrira que 7 à la racine : & supposant $7 = b$, on formera les produits représentés par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, si l'on veut à deux sous, comme on l'a expliqué dans l'exemple précédent. On retranchera du second membre la somme de ces produits, & l'on écrira le reste 19740 au dessous.

3°. On transportera la troisième tranche 024 au devant du reste précédent, ce qui fera le troisième membre 19740024. On distinguera le dividende 197400 par un point sous 0 de la tranche abaissée. On supposera la somme des caractères de la racine déjà découverts $97 = a$, & on formera le diviseur

viseur 28127 = $3a^2$. Faisant la division on trouvera le quotient 6 = b qu'on écrira à la racine. On prendra, si l'on veut, à deux fois les produits prescrits par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. On retranchera du troisième membre la somme de ces produits 17041176, & l'on écrira le reste 2698848 au dessous. L'opération est achevée. 9.76 est la racine cubique du plus grand cube contenu dans le nombre proposé. Ce plus grand cube est 932.413014 — 2698848 = 929.714176.

De l'Extraction de la racine 5^e.

IX. EXEMPLE.

Pour le second membre.

$$2 = a$$

$$4 = b \begin{array}{l} 80 \dots = 5a^2 \text{ diviseur.} \\ 320 \dots = 10a^2b \\ 640 \dots = 10a^2b^2 \\ 640 \dots = 5ab^3 \\ 256 = b^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A \quad B \quad C \quad (\\ 70, 15833, 71424 \quad 234 \\ \underline{32} \\ 38 \quad 15833 \quad 2. \text{memb.} \\ \underline{32} \quad 36343 \end{array}$$

$$5 \quad 79490 \quad 71424 \quad 3. \text{memb.}$$

$$5 \quad 79490 \quad 71424$$

$$0, 00000, 00000 \text{ reste.}$$

$$1290656 = 5a^4 + 20a^2b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^4$$

$$4 = b$$

$$5161624 = 5a^5 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^5$$

Pour le second membre.

$$2 = a$$

$$3 = b \begin{array}{l} 80 \dots = 5a^2 \text{ diviseur.} \\ 240 \dots = 10a^2b \\ 360 \dots = 10a^2b^2 \\ 270 \dots = 5ab^3 \\ 81 = b^4 \end{array}$$

Pour le troisième membre,

$$23 = a$$

$$1399205 \dots = 5a^4 \text{ diviseur.}$$

$$486680 \dots = 10a^2b$$

$$84640 \dots = 10a^2b^2$$

$$7360 \dots = 5ab^3$$

$$256 = b^4$$

$$4 = b$$

$$14487267856 = 5a^5 + 10a^3b + 10a^2b^2 + 5ab^3 + b^5$$

$$4 = b$$

$$57949071424 = 5a^6 + 10a^4b + 10a^3b^2 + 5a^2b^3 + 5ab^4 + b^6$$

B b

Pour trouver la racine 5^e du nombre 701583371424, 1^o. On le partagera en tranches chacune de cinq rangs en allant de la droite à la gauche; la première à gauche se trouvera n'avoir que deux rangs. On cherchera dans la table des puissances des neuf chiffres la plus grande cinquième puissance, représentée par a de la formule de la 5^e puissance, qui est contenue dans la première tranche à gauche 70, & ayant trouvé que c'est 32, 5^e puissance de 2, on écrira 2 à la racine pour le premier caractère. On retranchera 32, 5^e puissance de 2, de la première tranche 70, & l'on écrira le reste 38 au dessous.

2^o. On abaissera la seconde tranche au devant du reste 38, ce qui fera le second membre 3815833. On distinguera le dividende 381 par un point sous 1. La formule de la 5^e puissance $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ fait voir qu'en supposant le premier caractère de la racine $2 = a$, il faut prendre $5a^4 = 80$ pour diviseur. Et faisant la division, on trouvera d'abord le quotient 4. Mais supposant $4 = b$, & prenant, si l'on veut à deux fois (comme dans les exemples de l'extraction de la racine cubique) les produits que prescrit la formule, on verra, comme il est marqué dans l'exemple, que la somme des produits surpasse le second membre; ainsi 4 est trop grand, il ne faut écrire que 3 à la racine. Et supposant $3 = b$, il faut former, si l'on veut, à deux fois les produits représentés par $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, retrancher du second membre la somme de ces produits, & en écrire le reste 579490 au dessous: On en voit l'opération dans l'exemple.

3^o. On transportera la troisième tranche au devant du reste précédent, ce qui fera le troisième membre 57949071424. On distinguera le dividende 5794907 par un point sous 7. Pour trouver le diviseur on supposera la somme des deux caractères déjà découverts $23 = a$, & l'on formera le diviseur $1399105 \dots = 5a^4$. On trouvera que le quotient est 4, que l'on écrira à la racine; & supposant $4 = b$, on prendra les produits représentés par la formule $5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, comme on le voit dans l'exemple. On retranchera du troisième membre la somme de ces produits 57949071424, & le reste étant zero, on sera assuré que 234 est la racine 5^e exacte du nombre proposé qui est une 5^e puissance parfaite.

A V E R T I S S E M E N T.

Si l'on veut un exemple de l'extraction de la racine 3^e d'un nombre qui contienne des parties décimales, il n'y a qu'à mettre le point qui distingue les parties décimales d'avec les entiers après 70 dans le nombre 70. 15833, 41424 de l'exemple précédent, faire la première tranche à gauche des seuls entiers 70, & distinguer les tranches suivantes de droite à gauche, en donnant à chacune cinq rangs, extraire ensuite la racine cinquième comme dans l'exemple précédent, & mettre un point dans la racine après 2 qui est le chiffre de la racine des entiers, pour distinguer le caractère 2 des entiers d'avec les caractères suivans 34 des parties décimales.

Les Commencans peuvent faire tant d'exemples de l'extraction des racines qu'ils voudront; ceux que l'on a mis suffisent pour leur faire concevoir la méthode générale de faire ces extractions. Il est bon qu'ils se rendent familière l'extraction de la racine quarrée, qui est celle dont on peut faire plus d'usage dans les Mathématiques. Ils pourront aussi faire quelques exemples de l'extraction de la racine cubique, dont la pratique est nécessaire en quelques occasions. Les extractions des racines plus élevées se présentent si rarement qu'il suffit d'avoir bien conçu la manière de les faire, sans qu'il soit nécessaire de se les rendre familières; & ils se souviendront qu'il suffit de savoir trouver les racines 2^e & 3^e, pour découvrir * les racines 4^e, 6^e, 8^e, 9^e, 12^e, &c. * 196.

*Démonstration du Problème de l'extraction des racines
des nombres.*

198. **Q**UAND il ne reste rien à la fin de l'opération, le Problème fait découvrir les caractères de la racine d'une puissance numérique quelconque, qui sont tels qu'en prenant par ordre les produits de ces caractères * comme le prescrit la formule de la puissance, on formera la même puissance numérique proposée, car par l'opération du Problème on retranche par ordre ces mêmes produits de la puissance numérique proposée, & il ne reste rien. Le Problème fait donc trouver la racine de la puissance numérique proposée. Ce qu'il falloit démontrer. * 177.

Quand il y a un reste à la fin de l'opération, il est évident

par le raisonnement qui précède, que le Problème fait découvrir la racine de la plus grande puissance numérique parfaite du même degré, qui est contenue dans la puissance numérique imparfaite proposée; laquelle puissance numérique parfaite est égale à la puissance numérique imparfaite proposée diminuée du reste qui s'est trouvé à la fin de l'opération.

La formation des puissances des nombres qui contiennent des parties décimales étant semblable à celle des nombres entiers, la résolution des unes & des autres, c'est à dire, l'extraction de leurs racines est aussi semblable, & la démonstration de l'extraction des racines des unes est semblable à la démonstration de l'extraction des racines des autres.

La manière de s'assurer dans la pratique, si l'on a suivi exactement les règles du Problème.

LA démonstration précédente sert à faire connoître que les règles que l'on a données pour l'extraction des racines sont infaillibles; mais pour s'assurer si dans la pratique on les a suivies, & si l'on n'a point pris un nombre pour un autre, il n'y a qu'à élever la racine qu'on a trouvée à la puissance marquée par l'exposant de la racine, c'est à dire au carré, si l'on a extrait la racine carrée, au cube, si l'on a extrait la racine cubique, &c. & la puissance qu'on trouvera doit être égale au nombre proposé dont on a extrait la racine, s'il n'y a point eu de reste à la fin de l'opération; s'il y a eu un reste à la fin de l'opération, il faudra ajouter ce reste à la puissance qu'on trouvera, & la somme doit être égale au nombre proposé.

La manière de s'assurer quand il y a un reste considérable à la fin de l'opération, si la racine qu'on a trouvée est celle de la plus grande puissance du même degré contenue dans le nombre proposé.

ON a vu, article 184, qu'en supposant que a de la formule de la seconde puissance représente tous les caractères de la racine d'un carré parfait, si l'on met x à la place de b dans $2ab \rightarrow b^2$, l'on aura $2a \rightarrow x$ qui représente ce qu'il faut ajouter à ce carré parfait, pour en faire le carré parfait, dont la racine surpasse d'une unité la racine du carré précédent.

Qu'en supposant de même que a représente tous les caractères de la racine d'un cube parfait, $3a^2 + 3a + 1$ représente les produits qu'il faut ajouter à ce cube, pour avoir le cube de la racine qui surpasse la première de l'unité. Il en est de même des puissances plus élevées.

L'on déduit de-là que pour s'assurer si le reste qu'on trouve après chaque opération de l'extraction de la racine quelconque d'un nombre n'est point trop grand, il n'y a qu'à supposer que a représente tous les caractères de la racine déjà découverts, &c prendre, quand c'est la racine quarrée, les produits représentés par $2a + 1$; quand c'est la racine cubique, les produits représentés par $3a^2 + 3a + 1$, quand c'est la racine 5^e , les produits représentés par $5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$, &c ainsi des autres. Si le reste qu'on a trouvé est moindre que la somme de ces produits, il est évident que la racine découverte est celle de la plus grande puissance parfaite du même degré, qui est contenue dans les tranches sur lesquelles on a fait l'opération: si le reste qu'on a trouvé surpasse la somme des produits, il est évident que la racine trouvée est trop petite, &c dans ce cas il faut recommencer l'extraction de la racine qu'on cherchoit.

Par exemple, pour s'assurer que le reste 2698848 qu'on a trouvé à la fin de l'opération de la troisième tranche de l'exemple huitième n'est point trop grand, on supposera la somme des caractères de la racine déjà découverts $976 = a$, &c l'on prendra la somme des produits que représente $3a^2 + 3a + 1$. Cette somme

$$\begin{array}{r} 2857728 = 3a^2 \\ 2928 = 3a \\ 1 = 1 \\ \hline 2860657 = 3a^2 + 3a + 1 \end{array}$$

2860657 est plus grande que le reste 2698848; on est assuré par-là que le reste n'est pas trop grand; c'est à dire, que le plus grand cube parfait contenu dans le nombre 932413024, dont on a extrait la racine cubique, est le cube parfait qui a pour la racine 976.

De l'approximation des racines.

ON démontrera dans la suite qu'il n'y a aucun nombre, soit entier, soit rompu, ou l'un & l'autre ensemble, qui puisse être la racine exacte d'une puissance numérique imparfaite.

Ainsi quand en faisant l'extraction de la racine d'un nombre, on trouve un reste à la fin de l'opération, il est certain qu'on ne sauroit exprimer par un nombre entier, ni par une fraction, ni par un entier & une fraction joints ensemble, la racine exacte de ce nombre. Cependant la Geometrie fournit une ligne qui est la racine exacte d'une puissance numerique imparfaite, en supposant cette puissance imparfaite exprimée par une ligne divisée en autant de parties égales que la puissance numerique imparfaite contient d'unités.

Dans la science du calcul des grandeurs en general que nous expliquons ici, on fait deux choses par rapport à ces racines des puissances numeriques imparfaites. 1°. On les exprime par le signe radical $\sqrt{}$, au dessus duquel on écrit l'exposant de la racine. Par exemple, 3 est un quarré imparfait, on en exprime la racine de cette maniere $\sqrt{3}$, c'est à dire racine 2° ou quarrée de 3. De même 12 est une 3° puissance imparfaite, on en exprime ainsi la racine $\sqrt[3]{12}$; c'est à dire racine 3° ou cubique de 12. Il en est de même des autres. Ces expressions des racines des puissances imparfaites, s'appellent les expressions des grandeurs *incommensurables*. On en expliquera le calcul dans le 2° Livre. 2°. Comme l'on a souvent besoin dans les Mathematiques-pratiques d'avoir les racines les plus approchantes qu'il se puisse des veritables racines de ces puissances numeriques imparfaites, lesquelles racines veritables ne peuvent s'exprimer exactement par nombres, la science du calcul donne la methode pour trouver les racines les plus approchantes qu'il soit possible des veritables racines des puissances imparfaites; c'est à dire, ces racines approchantes étant multipliées par elles-mêmes continuellement autant de fois moins une que leur exposant contient d'unités, (une fois quand c'est la racine quarrée; deux fois quand c'est la racine 3°, & ainsi des autres) les produits approchent de si près des puissances numeriques imparfaites, que la difference en est insensible. On appelle cette methode *l'approximation des racines*. La voici.

Méthode pour l'approximation des racines.

199. **A**PRES avoir trouvé, par le Problème précédent, la racine de la plus grande puissance parfaite, qui est contenue dans la puissance imparfaite proposée, il faut marquer au devant de la racine découverte vers la droite le point qui doit distinguer les entiers d'avec les parties décimales; ajouter au devant du dernier reste qui s'est trouvé à la fin de l'opération une tranche d'autant de zeros qu'il y a de rangs dans chaque tranche du nombre proposé sur lequel on a opéré, c'est à dire deux zeros si l'on extrait la racine quarrée; trois zeros si c'est la racine 3^e, &c ainsi des autres; regarder ce reste avec les zeros ajoutez, comme un nouveau membre de l'extraction; operer sur ce membre comme l'on a fait sur ceux qui le précédent, &c écrire le caractère, qui convient à ce membre, à la racine au devant du point qui distingue les entiers d'avec les parties décimales; c'est à dire ce caractère de la racine exprimera des dixièmes; &c écrire le reste que donnera l'opération au dessous de ce membre.

Il faut ajouter à ce reste autant de zeros qu'au précédent, ce qui en fera le membre suivant de l'opération, &c operer sur ce membre comme sur le précédent, écrire le caractère qui lui convient à la racine au devant du membre précédent, &c le reste au dessous.

Il faut continuer d'ajouter ainsi au dernier reste autant de zeros qu'au précédent, ce qui donnera le membre suivant de l'extraction; ajouter au reste que donnera ce membre le même nombre de zeros qu'au précédent, &c ainsi à l'infini ou tant que l'on voudra. Les caractères des entiers écrits à la racine, joints aux parties décimales qu'on a découvertes par les opérations qu'on vient de prescrire, seront la racine approchée de la puissance numerique imparfaite sur laquelle on operoit.

L'approximation des racines des nombres qui contiennent des parties décimales, &c où l'on a trouvé un reste à la fin de l'opération, se fait de la même maniere que celles des nombres entiers, excepté qu'il ne faut point marquer d'autre point dans la racine pour distinguer les parties décimales d'avec les entiers, que celui qui a été marqué au commencement de l'opération.

Exemple de l'approximation des racines.

$$\begin{array}{r}
 3143,39,23 \text{ (} 1853,0847 \\
 2 \overline{) 43} \qquad \qquad \qquad 28 \\
 \underline{19} \quad 39 \qquad \qquad \qquad 365 \\
 \qquad \qquad \qquad 1 \quad 14 \quad 23 \qquad \qquad \qquad 3703 \} \text{ diviseurs,} \\
 \text{reste } 3 \quad 140000 \qquad \qquad \qquad 3706 \\
 \qquad \qquad \qquad 17513600 \qquad \qquad \qquad 370608 \\
 \qquad \qquad \qquad 26889400 \qquad \qquad \qquad 3706164 \\
 \qquad \qquad \qquad 009462591 \qquad \qquad \qquad 37061687
 \end{array}$$

En faisant l'extraction de la racine quarrée du quarré imparfait 3433923, dans le troisième exemple, on a trouvé la racine 1853, & le reste 314. Pour découvrir une racine qui approche tant près qu'on voudra de la véritable racine qu'on ne scauroit exprimer par nombres, il faut mettre un point au devant de la racine déjà trouvée en entiers 1853; ce point servira à distinguer les entiers déjà découverts d'avec les parties décimales qu'on va y ajouter. Il faut ajouter deux zeros au reste 314, ce qui donnera le nouveau membre 31400. On distinguera le dividende de ce membre 3140 par un point sous le zero plus à gauche. On formera le diviseur de ce membre, comme on a formé le diviseur des autres en multipliant par 2 les caracteres déjà découverts, & l'on trouvera 3706 pour le diviseur; & voyant que ce diviseur n'est pas contenu dans le dividende 3140, on écrira 0 à la racine pour le caractere de ce membre. On ajoutera deux zeros à ce membre, ce qui donnera le nouveau membre 3140000. On distinguera le dividende 314000 par un point sous le zero le plus à gauche des deux qu'on a ajoutez. On formera le diviseur 37060. Faisant la division on trouvera le quotient 8 qu'on écrira à la racine; & faisant l'opération sur ce membre, on trouvera le reste 175136. On ajoutera deux zeros à ce reste, ce qui fera le membre suivant 17513600. On distinguera le dividende par un point sous le zero plus à gauche des deux qu'on a ajoutez. On formera le diviseur de ce membre 370616. On trouvera le quotient 4 qu'on écrira à la

à la racine ; & faisant l'opération , on aura le reste 2688944 . On lui ajoutera deux zeros , ce qui fera le membre suivant 268894400 . On distinguera le dividende par un point sous le zero plus à gauche des deux qu'on a ajoutez . On formera le diviseur 3706168 . On trouvera le quotient 7 qu'on écrira à la racine ; & faisant l'opération sur ce membre , on trouvera le reste 9462591 .

On peut continuer l'approximation tant qu'on voudra , en ajoutant toujours deux zeros au dernier reste qu'on aura trouvé , pour en faire le membre suivant . Les opérations qu'on vient de faire suffisent pour en faire concevoir la méthode : & il est évident qu'on peut l'appliquer aisément à l'approximation des racines des nombres qui contiennent des parties décimales , à l'approximation des racines cubiques , en ajoutant trois zeros au dernier reste , & de même à chacun des restes suivans ; à l'approximation des racines 4^{es} , en ajoutant quatre zeros au dernier reste , & de même à chacun des restes suivans . enfin à l'approximation des racines dont l'exposant sera tel nombre entier qu'on voudra , en ajoutant au dernier reste , & à chacun des restes suivans , autant de zeros que l'exposant de la racine contient d'unités .

Démonstration . Il est évident qu'ajouter des tranches de zeros au dernier reste de l'extraction , & aux restes suivans , est la même chose que de les ajouter d'abord à la puissance numérique , dont on a extrait la racine . Par exemple , ajouter deux zeros au reste 314 , ensuite deux au reste suivant , encore deux au troisième reste , & enfin deux au quatrième reste , est la même chose que d'ajouter d'abord huit zeros au carré imparfait 3433923 , en mettant entre ce nombre & ces zeros ajoutez le point qui distingue les entiers des parties décimales . De plus ce nombre avec les zeros ajoutez 3433923 00000000 * n'a point changé de valeur , & il n'y a * 17. de différence entre 3433923 & 3433923 . 00000000 qu'en ce que la première expression marque les unités de ce nombre entières & sans être divisées en parties décimales , & la seconde marque les unités qui composent le même nombre partagées en parties décimales .

Or on trouve par la méthode d'approximation la racine 1853 . 0847 qui contient & la racine 1853 de la plus grande puissance en entiers 3453609 contenue dans la puissance im-

parfaite proposée, & de plus le nombre décimal 0.0847; & la somme de ces entiers & de ces parties décimales 1853.0847 est la racine de la puissance parfaite 3433922.90537409, qui est un nombre décimal moindre que 3433923.00000000, & plus grand que 3433369.00000000.

La méthode d'approximation des racines fait donc trouver une racine d'une puissance numérique imparfaite, qui approche plus de la véritable racine que la racine qu'on avoit trouvée avant l'approximation.

Il est évident que plus on continuera l'approximation, & plus la racine qui viendra de cette approximation sera approchante de la véritable racine qu'on ne sauroit exprimer par nombres.

Dans la pratique, quand on est arrivé au rang des parties décimales de la racine approchée où l'on veut terminer l'approximation, (on a terminé l'approximation précédente aux dix millièmes qui occupent le quatrième rang des parties décimales) on examine si dans l'opération suivante on trouveroit un nombre décimal pour le caractère suivant de la racine approchée, qui fût plus grand ou moindre que 5; si l'on voit qu'il doive être plus grand que 5, on augmente d'une unité le caractère décimal, par lequel on a terminé l'opération; & si l'on voit qu'il doive être moindre que 5, c'est à dire moindre que la moitié d'une unité du rang où l'on a voulu terminer la racine, on laisse le dernier caractère décimal tel qu'on l'a trouvé par l'opération. Il est visible que cela se fait afin que la racine approchée diffère moins de la véritable racine, & que le reste qu'on néglige soit moins considérable.

De l'extraction des racines des puissances littérales.

L'extraction des puissances littérales complexes.

200. 1. **P**OUR extraire la racine quelconque, dont l'exposant est un nombre entier, d'une grandeur littérale incomplexée qui n'a qu'une seule lettre, comme la racine 3^e de a^6 , il faut diviser l'exposant de la puissance de la grandeur littérale par l'exposant de la racine; & écrire le quotient pour l'exposant de la racine qu'on cherchoit. Ainsi la racine 3^e de a^6 est a^2 . La racine 2^e de a^6 est a^3 ; la racine 4^e de a^6 est $a^{\frac{3}{2}}$; la racine

3^e de a^m est $a^{\frac{m}{3}}$. C'est une suite évidente de l'article 150, & de la formation des puissances d'une grandeur.

201. 2^e. Quand l'exposant de la racine n'est pas un diviseur exact de l'exposant de la puissance; on écrit pour l'exposant de la racine qu'on cherche * la fraction dont le numérateur * 153. est l'exposant de la puissance, & le dénominateur l'exposant de la racine. Ainsi la racine 2^e de a^4 est a^2 . La racine 2^e de a^5 est $a^{\frac{5}{2}}$. La racine 5^e de a^6 est $a^{\frac{6}{5}}$. Ces expressions sont des signes arbitraires qu'on a déterminés à marquer les racines des puissances.

202. Quand les exposans des grandeurs littérales sont indéterminés, c'est à dire quand ces exposans sont des lettres, l'extraction de la racine se fait de la même manière. Ainsi la racine m de la puissance a^m est a . La racine m de a^n est $a^{\frac{n}{m}}$. La racine m de a^n est $a^{\frac{n}{m}}$. La racine 2^e de a^n est $a^{\frac{n}{2}}$. La racine n de a^1 est $a^{\frac{1}{n}}$. Il en est de même des autres. C'est une suite évidente des articles 150 & 153.

REMARQUE.

203. QUAND l'exposant de la racine est un diviseur exact de l'exposant de la puissance, l'exposant de la racine étant un nombre entier, en y comprenant l'unité, il est clair que les racines sont des puissances parfaites aussi-bien que les puissances dont elles sont les racines. Ainsi a^4 , racine 3^e de a^6 est une puissance parfaite. Mais quand l'exposant de la racine n'est pas un diviseur exact de l'exposant de la puissance, alors l'exposant de la racine est une fraction. Cependant ces racines étant marquées par des exposans comme les puissances, on les nomme *des puissances imparfaites*. Ainsi $a^{\frac{5}{2}}$, racine 3^e de a^5 , ayant la fraction $\frac{5}{3}$ pour exposant, est une puissance imparfaite. Ce sont proprement ces puissances imparfaites que l'on exprime par le signe radical $\sqrt{}$, en mettant au dessus l'exposant de la racine. Ainsi $\sqrt[3]{a^5}$ est la même chose que $a^{\frac{5}{3}}$. $\sqrt[2]{a^5}$ est la même chose que $a^{\frac{5}{2}}$. Ces puissances imparfaites

sont des grandeurs incommensurables, dont on traitera à fond dans le second Livre vers la fin.

Ainsi quand on met le signe $\sqrt{}$ devant une puissance parfaite pour en exprimer la racine, cela ne se fait que pour marquer en abrégé qu'il faut faire l'extraction de la racine de cette puissance. Ainsi $\sqrt{a^2} = a$ exprime qu'en faisant l'extraction de la racine 2^e de a^2 on trouve a . Mais le signe radical devant une puissance, dont on ne sauroit exprimer la racine qu'en lui donnant pour exposant une fraction, est l'expression propre de cette racine. Comme $\sqrt{a^3}$ est l'expression

propre de la racine 2^e de a^3 . Ou bien encore $a^{\frac{3}{2}}$ est l'expression propre de la racine 2^e de a^3 ; mais alors on la regarde comme une puissance. Ces expressions des puissances imparfaites, ou des racines qui ne sont pas elles-mêmes des puissances parfaites, sont des signes arbitraires qu'on a déterminés à représenter ces racines ou puissances imparfaites.

204. 3^o. Pour extraire la racine d'une grandeur inconnue qui contient plusieurs lettres différentes, il faut diviser l'exposant de chaque lettre par celui de la racine, & écrire le quotient qui convient à chaque lettre différente au haut de cette lettre, pour lui servir d'exposant, & ce sera la racine. Par exemple, la racine 2^e de $a^2b^2c^2$ est ab^2c^2 . La racine 3^e de $a^3b^3c^3$ est $a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{3}{3}}c^{\frac{3}{3}}$. La racine 2^e de ax^2 est $a^{\frac{1}{2}}x$. La racine n de $a^n b^{n^2}$ est $a^{\frac{n}{n}}b^{\frac{n^2}{n}}$. La racine n de $a^{n-1}x^n$ est $a^{\frac{n-1}{n}}x^{\frac{n}{n}}$. La racine n de $a^n x$ est $a^{\frac{n}{n}}x^{\frac{1}{n}}$. La racine 2^e de a^2b^2 est $a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{2}{2}}$; la racine n de $a^n b^n$ est $a^{\frac{n}{n}}b^{\frac{n}{n}}$, &c.

205. 4^o. Lorsqu'il faut extraire la racine d'une puissance littérale précédée d'un nombre, par lequel elle est multipliée, il faut trouver séparément la racine du nombre, & celle de la grandeur littérale, & écrire pour la racine qu'on cherche la racine du nombre, & au devant la racine littérale. Ainsi la racine 2^e de $9a^2$ est $3a$. La racine cubique de $8a^3$ est $2a$. La racine 3^e de $27a^3$ est $3a$. La racine 3^e de $12a^3$ est $a^{\frac{3}{3}} \times \sqrt[3]{12}$. On remarquera que dans le cas où la racine est composée d'une grandeur commensurable, & d'une incommensurable marquée par le signe $\sqrt{}$, qui sont multipliées l'une par l'autre,

on écrit la partie commensurable la première, & l'on écrit au devant vers la droite, la partie incommensurable précédée du signe $\sqrt{}$, comme on le voit dans $a^2 \sqrt{12}$, & cette expression marque le produit de l'une de ces parties par l'autre. $a^2 \sqrt{12} = a^2 \times \sqrt{12}$

206. 5°. On remarquera sur les signes $+$ & $-$, 1°. que quand on extrait la racine dont l'exposant est un nombre impair, comme 3, 5, 7, &c. d'une grandeur qui a le signe $+$ *, le signe de la racine doit toujours être $+$; & que si la grandeur a $-$ *, la racine doit toujours avoir le signe $-$: 2°. Mais, lorsque l'exposant de la racine est pair, comme 2, 4, 6, &c. que la racine * peut avoir le signe $+$, & * qu'elle peut aussi avoir le signe $-$. Par exemple, $+$ a est la racine 2° de $+$ a^2 , & $-$ a est aussi la racine 2° de $+$ a^2 . Quand il est nécessaire de marquer ces deux racines positive & négative, on les marque ainsi, $+$ a est la racine 2° de $+$ a^2 . Mais comme on cherche plus ordinairement les grandeurs positives que les négatives, on prend d'ordinaire la racine positive. 3°. Enfin que si la grandeur littérale avoit le signe $-$, & que l'exposant de la racine fût un nombre pair, * la racine seroit une grandeur impossible, qu'on nomme *imaginaire*: on expliquera dans le second Livre les racines impossibles. Ainsi la racine 2° de $-$ a se marque ainsi $\sqrt{-a}$.

L'extraction des racines des puissances littérales complexes.

PROBLÈME.

207. **T**ROUVER la racine d'une puissance littérale complexe de quelque degré que soit la puissance.

REGLE OU OPERATION. La manière de trouver la racine d'une puissance littérale complexe quelconque est semblable à la méthode de trouver la racine d'une puissance numérique quelconque, si ce n'est qu'on ne partage pas la puissance littérale en tranches comme la numérique, qu'on n'y distingue pas les membres de l'extraction comme dans les nombres, & qu'on n'y observe pas non plus les rangs qui sont particuliers aux nombres, mais on ordonne la puissance littérale en termes différens, par rapport à l'une des lettres de cette

puissance, mettant au premier terme la plus haute puissance de cette lettre, & les autres puissances qui descendent d'un degré de l'une à l'autre dans les termes suivans, observant de choisir la lettre qui donnera pour premier terme une puissance parfaite du degré de celle dont on cherche la racine.

- On trace un petit arc au devant de cette puissance, pour marquer la place où l'on doit écrire les parties de la racine à mesure qu'on les trouvera. On prend dans la table des puissances * 160. *fautes* pour règle de l'extraction de la racine, la formule littérale du degré de la puissance littérale sur laquelle on veut opérer : & 1°. supposant que le premier terme de la formule représente le premier terme de la puissance proposée, on prend la racine du premier terme représentée par a de la formule, & l'on écrit pour première partie de la racine qu'on cherche, cette racine du premier terme de la puissance littérale du degré de celle que l'on cherche. On retranche la puissance de cette première partie de la racine du degré de la puissance proposée, on la retranche, dis-je, du premier terme, mais comme elle est toujours égale à ce premier terme, on efface simplement le premier terme de la puissance littérale, ou bien l'on met un point ou zero au dessous, pour marquer qu'on a retranché cette puissance.

2°. Supposant que a de la formule représente la première partie de la racine découverte par la première opération, & que b de la formule représente la seconde partie qu'on cherche, on prendra pour diviseur la grandeur représentée par le second terme de la formule, dont on a effacé b ; on divisera le second terme de la puissance proposée par ce diviseur, & l'on écrira le quotient pour la seconde partie de la racine. Puis supposant la seconde partie de la racine qu'on vient de découvrir représentée par b de la formule, on formera les produits présents par la formule, & on les retranchera de la puissance proposée, écrivant le reste au dessous, & zero quand il n'y a pas de reste.

3°. Le reste précédent joint aux grandeurs de la puissance proposée, sur lesquelles on n'a pas encore opéré, est la grandeur littérale sur laquelle on doit continuer l'opération; on la continuera en supposant les deux premières parties de la racine déjà découvertes représentées par a de

la formule, & la troisième qu'on cherche représentée par b . On prendra pour diviseur le produit représenté par le second terme de la formule, dont on a effacé b . On divisera celui des termes de la puissance, sur lesquels on doit opérer, qui contient la plus haute puissance de la lettre, suivant laquelle on a ordonné la puissance proposée, par le premier terme du diviseur. On écrira le quotient pour la troisième partie de la racine; & la supposant cette troisième partie représentée par b de la formule, on formera les produits prescrits par la formule, on les retranchera de la puissance proposée, & l'on écrira le reste au dessous.

4°. Ce dernier reste & les grandeurs de la puissance sur lesquelles on n'a pas encore opéré, font la grandeur littérale sur laquelle on doit continuer l'opération. On la continuera, en supposant les trois parties de la racine déjà découvertes représentées par a de la formule, & la quatrième qu'on cherche représentée par b ; & opérant comme dans l'article précédent, on trouvera la quatrième partie de la racine, & ensuite la cinquième, la sixième, & les autres suivantes jusqu'à la dernière, qui doit donner zero pour reste, si la puissance proposée est parfaite.

5°. Quand on a trouvé zero pour le dernier reste, & qu'il n'y a plus de grandeurs sur lesquelles on doive opérer, l'opération est finie, la racine qu'on a trouvée est exacte, & la puissance proposée est une puissance parfaite. Mais quand on arrive à un reste sur lequel on ne peut plus continuer l'opération sans trouver pour quotient une fraction, la puissance proposée est imparfaite, ou bien elle ne peut se continuer sans fraction.

Quand on s'aperçoit que la puissance littérale, dont on cherche la racine, est imparfaite, ou bien que la racine que l'on cherche n'est pas une grandeur entière, on ne fait point d'ordinaire l'extraction de la racine de la plus grande puissance parfaite du même degré contenue dans la proposée, on se contente de mettre au devant de cette puissance le signe $\sqrt{}$, écrivant au dessus de $\sqrt{}$ l'exposant de la racine qu'on demande, & on tire une ligne du haut du signe $\sqrt{}$ qui va cou-

vrir toute la puissance imparfaite de cette manière $\sqrt{a^2 + 2ax + x^2 - b^2}$.
Mais si l'on a besoin d'avoir cette racine, on trouve d'abord

On remarquera que quand on s'est rendu familière l'extraction des racines, la multiplication & la soustraction, dont on vient de parler se font par l'esprit sans écrire autre chose que le reste de la soustraction. Cette remarque servira pour le reste de cet exemple, & pour les suivans.

3°. Pour continuer l'opération sur le reste précédent — $30c^2d^2$, joint aux termes de la puissance proposée, sur lesquels on n'a pas encore opéré, on supposera les deux parties de la racine déjà découvertes $3c^2 + 4cd$ représentées par a de la formule $2ab + b^2$. On formera le diviseur $6c^2 + 8cd$, comme le prescrit $2a$ de la formule. Et divisant — $30c^2d^2$ par le premier terme $+ 6c^2$ du diviseur, on trouvera le quotient — $5d^2$ qu'on écrira à la racine, & encore au devant du diviseur. Puis supposant — $5d^2$ représentée par b de la formule, on multipliera $6c^2 + 8cd - 5d^2$ que représente $2a + b$ de la formule par — $5d^2$ représentée par b , & l'on ôtera les produits — $30c^2d^2 - 40cd^3 + 25d^4$, des termes qui restent dans la puissance proposée. Et trouvant que le reste est zero, & qu'il n'y a plus de termes dans la puissance proposée sur lesquels on n'ait opéré; on est assuré par là que $3c^2 + 4cd - 5d^2$ est racine exacte de la puissance proposée, qui est une 2^e puissance parfaite, dont la racine est une grandeur entière.

II. EXEMPLE.

B

$$\begin{array}{rcl}
 4x^3y^2 - 12cx^2y + 9c^2x^2 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} & \text{racine,} \\
 0 - 16cdxy + 24c^2dx & & 2xy - 3cx - 4cd \\
 & & + 16c^2d^2 \\
 - 4x^3y^2 & & + 4xy - 3cx - 4cd \\
 \hline
 & + 12cx^2y - 9c^2x^2 & \\
 & + 16cdxy - 24c^2dx & \\
 & - 16c^2d^2 & \\
 \hline
 0 & & 0
 \end{array}$$

On trouvera de même la racine quarrée de la 2^e puissance complexe B, après l'avoir ordonnée par rapport à la lettre y .

1°. On dira la racine quarrée de $4x^3y^2$ est $2xy$; on écrira $2xy$ pour la première partie de la racine. On retranchera $4x^3y^2$ quarré de $2xy$, de $4x^3y^2$; on écrira au dessous le reste 0.

2°. On multipliera la racine $2xy$ par 2, & on écrira le

Dd

produit $4xy$ pour le diviseur. On divisera le second terme $-12cx^2y - 16cdxy$ par $+4xy$, & on écrira à la racine le quotient $-3cx - 4cd$, & encore au devant du diviseur. On multipliera $4xy - 3cx - 4cd$ par $-3cx - 4cd$; on retranchera le produit $-12cx^2y - 16cdxy + 9c^2x^2 + 24c^2d$ de $+16c^2d$ de la puissance B ; & trouvant zero pour reste, & qu'il n'est resté aucune grandeur dans la puissance B ; on voit par là que $2xy - 3cx - 4cd$ est la racine exacte de la puissance B , qui est une seconde puissance parfaite.

Remarques sur l'extraction de la racine quarrée.

1.

208. **U**N quarré positif comme $+4x^2y^2$ pouvant avoir pour racine la même grandeur $2xy$ positive & négative, si l'on s'aperçoit dans la suite de l'opération qu'ayant pris la racine positive, l'extraction ne pût pas se faire, il faudroit prendre la même racine négative.

2.

209. Il peut arriver qu'en ordonnant la puissance dont on cherche la racine suivant une lettre, le premier terme se trouve une grandeur complexe; par exemple, si l'on ordonnoit la puissance B par rapport à la lettre c , le premier terme auroit été composé de trois grandeurs. Dans ce cas il faut voir s'il n'y auroit point une lettre dans la puissance proposée, dont la plus haute puissance ne fût qu'une grandeur incomplex, qui fût en même tems une puissance parfaite, & ordonner la puissance proposée par rapport à cette lettre, comme on a fait la puissance B par rapport à la lettre y . Ou bien, si l'on ne vouloit pas prendre cette peine, ou qu'il n'y eût pas de lettre qui pût ainsi servir à ordonner la puissance proposée, on prendroit dans le premier terme complexe de la puissance proposée, pour la première opération, la seule grandeur incomplex, qui seroit une puissance parfaite. Dans le second exemple on prendroit pour la première opération la grandeur $+9c^2x^2$, ou la grandeur $+16c^2d^2$, qui sont chacune une puissance parfaite. On écrirait la racine de l'une des ces grandeurs pour la première partie de la racine de la puissance B , & l'on continueroit l'opération comme le prescrit la règle de l'extraction des racines. Mais l'on a vu dans le second

exemple, que si l'on prenoit $\pm 9c^2x^2$, ou bien $\pm 16c^2d^2$ pour faire la première opération, il faudroit prendre $- 3cx$ ou $- 4cd$ négative pour la première partie de la racine. On pourroit cependant prendre cette première partie positive, & l'opération ne laisseroit pas de se faire exactement; on trouveroit la racine exacte $\pm 3cx \pm 4cd - 12y$. Quand on a acquis un peu d'habitude à extraire les racines, on voit facilement qu'en prenant pour premier terme de la puissance B la grandeur complexe $\pm 9c^2x^2 \pm 24c^2dx \pm 16c^2d^2$, cette grandeur est une puissance parfaite dont la racine est $\pm 3cx \pm 4cd$, & l'on fait la première opération sur cette puissance parfaite, on écrit sa racine pour la première partie de la racine qu'on cherche, on ôte son carré de la puissance B ; c'est à dire, on efface le premier terme entier, & on continue l'opération en prenant $\pm 3cx \pm 4cd$ pour la première partie de la racine découverte par la première opération.

III. EXEMPLE.

POUR trouver la racine 3^e ou cubique de la grandeur littérale complexe C qu'on a ordonnée suivant la lettre y . On se servira de la formule de la 3^e puissance $a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$. & 1^o, regardant le premier terme de C 27y³ représenté par a^3 , on prendra la racine 3^e 3y^e, représentée, par a , du premier terme 27y³. On écrira $\pm 3y^2$ pour la première partie de la racine. On retranchera 27y³ (3^e puissance de 3y^e) du premier terme 27y³, & on écrira le reste zero au dessous. a^3 de la formule ne sert que pour cette opération.

2^o. Pour trouver la seconde partie de la racine représentée par b de la formule, il faut effacer b dans le second terme $3a^2b$ de la formule, & $3a^2$ sera connoître que pour avoir le diviseur de la second opération, il faut multiplier par 3 le carré de 3y^e représentée par a de la formule, & l'on aura $\pm 27y^2$ pour le diviseur représenté par $3a^2$. Il faut diviser $- 54y^2$ par ce diviseur, & écrire le quotient $- 2y$ pour la seconde partie de la racine. Puis supposant $- 2y$ représentée par b de la formule, il faut former à part le produit représenté par $- 3a^2b \pm 3ab^2 - b^3$ (où le premier & le troisième termes ont le signe $-$, à cause du signe $-$ de la seconde partie $- 2y$ de la racine.) Ce produit est $- 54y^3$

Dd ij

$+ 36cy^2 - 8c^3y$. On le retranchera de la puissance C, & l'on joindra au reste de cette soustraction les termes de C, sur lesquels on n'a pas encore opéré.

3°. On trouvera la troisième partie de la racine de la même manière qu'on a trouvé la seconde. On supposera que a de la formule représente les deux parties $3y^2 - 2cy$ de la racine déjà découvertes, & que b représente la troisième qu'on cherche. $3a^2$ fait voir qu'il faut prendre pour diviseur le produit de 3 par le carré de $3y^2 - 2cy$ représentée par a . Ainsi il faut écrire pour diviseur $+ 27y^4 - 36cy^3 + 12c^2y^2 = 3a^2$. Il faut diviser $+ 108c^2y^4$, qui est le premier des termes de C sur lesquels on doit opérer, par le premier terme $+ 27y^4$ du diviseur; écrire le quotient $+ 4c^2$ pour la troisième partie de la racine. Puis supposant $+ 4c^2$ représentée par b de la formule, il faut former les produits représentés par la formule $3ab + 3ab^2 + b^3$. Ces produits sont $+ 108cy^4 - 144c^2y^3 + 192c^3y^2 - 96c^4y + 64c^5$. Enfin il faut retrancher ces produits des termes qui restent de la puissance C joints au reste de l'opération précédente: & comme il reste zero, cela fait voir que $+ 3y^2 - 2cy + 4c^2$ est la racine exacte de la puissance C, qui est une 3^e puissance parfaite.

Exemple III.

Extraction de la racine cubique ou 3^e .

C

$$27y^6 - 54cy^5 + 144c^2y^4 - 152c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6 \quad (3y^2 - 2cy + 4c^2)$$

$- 27y^6$

$$+ 54cy^5 - 36c^2y^4 + 8c^3y^3$$

$$+ 108c^2y^4 - 144c^3y^3 + 192c^4y^2 - 96c^5y + 64c^6$$

$$- 108c^2y^4 + 144c^3y^3 - 192c^4y^2 + 96c^5y - 64c^6$$

Seconde operation.

$$\begin{aligned}
 3y^2 &= a \\
 \div 27y^2 \text{ diviseur} &= 3a^2 \\
 - 2cy &= b \\
 - 54cy^2 &= - 3a^2b \\
 \div 36c^2y^2 &= \div 3ab^2 \\
 - 8c^2y^2 &= - b^2 \\
 \hline
 - 54cy^2 + 36c^2y^2 - 8c^2y^2 &= - 3a^2b + 3ab^2 - b^2
 \end{aligned}$$

Troisième operation.

$$\begin{aligned}
 3y^2 - 2cy &= a \\
 \div 27y^2 - 36cy^2 + 12c^2y^2 \text{ diviseur} &= 3a^2 \\
 \div 4c^2 &= b \\
 \div 108c^2y^2 - 144c^2y^2 + 48c^2y^2 &= \div 3a^2b \\
 \div 144c^2y^2 - 96c^2y^2 &= 3ab^2 \\
 \div 64c^2 &= b^2 \\
 \hline
 \div 108c^2y^2 - 144c^2y^2 + 192c^2y^2 - 96c^2y^2 + 64c^2 &= 3a^2b + 3ab^2 + b^2
 \end{aligned}$$

A V E R T I S S E M E N T.

LES exemples qu'on vient de donner suffisent pour faire clairement concevoir la methode d'extraire les racines des grandeurs litterales complexes, & la maniere d'en faire usage. Ceux qui voudront se la rendre familiere, pourront se faire eux-mêmes tant d'exemples qu'il leur plaira. Ils n'auroient qu'à prendre une grandeur complexe, la multiplier par elle-même une fois, deux fois, trois fois, &c. observant d'ordonner les puissances 2^e , 3^e , 4^e , &c. qui viendront de ces multiplications, par rapport à une lettre qui donne pour premier terme une puissance parfaite du degré de celle dont ils voudront extraire la racine. Enfin ils feront l'extraction de la racine de cette puissance suivant la regle du Problème, comme dans les exemples précédens, & s'ils ont bien suivi cette regle, ils trouveront zero pour le dernier reste de l'operation.

210. *Démonstration du Problème.* Le Problème fait découvrir, pour la racine que l'on cherche, les grandeurs dont les produits, pris dans l'ordre que prescrit * la formation des puissances, composent la puissance parfaite de cette racine, & qui composent aussi la grandeur proposée, dont on a extrait la racine, puisqu'en étant retranchés par ordre, dans l'opération, il n'y a eu aucun reste. Le Problème fait donc découvrir la racine exacte d'une puissance complexe parfaite. *Ce qu'il fallait démontrer.*

Pour s'assurer qu'on a suivi exactement la règle de l'extraction des racines, il n'y a qu'à élever la racine qu'on a découverte à la puissance qui a le même exposant que cette racine; & si l'on a bien opéré, on doit trouver la grandeur proposée.

Axiomes sur les puissances & sur les racines.

I.

211. **L**ES puissances égales du même degré ont leurs racines égales; les racines égales qui ont le même exposant, ont leurs puissances du même degré égales. Par exemple, si $a = b$, l'on aura $a^2 = b^2$; $a^3 = b^3$; $a^4 = b^4$, en général $a^n = b^n$; & si $a^n = b^n$, l'on aura $a = b$.

2.

212. Les racines inégales ont leurs puissances du même degré inégales, & la moindre racine a une puissance moindre que la puissance du même degré de la plus grande racine; & réciproquement les puissances d'un même degré étant inégales, les racines sont inégales, & la plus grande puissance a une plus grande racine que la moindre puissance.





LA SCIENCE DU CALCUL DES GRANDEURS EN GENERAL

LIVRE II.

Où l'on explique le calcul des grandeurs rompues, qu'on nomme aussi fractions; tout ce qui regarde les comparaisons des rapports simples; ce qu'il faut sçavoir des rapports composez; & le calcul des grandeurs incommensurables.

SECTION I.

Où l'on explique les grandeurs simples ou premières, & les grandeurs composees; la methode pour trouver le plus grand diviseur commun à deux & à plusieurs grandeurs & la methode de trouver tous les diviseurs d'une grandeur composee.

213



N a dit * au commencement du Livre précé.⁹ dent qu'un nombre entier, étoit celui qui contenoit exactement l'unité un nombre déterminé de fois, comme 4 pieds, 10 pieds: & qu'un nombre rompu, ou une fraction * exprimoit un¹⁹ nombre de parties égales quelconques de l'unité, ou d'un tout qui est regardé comme l'unité par rapport à la fraction. Par exemple, deux tiers d'un pied, trois quarts d'un pied, sont des fractions. Trois quarts de deux pieds, quatre sixièmes parties de deux pieds, sont aussi des fractions, & deux

pieds font regardez comme l'unité à laquelle se rapportent les deux dernières fractions.

On a aussi dit qu'une fraction s'exprimoit par deux nombres, dont l'un étoit sur une ligne, & l'autre au dessous : que la fraction deux tiers, par exemple, s'exprimoit par $\frac{2}{3}$; que le nombre 3 qui étoit sous la ligne, se nommoit le *dénominateur*, & qu'il marquait en combien de parties égales l'unité étoit conçue-partagée, qu'il se nommoit encore le *second terme*, & encore le *consequent*, & enfin le *diviseur* : que le nombre 2 qui étoit sur la ligne, se nommoit le *numérateur*, & qu'il exprimoit combien la fraction contenoit de parties égales de l'unité déterminées par le dénominateur ; qu'il s'appelloit encore le *premier terme*, & encore l'*antécédent*, & enfin le *dividende*.

214. Cette notion d'un nombre rompu fait clairement connoître que si l'on regarde les parties égales de l'unité déterminées par le dénominateur, comme des unitéz elles-mêmes; la fraction pourra être considérée comme un nombre entier qui exprime autant d'unitéz qu'en contient le numérateur. Par exemple, en regardant dans la fraction $\frac{3}{3}$, les trois parties égales, dans lesquelles le dénominateur 3 marque que l'unité est divisée, comme des unitéz elles-mêmes; on pourra considérer $\frac{3}{3}$ comme un entier, qui contient deux unitéz, dont chacune est contenue trois fois dans son tout qui est l'unité.

D'où il suit évidemment, 1°. que pour ajouter des fractions, qui ont le même dénominateur, comme $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$, il faut ajouter les seuls numérateurs, & écrire leur somme sur une ligne, & le dénominateur commun au dessous, & l'on aura la somme de ces fractions, qui est dans cet exemple $\frac{3}{3}$. 2°. Que pour ôter une fraction, comme $\frac{2}{3}$, d'une autre fraction, comme $\frac{3}{3}$, qui à le même dénominateur, il faut retrancher le numérateur de la première du numérateur de la seconde ; écrire le reste sur une ligne, & le dénominateur commun au dessous ; & cette fraction, qui dans cet exemple est $\frac{1}{3}$, sera la différence des deux fractions.

D'où l'on voit que, quand les fractions n'ont pas le même dénominateur, il faut, pour les ajouter les unes aux autres, ou pour les retrancher les unes des autres, les réduire à avoir un même dénominateur, sans changer leur valeur.

Cela

Cela fait déjà appercevoir que le calcul des fractions contient, outre l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, la formation des puissances, & l'extraction des racines, qui sont les opérations qui lui sont communes avec le calcul des grandeurs entières; il contient, dis-je, de plus des opérations particulières aux nombres rompus, qu'on appelle *les réductions*.

On a fait voir dans le Livre précédent * qu'une fraction & * 115.
un rapport étoient la même chose: que la fraction $\frac{2}{3}$, par exemple, étoit la même chose que le rapport de 2 à 3; car le rapport de 2 à 3 ne signifie autre chose, sinon, que le conséquent 3 étant conçu partagé en trois parties égales, l'antécédent 2 contient deux de ces parties: Mais en comparant ce rapport avec l'unité, qu'on conçoit partagée en autant de parties égales qu'en contient le dénominateur 3, le rapport lui-même $\frac{2}{3}$ contient deux de ces parties, dont l'unité ($= \frac{1}{3}$) en contient 3. C'est en ce sens que $\frac{2}{3}$ est une fraction. Cependant comme le rapport de 2 à 3 est le même que celui de $\frac{2}{3}$ à 1 ($= \frac{1}{3}$;) on peut dire que $\frac{2}{3}$, considéré comme rapport & comme fraction, est toujours la même grandeur. C'est la même chose de toute fraction $\frac{a}{b}$ exprimée en général par les lettres: cette fraction $\frac{a}{b}$, & le rapport de a à b ne sont qu'une même chose.

Enfin on a fait voir dans le Livre précédent * qu'une fra- * 116.
ction $\frac{a}{b}$ exprimoit la division du premier terme a par le second terme b ; & que la fraction $\frac{a}{b}$ étoit le quotient de a divisé par b .

Ainsi le calcul des fractions, des rapports, & des quotiens, (exprimez en fraction, dont le dividende est le premier terme, & le diviseur le second terme,) est le calcul des mêmes grandeurs.

Une grandeur littérale, soit incomplex comme a , ab , abc , &c. soit complexe comme $a^2 + 3ab + b^2$, est une grandeur entière, quand elle n'a pas de diviseur écrit au dessous. Mais $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2 + 3ab + b^2}{c}$, sont des fractions.

On remarquera aussi que quand une grandeur quelconque représentée par x , est écrite au devant d'une fraction vers la droite, comme $\frac{1}{2}x$, $\frac{2}{3}x$, $\frac{m}{n}x$, cette grandeur x est censée au numérateur de la fraction. Ainsi $\frac{12}{7} = \frac{1}{7}x$; $\frac{4}{5} = \frac{4}{5}x$; $\frac{16}{4} = \frac{4}{4}x$.

Et

AVERTISSEMENT.

LES Commençans doivent relire ici tout ce que l'on a expliqué des rapports & des proportions dans la première section depuis l'article 35 jusqu'à la fin de la première section. Au commencement de la 3^e section depuis l'article 72 jusqu'à 77, & au commencement de la 4^e section depuis l'art. 106 jusqu'à 125, & se rendre toutes ces choses très familières, comme on les a avertis en ces endroits-là.

I. THEOREME.

215. **LORSQUE** deux rapports numériques sont égaux comme $\frac{3}{4}$ & $\frac{6}{8}$, & pour les exprimer en général $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; celui de ces deux rapports dont l'antécédent est le moindre, a aussi son conséquent moindre que l'autre.

Démonstration. Il faut démontrer que si a est moindre que c , nécessairement b est moindre que d . Le conséquent b ne peut pas être égal au conséquent d ; car a moindre, par la supposition que c , auroit un moindre rapport à la grandeur b * que ne seroit celui de c à la grandeur d égale à b ; ce qui est contre la supposition. Il est encore moins possible que le conséquent b soit plus grand que d ; car le rapport de a * devenant plus petit à mesure que le conséquent avec lequel on le compare devient plus grand, si le rapport de a à une grandeur b égale à d , est déjà moindre que le rapport de c à d , à plus forte raison le rapport de a à une grandeur b plus grande que d , seroit plus petit que le rapport $\frac{c}{d}$. Donc le rapport $\frac{a}{b}$ étant supposé égal à $\frac{c}{d}$, si a est moindre que c , il faut nécessairement que b soit moindre que d . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

216. **P**ARMI tous les rapports numériques égaux, comme $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$, &c. Il y en a un seul, dans cet exemple, c'est $\frac{3}{4}$, dont l'antécédent est moindre (c'est à dire contient moins d'unités) que l'antécédent de chacun des autres, & dont le conséquent est moindre que le conséquent de chacun des autres. Car les deux termes de chaque rapport étant des nombres entiers, il ne peut pas se trouver plus d'un rapport

égal à chacun des autres, dont les deux termes contiennent chacun le plus petit nombre d'unités qu'il se puisse.

D É F I N I T I O N.

CELUI d'entre plusieurs rapports égaux qui a les moindres termes s'appellera le moindre rapport, le rapport réduit aux moindres termes, le rapport le plus simple, le rapport primitif, la fraction primitive.

C O R O L L A I R E II.

217. **T**OUT rapport ou toute fraction, dont l'unité est l'un des deux termes, est toujours un moindre rapport. Ainsi en supposant que n représente tel nombre entier qu'on voudra, $\frac{1}{n}$ & $\frac{n}{n}$ sont chacun un moindre rapport. Car en toute fraction qui sera égale à $\frac{1}{n}$ ou à $\frac{n}{n}$, il est évident que le terme correspondant à 1 sera toujours plus grand que 1; par conséquent le terme correspondant à n sera plus grand que n . * 215.

D'où l'on voit que tout nombre entier $\frac{n}{1}$, regardé comme une fraction, dont l'unité est le dénominateur, est toujours un moindre rapport. * 215.

C O R O L L A I R E III.

218. **T**OUS les rapports, d'une suite infinie de rapports égaux, sont égaux chacun au moindre rapport; & tous les rapports égaux au moindre rapport, sont égaux entr'eux. Car tous les rapports égaux sont des grandeurs égales, dont l'expression la plus simple est celle du moindre rapport qui leur est égal.

II. T H E O R È M E.

219. **D**ANS une suite infinie qu'on peut concevoir de rapports numériques égaux, nommant le moindre $\frac{a}{b}$, & chaque autre $\frac{c}{d}$ l'antécédent c de chaque rapport contient toujours exactement l'antécédent a du moindre rapport un certain nombre de fois qu'on nommera n , & le conséquent d du même rapport $\frac{c}{d}$ contient toujours exactement le conséquent b du moindre rapport le même nombre de fois n , c'est à dire $\frac{c}{d} = \frac{na}{nb}$.

Démonstration. Les deux termes du rapport $\frac{a}{b}$ étant plus grands que les termes correspondans du moindre rapport $\frac{c}{d}$, on peut ôter a de c , & b de d . Or qu'on ôte a de c une fois, deux fois, trois fois, & ainsi de suite autant qu'on le pourra;

Et ij

- 18. & qu'en même temps on ôte b de d une fois, deux fois, trois fois, ainsi de suite ; de manière que b soit retranché de d autant à chaque fois que a est retranché de c : il est évident * que les rapports $\frac{c-a}{c-2a}$, $\frac{c-2a}{c-3a}$, $\frac{c-3a}{c-4a}$, &c ainsi de suite, formez par les restes, seront tous égaux chacun au rapport $\frac{1}{2}$, & à son égal $\frac{1}{2}$. On va démontrer qu'après tous ces retranchemens on arrivera à un rapport formé par les derniers restes, qui sera précisément le moindre rapport $\frac{1}{2}$.

Car, 1°. le dernier reste ne sçauroit avoir ses termes plus grands que $\frac{1}{2}$, puisqu'on pourroit encore retrancher a de l'antécédent de ce reste, & b du conséquent de ce reste. 2°. Le dernier reste ne sçauroit avoir son antécédent plus petit que a , & son conséquent moindre que b , puisque si cela arrivoit, $\frac{1}{2}$ ne seroit pas le moindre rapport, celui que formeroient les derniers restes étant moindre que $\frac{1}{2}$; ce qui est contre la supposition. On arrivera donc nécessairement en retranchant a de c , & en même temps b de d le même nombre de fois, & continuant de faire ces retranchemens autant qu'on pourra, à un rapport qui sera le même que $\frac{1}{2}$. Par conséquent chacun des rapports égaux représentés par $\frac{1}{2}$ peut être représenté par $\frac{1}{2}$: *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I

220. **L**ES deux termes d'un rapport numérique quelconque qui n'est pas le moindre, ont toujours un diviseur exact n qui leur est commun.

COROLLAIRE II

221. $\frac{1}{2}$ étant un moindre rapport, & $\frac{1}{2}$ représentant chaque rapport égal à $\frac{1}{2}$, l'antécédent a est toujours un diviseur exact de c , & le conséquent b un diviseur exact de d . Et a est toujours contenu dans c autant de fois que b est contenu dans d .

AVERTISSEMENT.

ON peut étendre à autant de nombres qu'on voudra, ce qu'on vient de démontrer de deux nombres. Par exemple, autant de nombres entiers qu'on voudra, qui seront représentés par les lettres A, B, C, D , &c étant donnez, il est évident que les rapports qui sont entre ces nombres sont déterminés (on voit bien qu'il n'est pas nécessaire que ces rap-

ports soient égaux.) On n'en prendra que trois A, B, C , &c. et qu'on en dira dans le 3^e Theorème & ses Corollaires, pourra aisément s'appliquer à tant d'autres qu'on voudra.

III. THEOREME.

222. **LORSQUE** trois nombres entiers A, B, C , sont déterminez, & que trois autres, a, b, c , ont les mêmes rapports entr'eux qu'ont les trois A, B, C pris dans le même ordre, de maniere que ceux qui sont marquez par les mêmes lettres A, a , &c. soient ceux qui se répondent, si l'un des trois derniers comme a est moindre que le correspondant A des trois autres; b est aussi moindre que B , & c moindre que C .

Car les rapports de A, B, C étant déterminez, & les trois a, b, c ayant les mêmes rapports; il est évident * que a ne * 215. peut être moindre que A , que b ne soit aussi moindre que B , & c moindre que C .

COROLLAIRE I.

223. **TROIS** nombres entiers A, B, C étant déterminez, il ne peut y avoir que trois nombres a, b, c , qui soient les moindres qu'il se puisse, qui aient entr'eux les mêmes rapports, qu'ont entr'eux A, B, C .

COROLLAIRE II.

224. **TROIS** nombres étant donnez A, B, C , qui ont entr'eux trois rapports déterminez par ces nombres; si l'unité est l'un de trois nombres donnez, par exemple si $A = 1$; ils sont moindres que trois autres nombres entiers tels qu'ils puissent être, qui auront les mêmes rapports entr'eux qu'ont les trois nombres donnez, dont l'un est l'unité.

COROLLAIRE III.

225. **TROIS** nombres a, b, c , étant les moindres qui aient entr'eux les rapports qu'ils ont, si A, B, C représentent trois autres nombres qui ont les mêmes rapports; a est autant de fois contenu dans A , que b dans B , &c. que c dans C . Ainsi n représentant le nombre de fois que a est dans A , on a toujours $na = A$; $nb = B$; $nc = C$.

Ce Corollaire se démontre comme * le second Theorème. * 217.

COROLLAIRE IV.

226. **T**ROIS nombres entiers A, B, C n'étant pas les moindres qui aient les mêmes rapports, ils ont toujours un même diviseur commun n .

COROLLAIRE V.

227. a, b, c étant les moindres nombres entiers entre les nombres entiers qui ont les mêmes rapports, lesquels autres nombres entiers sont ici représentés par A, B, C ; ces trois moindres nombres a, b, c , sont chacun un diviseur exact de leur nombre correspondant; & chacun des trois moindres a, b, c est contenu le même nombre de fois dans son correspondant.

Tous ces Corollaires se déduisent évidemment du troisième Théorème, comme l'on a déduit les semblables propositions sur le moindre rapport, du I. Théorème.

DÉFINITION.

228. **U**N nombre qui n'a aucun diviseur exact que lui-même & l'unité, s'appelle un nombre *simple*, & encore un nombre *premier*. Ainsi 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, &c. sont des nombres premiers ou simples.

DÉFINITION.

229. **D**EU X ou plusieurs nombres s'appellent *premiers entr'eux*, lorsqu'ils n'ont aucun diviseur commun que l'unité. On nomme aussi le diviseur d'un nombre la *mesure* de ce nombre-là. Ainsi deux ou plusieurs nombres premiers entr'eux n'ont aucune autre mesure commune que l'unité. Par exemple 2 & 3 sont premiers entr'eux. 12 & 25 sont aussi premiers entr'eux: car quoique 12 & 25 aient chacun séparément des diviseurs, cependant ils n'en ont aucun de commun que l'unité.

COROLLAIRE.

230. **D**ET X nombres qui sont chacun un nombre premier, sont toujours premiers entr'eux; car chacun n'ayant aucun diviseur commun que lui-même & l'unité, ils ne peuvent avoir aucun diviseur commun.

DÉFINITION.

231. **D**EUX ou plusieurs nombres qui ont quelque diviseur commun, s'appellent *composés*, l'un par rapport à l'autre. Quand même un nombre seroit premier, s'il est lui-même un diviseur exact d'un ou de plusieurs autres; ce nombre premier & les autres dont il est diviseur, ne sont pas premiers entr'eux, mais ils sont des nombres composés. Ainsi 5 & 15 sont des nombres composés. 3 & 6 sont des nombres composés. 3, 6, 30 sont des nombres composés.

IV. THÉORÈME.

232. **L**ES deux nombres qui sont les termes d'un moindre rapport, sont premiers entr'eux: Et deux nombres premiers entr'eux sont toujours un moindre rapport.

Démonstration de la première partie. Car s'ils avoient un diviseur commun, en divisant chaque terme par ce commun diviseur, les deux quotients * auroient le même rapport, * 102. qui seroit pourtant en moindres termes. Ainsi le rapport proposé ne seroit pas un moindre rapport, ce qui est contre la supposition.

Démonstration de la seconde partie. Deux nombres, qui ne sont pas un moindre rapport, * ont toujours un diviseur commun: Donc deux nombres qui n'ont pas de diviseur commun, sont un moindre rapport.

REMARQUES.

233. **I**L y a aussi parmi les grandeurs littérales des grandeurs premières, des grandeurs premières entr'elles & des grandeurs composées. Une grandeur littérale, soit incomplexe comme a, b, c , &c. soit complexe d'une ou de plusieurs dimensions, comme les grandeurs linéaires $a + b; a - b, a + b - c$; les grandeurs de deux dimensions $a^2 + b^2, a^2 + ab + b^2 - c^2$; les grandeurs de trois dimensions $x^3 + a^3, x^3 - ax^2 + a^2b$, &c ainsi des autres; chacune de ces grandeurs littérales est nommée *première* ou *simple*, quand elle n'a aucun diviseur exact qu'elle-même ou l'unité, comme sont chacune des grandeurs qu'on vient de marquer.

Deux ou plusieurs grandeurs littérales incomplexes ou complexes, d'une seule dimension ou de plusieurs dimensions,

sont nommées *premières entr'elles*, quand elles n'ont aucun diviseur commun, &c que la moindre de ces grandeurs n'est pas un diviseur exact des autres. Ainsi a' & b' sont premières entr'elles. $a \div b = c$, & $a = b \div d$, sont premières entr'elles. $a' \div ab \div b'$, &c $a' = ab \div c'$, sont premières entr'elles.

Deux ou plusieurs grandeurs littérales sont composées, quand elles ont quelque diviseur commun. Ainsi a' & ab , qui ont a pour diviseur commun, sont composées. $a' = b'$, &c $a \div b$, qui ont $a \div b$ pour diviseur commun, sont composées.

AXIOMES sur les diviseurs des grandeurs.

1.

234. UNE grandeur (par exemple d) qui est un diviseur exact de chacune des parties ad , bd , cd d'un tout $ad \div bd \div cd$, est aussi un diviseur exact du tout $ad \div bd \div cd$.

2.

235. Un diviseur exact (qu'on représentera par d) d'une grandeur a , est aussi un diviseur exact de toute grandeur, dont a est un diviseur exact, c'est à dire, qui est multiple de a , comme de $2a$, $3a$, $4a$, en général de na , en supposant que n représente tel nombre entier qu'on voudra.

3.

236. Un diviseur exact d d'une grandeur entière $ad \div bd$, &c de l'une de ses deux parties ad , est aussi diviseur exact de l'autre partie bd .

4.

237. Un diviseur exact d d'un nombre a , est premier à l'égard de tout nombre b , avec qui a est un nombre premier. Car il est évident que si b avoit un diviseur commun avec d , il auroit un diviseur commun avec a , dont d est diviseur; ce qui est contre la supposition.

V. THEOREME.

238. SI un nombre c est premier à l'égard de chacun de deux autres a & b , ce nombre c & le produit ab des deux autres, sont premiers entr'eux.

Démonstration,

Démonstration. Si ab & c pouvoient avoir un diviseur commun d , que q soit le quotient de ab divisé par ce diviseur d commun à c & à ab . L'on en déduira $* ab = dq$; ce qui donnera $* \frac{a}{d} = \frac{q}{c}$. Mais c étant premier avec a par la supposition, d diviseur de c , & a , sont premiers entr'eux. Par conséquent $* \frac{a}{d}$ est un moindre rapport; d'où il suivra $* que c$ & b auront d pour diviseur commun. Mais cela détruit la supposition que c & b n'ont aucun diviseur commun. Par conséquent il ne se peut pas faire que c & le produit ab ne soient pas premiers entr'eux. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

239. Si les nombres a & b sont premier l'un & l'autre à chacun des nombres c & d ; les produits ab & cd sont premiers entr'eux.

Car a & b étant premiers avec c ; $* ab$ & c sont premiers entr'eux. Par la même raison a & b étant premiers avec d ; $* ab$ & d sont premiers entr'eux. Ainsi ab est premier avec c & avec d ; par conséquent $* ab$ & cd sont premiers entr'eux.

COROLLAIRE II.

240. Si deux nombres a & b sont premiers entr'eux, toutes les puissances $a^2, a^3, a^4, &c.$ du premier a n'ont aucun diviseur commun avec le second b , ni avec ses puissances.

Démonstration. Car a & b sont chacun par la supposition un nombre premier avec b ; donc $* a^2$ & b sont premiers entr'eux; par conséquent a^2 est premier à l'égard de b & de b^2 ; d'où il suit que $* a^2$ & b^2 sont premiers entr'eux. Il est évident qu'on peut continuer d'appliquer successivement cette démonstration à toutes les puissances de a & de b , & faire voir que a , & chacune de ses puissances, n'ont point de diviseur commun avec b , ni avec chacune des puissances de b .

COROLLAIRE III.

241. Les termes a & b d'un moindre rapport $\frac{a}{b}$, étant premiers entr'eux; chacun des rapports à l'infini $\frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^4}{b^4}, \frac{a^5}{b^5}$, en general $\frac{a^m}{b^m}$ (en supposant que m représente un nombre entier quelconque) dont les termes sont les semblables puis-

- * 132. lances de a & de b ; font * un moindre rapport; car les deux
 * 140. termes de chacun de ces rapports * sont premiers entr'eux.

COROLLAIRE IV.

242. **S**i $\frac{c}{d}$ est un moindre rapport, & que chacun des rapports
 * 141. égaux à $\frac{c}{d}$ soit représenté par $\frac{a}{b}$; le rapport $\frac{a^m}{b^m}$ (qui * est tou-
 jours un moindre rapport) formé de deux puissances du mê-
 me degré de a & de b , dont l'exposant est un nombre entier
 quelconque représenté par m , est égal au rapport $\frac{c^m}{d^m}$ des deux
 termes c & d élevez à la même puissance dont m est l'expos-
 ant.

Démonstration. a & b étant contenus, le premier dans c ,

- * 111. le second en d *, le même nombre de fois qu'on nommera n ;

- * 107. il est évident que $c = * an$, & $d = bn$. Ainsi $\frac{c}{d} = \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}$

- * 111. Par conséquent * $\frac{c^m}{d^m} = \frac{a^m n^m}{b^m n^m}$. Mais $\frac{a^m n^m}{b^m n^m} = * \frac{a^m}{b^m}$. Donc *

* 75. &

* 109. $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$.

COROLLAIRE V.

243. **S**i chacun des termes d'une fraction $\frac{c}{d}$ est une puissance nu-
 merique parfaite du même degré, par exemple, chacun un
 carré parfait a^2 ou une 3^e puissance parfaite a^3 , ou une 4^e a^4 ,
 ou en general a^n ; & que cette fraction soit égale à un nom-
 bre entier qu'on représentera par $\frac{c}{d}$; ce nombre entier sera ne-
 cessairement une puissance parfaite du degré de la puissance de
 chaque terme de la fraction.

Démonstration. Si la fraction numerique $\frac{c}{d}$ n'est pas un
 moindre rapport; que la fraction numerique $\frac{c}{d}$ soit le moi-
 dre rapport égal à $\frac{c}{d}$. (Si $\frac{c}{d}$ est un moindre rapport, ce que
 l'on va démontrer par rapport à $\frac{c}{d}$, conviendra aussi à $\frac{c}{d}$.)

- * 141. Puisque $\frac{c}{d}$ est un moindre rapport, $\frac{c^m}{d^m}$ * est aussi un moindre

- * 142. rapport. Mais $\frac{c^m}{d^m}$ * est égale à $\frac{a^m}{b^m}$ qui est égale par la suppo-
 sition au nombre entier $\frac{c}{d}$, & ce nombre entier $\frac{c}{d}$ est tou-

jours * un moindre rapport: ainsi $\frac{e^m}{n}$ qui est le même moins * 217.
 dre rapport, ne diffère point de * . Par conséquent f^m est * 216.
 l'unité, & $e^m = n$. Or e^m est la puissance parfaite d'un nom-
 bre entier e , laquelle puissance a pour exposant le nombre en-
 tier représenté par m . Le nombre entier n , égal par la sup-
 position à la fraction $\frac{e^m}{n}$, est donc une puissance numérique
 parfaite, dont l'exposant est m . Ce qu'il falloit démontrer.

Avertissement.

ON déduira de là, art. 305. & les suivans, la démonstra-
 tion qui fait voir qu'il y a des grandeurs incommensurables;
 quand on aura expliqué le calcul des grandeurs rompues.

COROLLAIRE VI.

244. SOIENT tant de nombres premiers qu'on voudra représen-
 tez par a, b, c, d , &c. Soit un autre nombre premier re-
 présenté par f ; le produit de tous les nombres premiers $abcd$,
 ou de telles puissances qu'on voudra de chacun de ces nom-
 bres premiers, qu'on peut représenter en general par $a^m b^n c^p d^q$,
 ne sauroit avoir, pour un de ses diviseurs exacts, aucun
 autre nombre premier, comme f , différent des nombres pre-
 miers qui composent le produit; ni aucune puissance f^r du
 nombre premier f .

Démonstration 1°. a, b & f étant chacun un nombre pre-
 mier; ab & f * sont premiers entr'eux. A présent ab , & le * 238.
 nombre premier c , sont premiers avec f . Ainsi * abc & f , * 238.
 sont premiers entr'eux. Enfin abc , & le nombre premier d ,
 sont premiers avec f , par conséquent * $abcd$ & f sont pre- * 238.
 miers entr'eux. 2°. a & a sont, par la supposition, premiers
 avec f ; par conséquent * a^2 & f sont premiers entr'eux: a^2 * 240.
 & a sont donc premiers avec f par conséquent a^3 & f sont
 premiers entr'eux. Il est facile d'étendre la démonstration à
 toutes les puissances de a & de f . Ainsi on peut supposer démon-
 tré, que a^m & f sont premiers entr'eux. 3°. a^m & b sont premiers
 avec f ; donc $a^m b$ & f sont premiers entr'eux. Ainsi $a^m b$ & b
 sont premiers avec f ; par conséquent $a^m b^2$ & f sont premiers
 entr'eux; & comme il est évident que la même démonstra-

Ff ij

tion peut s'étendre au produit de a^n par toutes les puissances de b , qu'on peut représenter par a^nb^n ; il est clair qu'on peut regarder comme démontré que a^nb^n & f sont premiers entr'eux. Ainsi a^nb^n , & le nombre premier c , sont premiers avec f ; par conséquent a^nb^nc & f sont premiers entr'eux. D'où l'on voit clairement que la démonstration convient au produit $a^nb^ncd^n$, par rapport à f , & aux puissances de f , & que $a^nb^ncd^n$ est premier avec f , & encore avec f^n . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE VII

245. Si deux nombres, représentés par a & b , sont premiers entr'eux; leur produit ab , est le plus petit de tous les nombres, qui ont a & b pour diviseurs exacts.

Démonstration. Si ab n'étoit pas le moindre nombre qui eût a & b pour diviseurs, il faudroit qu'il y eût un autre nombre, qu'on nommera c , qui fût moindre que ab , & qui eût a & b pour diviseurs. On va démontrer que ce nombre c , qu'on prétendrait supposer moindre que ab , est nécessairement plus grand que ab .

- Que le quotient de c divisé par a soit q ; & le quotient de c , divisé par b , soit r . On aura donc $*aq = c = br$. Ce qui donnera $*\frac{a}{b} = \frac{r}{q}$. Mais a & b étant premiers entr'eux, $\frac{a}{b}$ est $*$ un moindre rapport. Par conséquent $*a$ est un diviseur de r ; ainsi a est moindre que r . Par la même raison, b est moindre que q . Si donc l'on met dans $aq = br = c$, b à la place de q , & a à la place de r , l'on aura ab & ba chacun moindre que aq , & que br , c'est à dire, moindre que c . On a donc démontré que c est plus grand que ab .

COROLLAIRE VIII.

246. Le plus petit nombre, qu'on nommera d , qui a pour diviseurs exacts, les deux nombres a & b , est un diviseur exact de tout autre nombre, qu'on représentera par c , qui a pour diviseurs exacts a & b .

Démonstration. Puisque d est supposé le moindre nombre qui ait a & b pour diviseurs exacts; le nombre c , qui a aussi a & b pour diviseurs exacts, doit être plus grand que d , ainsi qu'on ôte d de c autant de fois qu'on pourra; si après le dernier retranchement l'on a zero pour reste, d est un diviseur

exact de c : ce qu'il falloit prouver. Si après la dernière soustraction, on trouve un reste, qu'on nommera r , qui doit être moindre que d , & que n marque le nombre de fois que l'on aura &c. d de c , l'on aura $*nd + r = c$. Mais a & b * 107.
 étant des diviseurs exacts de d & de c , a & b sont aussi des diviseurs exacts * de nd multiple de d , & * du reste r . Si donc * 235.
 ce reste r est moindre que d , le nombre r , moindre que d , * 236.
 aura pour diviseurs a & b : ce qui détruit la supposition qu'on a faite, que d étoit le plus petit nombre qui avoit pour diviseurs a & b . Il ne se peut donc pas faire que le plus petit nombre d , qui a pour diviseurs a & b , ne soit pas un diviseur exact de tout nombre c , qui a pour diviseurs a & b . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE IX.

247. QU'ON suppose telle suite de nombres qu'on voudra a, b, c, d , &c. qui soient premiers entr'eux; leur produit $abcd$ sera le plus petit nombre qui ait pour les diviseurs les mêmes nombres a, b, c, d .

Démonstration. Le moindre nombre qui aura pour diviseurs a, b, c , doit avoir pour diviseur * ab , qui * est le moindre nombre qui ait a & b pour diviseurs. Puis donc qu'il doit avoir ab & c pour diviseurs, & que ab & c * sont premiers entr'eux; il est évident que abc * étant le plus petit nombre qui ait ab & c pour diviseurs, il est aussi le plus petit nombre qui ait a, b, c pour diviseurs. * 246.
 * 247.
 * 248.
 * 249.

Il est évident qu'on peut appliquer cette démonstration par ordre aux produits $abcd, abcd, &c.$ des nombres $a, b, c, d, e, &c.$ qu'on suppose premiers entr'eux.

COROLLAIRE X.

248. LE moindre nombre, qui a pour diviseurs exacts tant de nombres a, b, c, d , qu'on voudra, est un diviseur exact de tout autre nombre, qui a les mêmes nombres pour diviseurs.

La démonstration est semblable à celle du 8^e Corollaire *. * 246,

REMARQUE.

249. LES propositions qu'on vient de démontrer sur les nombres, sont des axiomes par rapport aux grandeurs littérales; & les expressions littérales en font clairement voir la vérité.

PROBLÈME.

250. **T**ROUVER le plus grand diviseur commun de deux grandeurs numériques ou littérales.

Règle ou opération. Nommant la première celle des deux grandeurs qui est la plus grande, & l'autre la seconde, 1°. Il faut diviser la première qu'on nommera *A*, par la seconde qu'on nommera *B*. Si la division se peut faire exactement, la seconde grandeur *B* est évidemment le plus grand diviseur commun qu'on cherche.

2°. Si la division ne peut se faire sans un reste, qu'on nommera *C*; il faut négliger le quotient de la division, & diviser la seconde grandeur *B* par le reste *C*. Si la division est exacte, *C* est le plus grand diviseur commun qu'on cherche.

3°. Si la division laisse un reste *D*, il faut négliger le quotient, & diviser le premier reste *C* par le second *D*, & si la division laisse un reste *E*, diviser le second reste *D* par le troisième *E*, & continuer ainsi de diviser (en négligeant les quotients) le reste précédent par le suivant, jusqu'à ce qu'on trouve un reste qui fasse la division exactement. Ce reste sera le plus grand diviseur commun. Si l'on arrive à l'unité, & qu'on ne trouve que l'unité pour diviseur commun; les deux grandeurs proposées n'auroient pas d'autre diviseur commun que l'unité.

Exemples sur les grandeurs numériques.

I. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviseur commun de 35 & de 7. On divisera 35 par 7, & la division étant exacte, il est évident que 7 est le plus grand diviseur commun que l'on cherche.

II. EXEMPLE.

ON trouvera de même le plus grand diviseur commun de 255 & de 80. 1°. En divisant 255 par 80, on trouvera le quotient 3, qu'on négligera, & le reste 15. 2°. On divisera la seconde grandeur 80 par 15, & l'on trouvera le quotient 5, qu'on négligera, & le reste 5. 3°. On divisera le premier reste 15 par le second reste 5; & la division étant exacte, le second reste 5 est le plus grand diviseur commun de 255 & de 80 que l'on cherchoit.

III. E X E M P L E.

POUR trouver le plus grand diviseur commun de 6503 & de 3010, 1°. On divisera 6503 par 3010, on trouvera le quotient 2, qu'on négligera, & le reste 483. 2°. On divisera 3010 par le premier reste 483. On trouvera le quotient 6, qu'on négligera, & le reste 112. 3°. On divisera le premier reste 483 par le second reste 112; & l'on trouvera le quotient 4, qu'on négligera, & le reste 35. 4°. On divisera le second reste 112 par le troisième reste 35; & on trouvera le quotient 3, qu'on négligera, & le reste 7. Enfin on divisera le troisième reste 35 par le quatrième reste 7; & la division étant exacte, le dernier reste 7, qui est un diviseur exact du reste précédent, est le plus grand diviseur qu'on cherchoit.

Méthode pour les grandeurs littérales.

I. Pour les grandeurs incomplexes.

251. **R**EGLE. Quand les grandeurs sont incomplexes, il est inutile de suivre la règle du Problème; il suffit de prendre le produit de toutes les lettres communes à chacune des grandeurs, dont on cherche le plus grand diviseur commun; ce produit de toutes les lettres communes est le plus grand diviseur commun qu'on cherche.

Par exemple pour trouver le plus grand diviseur commun des deux grandeurs $a^2b^3c^4de$, $a^2bc^2d^2f$, il faut prendre le produit a^2bc^2d de toutes les lettres communes; il est évident que ce produit est le plus grand diviseur commun qu'on cherche.

II. Pour les grandeurs complexes.

252. **R**EGLE ou méthode. Il faut suivre la règle du Problème; mais les grandeurs littérales complexes ayant encore quelque chose qui leur est propre, on va mettre ici la méthode entière qui leur convient. Il faut d'abord ordonner les termes de chacune des grandeurs, dont on cherche le plus grand diviseur commun, par rapport à une même lettre. Quand ces grandeurs contiennent quelque lettre qui marque une grandeur inconnue, il faut les ordonner par rapport à cette lettre. Quand les lettres sont toutes connues, on peut ordonner les termes de ces grandeurs, par rapport

à celle des lettres qu'on voudra. On mettra dans les exemples les deux grandeurs complexes toutes ordonnées par rapport à la lettre qui en distinguera les termes, & cet article n'est que pour en avertir. 1°. Si les termes de chacune des deux grandeurs complexes sont tous multipliés par quelque grandeur littérale ou numérique, il faut les diviser tous par cette grandeur, qui en est un diviseur commun, & écrire à part ce diviseur commun, & quand on aura trouvé le plus grand diviseur commun des deux quotients, il faudra le multiplier par ce diviseur commun qu'on aura trouvé d'abord; & le produit fera le plus grand diviseur commun des deux grandeurs proposées.

2°. On nommera *A* celle des deux grandeurs proposées, qui doit servir de dividende dans la recherche du plus grand diviseur commun; *B*, celle qui doit servir de diviseur, *C*, le reste qu'on peut trouver après avoir divisé *A* par *B*; *D*, le reste qui peut se rencontrer après avoir divisé *B* par le premier reste *C*; & ainsi de suite. Quand on aperçoit, avant de diviser soit *A* par *B*; soit *B* par *C*, soit *C* par *D*, &c. que tous les termes du diviseur de quelqu'une de ces divisions sont multipliés par une même grandeur qui en est un diviseur commun, mais qui n'est pas en même temps un diviseur commun de tous les termes du dividende, & qui par conséquent ne doit pas entrer dans le plus grand diviseur commun; il faut toujours abréger l'expression du diviseur, en divisant tous ses termes par le diviseur qui leur est commun à tous, & prendre le quotient qui en viendra pour le diviseur. Quand ce sont tous les termes du dividende qui ont un diviseur commun entr'eux, mais qui n'est pas commun au diviseur, & qui par conséquent ne doit pas entrer dans le plus grand diviseur commun; on doit aussi abréger l'expression du dividende, en le divisant par le diviseur commun à tous les termes, quand cela n'empêche pas de faire la division de ce dividende par le diviseur, c'est à dire, quand ce diviseur commun à tous les termes du dividende, ne contient point la lettre qui en distingue les termes.

3°. Il faut diviser celle des deux grandeurs complexes proposées, dans laquelle la lettre, qui en distingue les termes, a le plus de dimensions dans le premier terme (qu'on a nommée *A*) par l'autre grandeur qu'on a nommée *B*; & si le
premier

premier terme de chacune de ces deux grandeurs complexes contient une égale puissance de la lettre qui distingue les termes, on prendra celle des deux qu'on voudra pour dividende A , & l'autre pour diviseur B . Si la division est exacte, la grandeur B , qui a servi de diviseur, sera elle-même le plus grand diviseur commun qu'on cherche.

Si la division de tous les termes du dividende ne se peut faire exactement, on la continuera toujours jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste C dans le x^{m} terme du quel reste C , la lettre qui distingue les termes, soit d'un moindre degré, que dans le premier terme du diviseur B . On négligera le quotient, & l'on divisera la grandeur B par le reste C . Si la division est exacte, le reste C est le plus grand diviseur commun qu'on cherche.

Si la division de B par le reste C donne un reste D ; on négligera le quotient, & on divisera le premier reste C par le second reste D ; & si la division laisse un reste E , on divisera le second reste D par le troisième E ; & l'on continuera de diviser ainsi le reste précédent par le suivant, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un reste qui divise exactement le précédent. Le dernier reste, qui sera un diviseur exact du précédent, sera le plus grand diviseur commun qu'on cherchoit.

4°. Si l'on arrive à un reste qui soit une grandeur simple ou première, c'est à dire, qui n'ait point d'autre diviseur qu'elle-même & l'unité; & que ce reste ne soit pas un diviseur exact du reste précédent, & que l'on n'ait pas trouvé par le premier article de diviseur commun à tous les termes de l'une & de l'autre des deux grandeurs proposées, elles n'ont point de plus grand diviseur commun que l'unité.

5°. Quand en faisant les divisions que prescrit cette méthode, on trouve une fraction pour quotient; il faut préparer le dividende de manière que la division donne une grandeur entière pour quotient. Voici comment se fait cette préparation. On efface du quotient qui est une fraction, dont le numérateur est le premier terme du dividende, & le dénominateur est le premier terme du diviseur; on efface, dis-je, les lettres communes, ou le diviseur qui est commun au numérateur & au dénominateur, * ce qui ne change point la valeur de la fraction. Ensuite on multiplie tous les termes du dividende par le dénominateur de la fraction, qu'on a

trouvée pour quotient, ainsi abrégée. Après cette préparation du dividende, on trouvera, en faisant la division, une grandeur entière pour quotient de cette division.

Quand on saura la division des fractions, qu'on expliquera dans la suite, on pourra faire la division sans cette préparation, laquelle néanmoins rend le calcul plus facile.

I. EXEMPLE.

Pour trouver le plus grand diviseur commun de $a^2b - a^2c$ & $adb - acd$, qui sont ordonnées par rapport à la lettre d . Voyant que a est un diviseur commun de ces deux grandeurs, je l'efface de tous les termes de l'une & de l'autre; & les deux grandeurs sur lesquelles je dois opérer, sont $a^2b - a^2c$ & $db - dc$. Et quand j'aurai trouvé leur plus grand diviseur commun, il faudra le multiplier par a , pour avoir le plus grand diviseur commun des deux grandeurs proposées.

$a^2b - a^2c$	diviseur commun
a	
$adb - acd$	plus grand
	diviseur commun
$ab - ac$	

1°. Je remarque que tous les termes du diviseur $db - dc$ ont d pour diviseur commun; mais n'étant pas un diviseur commun des termes du dividende $a^2b - a^2c$, il ne doit point entrer dans le plus grand diviseur commun. J'efface d , & la grandeur qui doit servir de diviseur est réduite à $b - c$. Je remarque aussi que a est un diviseur commun de tous les termes du dividende $a^2b - a^2c$, mais n'étant pas commun aux termes du diviseur, il ne doit pas entrer dans le plus grand diviseur commun; & comme ce diviseur a , commun à tous les termes du dividende, ne contient point la lettre b qui en distingue les termes, je divise le dividende $a^2b - a^2c$ par a , & le dividende est réduit à l'expression plus simple $a^2b - a^2c$.

2°. Je divise $a^2b - a^2c$ par $b - c$; & je trouve que la division est exacte. Ainsi $b - c$ est le plus grand diviseur commun de $a^2b - a^2c$, & de $b - c$; & le multipliant par le diviseur commun a aux deux grandeurs proposées trouvé par la première opération, le produit $ab - ac$ est le plus grand diviseur commun des deux grandeurs proposées $a^2b - a^2c$, $adb - acd$.

REMARQUE.

Si $b - c$ n'eût pas été un diviseur exact de $b^2 - c^2$; comme $b - c$ est une grandeur simple qui ne peut avoir de diviseur qu'elle & l'unité, les deux grandeurs proposées n'au-
roient point eu d'autre plus grand diviseur commun que a ,
que l'on a trouvé par le premier article de l'opération.

AVERTISSEMENT.

ON a mis dans ce premier exemple, qui est très simple, la pratique des deux premiers articles de la methode; afin que les Commençans les conçussent clairement, leur attention n'étant partagée par aucune autre chose.

II. EXEMPLE.

SOIT proposé de trouver le plus grand
diviseur commun de $a^2x^2 - c^2x^2 - a^2c^2 +$
 c^2 , & de $4a^2x - 4acx - 2ac^2 + 2c^2$, qui
sont ordonnées par rapport à la lettre x .
Appercevant que le premier terme de l'une
& l'autre de ces deux grandeurs complexes:
proposées, est une grandeur complexe; j'examine si la gran-
deur complexe $a^2 - c^2$ qui est multiplicateur de la plus haute
puissance x^2 de la premiere grandeur dans son premier terme,
n'est point un diviseur commun de tous les termes de la
premiere grandeur; je trouve qu'elle en est un diviseur exact:
mais pour voir si je dois diviser le dividende par ce diviseur
exact $a^2 - c^2$, je cherche si la même grandeur $a^2 - c^2$ ou
quelqu'un de ses diviseurs n'est point aussi un diviseur exact
de la seconde grandeur. Je vois d'abord que $a^2 - c^2$ n'est pas
elle-même un diviseur exact de la seconde grandeur, &
qu'ainsi $a^2 - c^2$ n'est pas un diviseur commun aux deux gran-
deurs proposées. Mais je cherche s'il n'y a point de diviseur
exact de $a^2 - c^2$ qui le soit aussi de la seconde grandeur pro-
posée. Et pour cela je cherche le plus grand diviseur com-
mun de $a^2 - c^2$, & de la grandeur $4a^2 - 4ac$, par laquelle
la plus haute puissance de x , qui est x même, est multipliée
dans le premier terme de la seconde grandeur proposée, &
je verrai ensuite plus facilement si ce plus grand diviseur

Gg ij

commun ou quelque'un de ses diviseurs, ne sera point aussi un diviseur commun des deux grandeurs proposées.

J'opère donc d'abord sur $a^2 - c^2$, & $4a^2 - 4ac$; & voyant que $4a^2 - 4ac$ a pour diviseur $4a$, qui n'est point un diviseur commun à $a^2 - c^2$, je la divise par $4a$, & elle devient $a - c$. Comme $a - c$ est une grandeur simple ou première, je cherche si elle n'est point un diviseur de $a^2 - c^2$, & trouvant, en faisant la division, qu'elle en est un diviseur exact, je cherche si chacune des deux grandeurs proposées $a^2x^2 - c^2x^2 - ac^2 + c^2$, & $4a^2x - 4acx - 2ac^2 + 2c^3$ peut se diviser exactement par $a - c$; & je trouve, en faisant les deux divisions, que $a - c$ en est un diviseur exact, que le quotient de la première est $ax^2 + cx^2 - ac - c^2$, & celui de la seconde $4ax - 2c^2$, j'écris à part le diviseur commun $a - c$.

Je cherche à présent le plus grand diviseur commun de $ax^2 + cx^2 - ac - c^2$, & de $4ax - 2c^2$. Mais je remarque que la première de ces grandeurs peut se diviser par $a + c$ qui n'est point un diviseur de la seconde. Je divise donc la première par $a + c$, & le quotient est $x^2 - c^2$. Je remarque aussi que la seconde $4ax - 2c^2$ peut se diviser par 2, & le quotient est $2ax - c^2$. Ainsi je cherche le plus grand diviseur commun de $x^2 - c^2$, & de $2ax - c^2$. Mais voyant que la grandeur $2ax - c^2$, qui doit servir de diviseur, est une grandeur première ou simple; & qu'elle n'est pas un diviseur exact de $x^2 - c^2$, cela me fait connoître que les deux grandeurs proposées n'ont pas d'autre plus grand diviseur commun que $a - c$ que j'ai trouvé d'abord.

AVERTISSEMENT.

ON a mis cet exemple pour faire voir aux Commencans, quand le premier terme de chacune des grandeurs complexes proposées est lui même une grandeur complexe, comment on réduit en pratique dans ce cas le premier article de la methode pour découvrir s'il n'y a point de diviseur commun à tous les termes de l'une & de l'autre des grandeurs proposées.

On va voir dans les exemples suivans la pratique du 3^e & du 5^e article de la methode.

III. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviseur commun de $x^3 - 4ax^2 + 11a^2x - 10a^3$, & de $x^3 - 3ax^2 + 11a^2x - 16a^3$, je divise la premiere par la seconde; je trouve le quotient 1 que je néglige, & le reste $-ax^2 - a^2x - 4a^3$. Je divise ce reste par $-a$, ce qui réduit ce reste à $x^2 + ax + 4a^2$.

Je divise la seconde grandeur proposée $x^3 - 3ax^2 + 6a^2x$ par ce reste $x^2 + ax + 6a^2$. Je trouve le quotient $x - 4a$ que je néglige, & le reste $-12a^2x - 12a^3 + 72a^4$. Je divise ce reste par $-12a^2$, & je le réduis par-là à $x^2 - ax + 6a^2$.

Je divise le premier reste $x^2 + ax + 4a^2$ par le second reste $x^2 - ax + 6a^2$, & la division étant exacte, le dernier reste $x^2 - ax + 6a^2$ est le plus grand diviseur commun qu'il falloit trouver.

IV. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviseur commun de $3x^3 - 12x^2 + 15x - 6$, & de $-12x^3 + 30x^2 - 18x + 18$. Je divise chacune de ces grandeurs par 3 qui en est un diviseur commun; la premiere est réduite à $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, & la seconde à $-4x^3 + 10x^2 - 6x + 6$. J'écris à part ce diviseur commun 3.

2°. Je divise la seconde grandeur $-4x^3 + 10x^2 - 6x + 6$ par 2 qui est un diviseur commun de tous ses termes, & elle est réduite à $-2x^3 + 5x^2 - 3x + 3$. Mais ce diviseur 2 de la seconde grandeur n'étant pas commun à la premiere, il ne doit point entrer dans le plus grand diviseur commun.

3°. Je divise la premiere grandeur réduite à $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ par $-2x^3 + 5x^2 - 3x + 3$. Mais le quotient étant $-\frac{x}{2} + \frac{5}{4}$, je multiplie, suivant le 5^e article de la methode, la premiere grandeur $x^3 - 4x^2$, &c. par le dénominateur -2 , & j'ai la premiere grandeur préparée $-2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$. Je la divise par la seconde grandeur $-2x^3 + 5x^2 - 3x + 3$; & je trouve d'abord le quotient $+x$: & continuant la division, parceque la puissance x^3 n'est pas moindre dans le dividende que dans le diviseur, je trouve pour second quotient la fra-

étion $\frac{1}{x}$. Ainsi, suivant le cinquième article, je prépare le dividende $\div 3x^2 - 7x + 4$, en le multipliant par le dénominateur -2 ; & j'ai le dividende préparé $-6x^2 + 14x - 8$, que je divise par le diviseur $-2x^2 + 5x - 3$, & je trouve le quotient 3 , & le reste $-x + 1$. Je néglige les quotients $x + 3$; & je divise la seconde grandeur proposée réduite à $-2x^2 + 5x - 3$ par le reste $-x + 1$. La division se fait exactement aussi multipliant par 3 le reste $-x + 1$, ou bien $+x - 1$ (en changeant les signes, ce qui ne change point le diviseur,) j'ai $-3x + 3$ ou $+3x - 3$, pour le plus grand diviseur commun, qu'il faut trouver.

V. EXEMPLE.

POUR trouver le plus grand diviseur commun de $x^3 - 2ax^2 - bx^2 + a^2x + 2abx - a^2b$, & de $-2ax^2 - bx^2 + 2a^2x + 4abx - 3a^2b$, je divise la première par la seconde; & trouvant pour premier quotient la fraction $\frac{x^3 - 2ax^2 - bx^2 + a^2x + 2abx - a^2b}{-2ax^2 - bx^2 + 2a^2x + 4abx - 3a^2b}$, je multiplie, suivant le cinquième article de la méthode, le dividende par le dénominateur $-2a - b$, & j'ai le dividende préparé $-2ax^3 - bx^3 + 4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2 - 2a^2x - 5a^2bx - 2ab^2x + 2a^2b + a^2b^2$.

Je le divise par la seconde grandeur $-2ax^2 - bx^2$, &c. & je trouve d'abord le quotient x ; & continuant la division, je trouve pour quotient la fraction $\frac{2a^2x + 4abx + 2a^2b}{-2ax^2 - bx^2}$; ainsi je prépare le reste du dividende, en le multipliant par le dénominateur $-2a - b$; ce qui me donne le dividende préparé $-4a^2x^2 - 2a^2bx^2 - 2ab^2x^2 - b^2x^2 + 4a^2x + 6a^2bx + 6a^2b^2x + 2ab^2x - 4a^2b - 4a^2b^2 - a^2b^2$. Je le divise par le diviseur $-2ax^2 - bx^2$, &c. & je trouve le quotient $2a + b$, & le reste $-2a^2bx + 4a^2b^2x - 2ab^2x + 2a^2b - 4a^2b^2 + 2a^2b^2$.

Je néglige les quotients x & $2a + b$, & je divise le reste précédent par $-2a^2b + 4a^2b^2 - 2ab^2$; ce qui le réduit à $x - a$. Et je divise la seconde grandeur $-2ax^2 - bx^2$, &c. qui a servi jusqu'ici de diviseur, par le reste qui a été réduit à $x - a$; la division se fait exactement; par conséquent le reste $x - a$ est le plus grand diviseur commun qu'il falloit trouver.

Préparation pour la démonstration.

Première. Seconde.

ON supposera que la première grandeur A B
 A numérique ou littérale étant divisée par
 la seconde B , l'on trouve le quotient m & $A = mB + C$
 le reste C . Ainsi $A = mB + C$, que la se- $B = nC + D$
 conde B , étant divisée par le premier reste $C = pD$
 C , on trouve le quotient n , & le reste D .
 Ainsi $B = nC + D$. Qu'enfin, en divisant le premier reste C
 par le second reste D , on trouve le quotient exact p ; ainsi
 $C = pD$. Il faut démontrer que D est le plus grand diviseur
 commun de A & de B .

Démonstration du Problème.

253. 1°. D est un diviseur commun de A & de B . Car D étant
 un diviseur de C , par la supposition, $*$ est un diviseur de nC 255.
 multiple de C ; & étant aussi diviseur de lui-même, il est di-
 viseur de $nC + D$; & par conséquent de $B = nC + D$.
 D $*$ est donc aussi diviseur de mB multiple de B ; & l'étant 255.
 de C , il est aussi diviseur de $mB + C$; & par conséquent
 de $A = mB + C$. Il reste à démontrer que D est le plus
 grand diviseur commun de A & de B .

2°. Le plus grand diviseur commun de A & de B , étant
 diviseur de $A = mB + C$, & de la première partie mB , qui
 est un multiple de B , est aussi diviseur $*$ de la seconde partie 256.
 C ; & par conséquent $*$ de nC multiple de C ; & nC étant la 255.
 première partie de $nC + D = B$, le plus grand diviseur
 commun de A & de B , doit être diviseur $*$ de la seconde 256.
 partie $+ D$. D'où l'on voit que le plus grand diviseur commun
 de A & de B doit nécessairement être un diviseur exact du
 dernier reste D ; c'est à dire du dernier reste qui divise exa-
 ctément le reste précédent.

Il faut donc que le plus grand diviseur commun de A &
 B , ne soit pas différent du dernier reste D , qu'on a démon-
 tré être un diviseur commun de A & de B ; puisqu'autre-
 ment D seroit un diviseur commun de A & de B , qui sur-
 passeroit le plus grand diviseur commun de A & de B . Ce
 qui détruiroit la supposition.

Démonstration pour le cas où il faut préparer le dividende.

254. **SUPPOSEZ**, qu'en divisant la première Première. Seconde.
 grandeur A par la seconde B , on trouve A B
 une fraction dont le dénominateur soit f , $fA = mB + C$
 *252. il faut, * par le cinquième article de la méthode, multiplier A par f , pour avoir le $gB = nC + D$
 dividende préparé fA . Qu'en divisant ensuite fA par B , on trouve le quotient m & le reste C ; l'on
 *257. aura * $fA = mB + C$. Divisant ensuite B par le reste C ,
 qu'on trouve une fraction dont le dénominateur soit g ; il
 faut multiplier B par g , pour avoir le dividende préparé gB .
 Divisant ensuite gB par C , que le quotient soit n , & le reste
 *257. D . L'on aura * $gB = nC + D$. Enfin que le dernier reste D
 soit un diviseur du précédent C , & que p marque combien
 *257. de fois D est dans C . Cela donnera * $C = pD$.

Il est évident que le plus grand diviseur commun de A & de B * est diviseur de fA , & par conséquent de $mB + C =$
 *255. fA . Il est aussi diviseur de * gB & de mB , & par conséquent
 *256. de * C . Il est donc aussi diviseur de * nC & de * D . Mais le
 *255. dernier reste D est supposé un diviseur exact de C , ainsi le
 *256. plus grand diviseur de A & de B , étant un diviseur de D ,
 il faut que D ne soit pas différent de ce plus grand commun
 diviseur de A & de B , ou du moins qu'il le contienne, &
 qu'il en soit un multiple; & s'il en étoit un multiple, il y auroit
 un commun multiplicateur de tous les termes. Ainsi en le
 divisant par ce commun multiplicateur de tous les termes,
 on auroit le plus grand diviseur commun de A & de B .

Enfin il est évident que quand, en cherchant le plus grand commun diviseur de A & de B , on trouve, par le premier article de la méthode, un diviseur commun de A & de B , il faut multiplier le plus grand diviseur commun, qu'on aura trouvé à la fin de l'opération, par ce commun diviseur trouvé par le premier article, & le produit sera le plus grand diviseur commun des deux grandeurs proposées.

L COROLLAIRE.

- *255. **DEUX** grandeurs numériques ou littérales étant divisées par le plus grand diviseur commun, les deux quotients n'ont plus aucun diviseur commun. Df.

Démonstration. Que A & B , étant divisez par leur plus grand diviseur commun D , les quotients soient E & F ; il faut démontrer que E & F n'ont aucun diviseur commun. Si E & F pouvoient avoir un diviseur commun, qu'on le nomme d , qu'on nomme m le quotient de E divisé par d ; & n le quotient de F divisé par d . D'où l'on aura $*md = E$, & $nd = F$. *107.
L'on a aussi $*ED = A$, & $FD = B$. En mettant md à la *107.
place de E dans $ED = A$, & nd à la place de F dans $FD = B$, l'on aura $mdD = A$, & $ndD = B$. Mais il est évident que $mdD = A$, & $ndD = B$ ont pour diviseur commun dD plus grand que D . Il s'ensuivroit donc, si les quotients E & F avoient un diviseur commun, que D ne seroit pas le plus grand diviseur de A & de B , ce qui détruiroit la supposition. Par conséquent E & F n'ont aucun diviseur commun.

COROLLAIRE II.

256. D'où il suit que deux grandeurs numériques ou littérales étant divisées par leur plus grand diviseur commun, les deux quotients * sont premiers entr'eux, & par conséquent * un *229.
moindre rapport. *232.

COROLLAIRE III.

257. TOUT diviseur commun de deux grandeurs numériques ou littérales, est aussi un diviseur du plus grand diviseur commun de ces deux grandeurs.

Démonstration. Il est évident par la démonstration du Problème * que tout diviseur des deux grandeurs A & B est diviseur de $mB + C = A$, de $*mB$, de $*C$, de $nC + D = B$, *253.
* de nC , & enfin * de D qu'on a démontré être le plus grand *235.
diviseur commun de A & de B . *236.
*255.
*236.

La proposition réciproque, que tout diviseur du plus grand diviseur commun de A & de B , est aussi un diviseur de chacune de ces grandeurs A & B , est évident par l'axiome de l'article 235.

PROBLÈME.

258. TROUVER le plus grand diviseur commun de trois grandeurs numériques ou littérales, A, B, C ; de quatre A, B, C, D ; & ainsi de suite.

Hh

* 250. 252. *Operation.* 1°. Il faut trouver * le plus grand diviseur commun de A & de B , on le nommera d . 2°. Il faut ensuite trouver le plus grand diviseur commun qu'on nommera e de d & de C : Et e sera le plus grand diviseur commun des trois grandeurs A, B, C . 3°. S'il y a quatre grandeurs A, B, C, D ; après avoir trouvé le plus grand diviseur commun e des trois A, B, C ; il faut trouver le plus grand diviseur commun f de e & de D : f sera le plus grand diviseur de A, B, C, D . On trouvera de même, en continuant l'opération, le plus grand diviseur de A, B, C, D, E ; de A, B, C, D, E, F , &c.

* 257. *Démonstration.* Il est évident * que le plus grand diviseur commun e , que fait trouver la méthode, est un diviseur commun de A, B, C . 1°. Le plus grand diviseur commun de A, B, C ,

* 257. * devant être un diviseur de d & de C , * est nécessairement

* 257. un diviseur de e . Par conséquent ce plus grand diviseur commun de A, B, C ne peut pas être différent de e ; puisqu'autrement e seroit un diviseur de A, B, C qui surpasseroit le plus grand commun diviseur de A, B, C ; ce qui détruiroit la supposition.

Cette démonstration peut aisément s'appliquer au plus grand diviseur commun f des quatre grandeurs A, B, C, D , que fait découvrir le Problème, au plus grand diviseur commun des cinq grandeurs A, B, C, D, E, F , &c. ainsi de suite.

COROLLAIRE I.

259. **T**ANT de grandeurs qu'on voudra A, B, C, D, E, F , &c. étant divisées par leur plus grand diviseur commun; les quotients n'ont plus entr'eux tous aucun diviseur commun.

La démonstration est semblable à celle de l'article 255.

COROLLAIRE II.

260. **T**ANT de grandeurs qu'on voudra, étant divisées par leur plus grand diviseur commun, les quotients sont les moindres grandeurs, * qui ayent entr'elles les mêmes rapports qui sont entre les dividendes

* 223 &
226.

COROLLAIRE III.

261. **T**OUT diviseur de tant de grandeurs qu'on voudra A, B, C , &c. est un diviseur du plus grand diviseur commun de ces grandeurs.

PROBLÈME.

262. **TROUVER** la plus petite grandeur numérique ou littérale, qui ait pour diviseurs deux grandeurs numériques ou littérales qui sont données.

Règle ou opération. Soient les deux grandeurs proposées numériques ou littérales représentées par A, B . 1°. Si A & B sont premières entr'elles, il faut prendre leur produit AB : ce sera * la plus petite grandeur qui ait A & B pour diviseurs. * 245.
2°. Si A & B ne sont pas premières entr'elles, il faut trouver * leur plus grand diviseur commun, qu'on nommera d : * 250, 251.
les diviser ensuite par ce diviseur commun, & trouver les quotients, qu'on supposera être a pour la première, & b pour la seconde, c'est à dire $\frac{A}{d} = a$; $\frac{B}{d} = b$. D'où l'on aura * $\frac{A}{a} = d$; $\frac{B}{b} = d$. Il faut enfin multiplier A par b , ou B par a , & l'on * 256.
aura $Ab = aB$: chacun de ces deux produits égaux sera le & 218.
plus petit nombre qui ait pour diviseurs A & B .

EXEMPLES.

POUR trouver le plus petit nombre qui ait pour diviseurs 5 & 7 qui sont premiers entr'eux; il ne faut que les multiplier l'un par l'autre, & leur produit 35 *, sera le plus petit nombre qui ait pour diviseurs 5 & 7. * 245.
De même le produit ab des deux grandeurs littérales a & b premières entr'elles *, est la * 245.
plus petite grandeur qui ait pour diviseurs a & b .

De même le produit $a^2 - ab \times a + b = a^2 - ab^2$ des deux grandeurs littérales $a^2 - ab$, & $a + b$ qui sont premières entr'elles, est * la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs * 245.
ces mêmes grandeurs.

Pour trouver le moindre nombre qui ait pour diviseurs 30 & 36; on cherchera leur plus grand diviseur commun, que l'on trouvera être 6. On divisera 30 par 6, & 36 par 6; & l'on aura les quotients 5 & 6, & on écrira ces deux fractions égales $\frac{5}{1} = \frac{6}{1}$ à côté l'une de l'autre. Enfin on multipliera en croix 30 par 6, ou 36 par 5, & chacun des produits égaux 180 & 180, sera le plus petit nombre qui ait pour diviseurs 30 & 36.

Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs les grandeurs littérales $a'b$ & ad : je les divise par leur plus grand diviseur commun a , & j'ai les quotients ab & d : j'écris $\frac{a'b}{ad} = \frac{b}{d}$ à côté l'une de l'autre, & je multiplie $a'b$ par d , ou ad par ab , & chacun des produits égaux $a'bd$, & $a'bd$, est la plus petite grandeur que je cherche.

Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs les grandeurs littérales $a^2 + b^2$ & $a^2 + 2ab + b^2$ & $a + b \times a - b = a^2 - b^2$ Je cherche leur plus grand diviseur commun $a + b$; je les divise chacune par $a + b$; & ayant trouvé les quotients $a + b$ & $a - b$, j'écris $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a + b}{a - b}$ Enfin je prens le produit $a^2 + 2ab + b^2 \times a - b$, ou $a^3 - b^3 \times a + b = a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3$, c'est la grandeur que je cherche.

263. *Démonstration.* Le premier article de la méthode a déjà été démontré * ; il faut démontrer le second. Soient A , B les grandeurs proposées, d leur plus grand diviseur commun ; a le quotient de A divisée par d ; b le quotient de B divisée par d . Il faut démontrer que Ab ou son égale aB , est la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs A & B . Supposé qu'il y en eût une autre plus petite, on la nommera C ; que le quotient de C divisée par A soit q ; & le quotient de C divisée par B soit r , on aura $C = Aq = Br$. On va démontrer que cette grandeur C , qu'on suppose plus petite que Ab ou aB , surpasse nécessairement chacune de ces grandeurs.

119. Puisque $C = Aq = Br$, l'on aura $\frac{a}{r} = \frac{q}{b} = \frac{C}{B}$. Mais
 118. $\frac{a}{r}$ est * un moindre rapport ; par conséquent a * est un divi-
 116. seur de r , & b est un diviseur de q : d'où il suit que a est
 221. moindre que r , & b moindre que q : mettant donc dans $C = Aq = Br$, a au lieu de r , & b au lieu de q ; on aura C plus grande que Ab & que aB . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

264. LA plus petite grandeur, qu'on nommera E , qui a pour diviseurs A & B , est un diviseur de toute autre grandeur, qu'on nommera F , qui a pour diviseurs A & B .

Car qu'on ôte autant de fois qu'il se pourra E de F , (laquelle F surpasse E par la supposition :) le reste, qu'on nommera R , sera ou égal à E , & dans ce cas E , sera un di-

viseur de F , *ce qu'il fallait démontrer*. Ou bien le reste R sera moindre que E ; & dans ce cas, que n marque le nombre de fois que l'on a pu ôter E de F ; on aura $nE + R = F$. Mais A & B , étant diviseurs de E par la supposition, seroient aussi diviseurs de nE ; & étant aussi diviseurs de $F = nE + R$; A & B seroient diviseurs de R . D'où il suivroit que R , qui auroit pour diviseurs A & B , seroit plus petite que E , ce qui détruiroit la supposition. Par conséquent E est égale à R , & E est un diviseur de F . *Ce qu'il fallait démontrer.*

PROBLÈME.

265. **TROUVER** la plus petite grandeur numerique ou litterale qui ait pour diviseurs tant de grandeurs numeriques ou litterales déterminées qu'on voudra.

Methode ou operation. Soient les grandeurs numeriques ou litterales données A, B, C, D , &c. 1°. Il faut trouver * la plus petite grandeur qu'on nommera E , qui ait pour diviseurs les deux premieres A & B . Si la troisième C est aussi un diviseur de E ; il est évident que E est la plus petite grandeur qu'on cherche, étant démontré que E est la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs A & B . 2°. Si E n'a pas C pour diviseur; il faut trouver * la plus petite grandeur qu'on nommera F qui ait pour diviseur E & C . Cette grandeur F sera la plus petite qui ait pour diviseurs A, B, C . 3°. Si l'y a quatre grandeurs A, B, C, D . Après avoir trouvé la plus petite grandeur F , qui a pour diviseurs les trois premieres A, B, C ; il faut voir si F a aussi pour diviseur la quatrième D ; car dans ce cas, F est la plus petite grandeur qu'on cherche. Mais si D n'est pas un diviseur de F , il faut trouver * la plus petite grandeur G , qui ait pour diviseurs F & la quatrième D . Et G sera la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs les quatre grandeurs A, B, C, D . On trouvera de même, en allant de suite, la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs cinq grandeurs données, six grandeurs, &c.

EXEMPLES.

POUR trouver le plus petit nombre qui ait pour diviseurs les nombres donnez 30, 36 & 45; on cherchera le plus petit

nombre 180 qui a pour diviseurs 30 & 36 : & 180 ayant aussi pour diviseur le troisième nombre 45, c'est le plus petit nombre qu'on cherche.

- Pour trouver le plus petit nombre qui ait pour diviseurs 30, 36 & 40 : 1°. Je cherche le plus petit nombre 180 qui ait pour diviseurs 30 & 36. 2°. 180 n'ayant pas 40 pour diviseur, je cherche * le plus petit nombre qui ait pour diviseurs 180 & 40, & je trouve 360. C'est le plus petit nombre que je cherche.

- Pour trouver la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2$. 1°. Je cherche * la plus petite grandeur $a^2 - b^2 \times a + b = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$ qui ait les deux premières pour diviseurs 2°. Cette grandeur n'ayant pas la troisième pour diviseur, je cherche la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, & la troisième $a^2 + b^2$, & je trouve $a^5 - a^3b^2 + a^2b^3 - b^5$. C'est la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs les trois grandeurs proposées.

- Démonstration du Problème.* Il faut démontrer que la grandeur F , que l'on trouve par le Problème, est la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs les trois grandeurs données A, B, C . 1°. Il est évident que E ayant pour diviseurs A & B , & étant elle-même un diviseur de F , aussi-bien que C , * les trois grandeurs A, B, C sont diviseurs de F . 2°. E * doit être un diviseur de toute grandeur qui aura A & B pour diviseurs. Ainsi la plus petite grandeur qui aura pour diviseurs A, B, C , ayant E pour diviseur, est nécessairement la grandeur F qui est la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs E & C . Ce qu'il falloit démontrer.

- Il est évident qu'on peut appliquer la même démonstration aux grandeurs G, H , &c. que le Problème fera découvrir pour les plus petites grandeurs qui aient pour diviseurs quatre grandeurs, cinq grandeurs, &c.

COROLLAIRE.

266. LA plus petite grandeur, qui a pour diviseurs tant de grandeurs données qu'on voudra, est un diviseur de toute autre grandeur qui a les mêmes grandeurs pour diviseurs.

Ce Corollaire est le même que dans l'article 248. On se

le met ici que pour faire remarquer qu'il n'est pas borné aux seules grandeurs numériques, & qu'il convient aussi aux grandeurs littérales.

PROBLÈME.

TROUVER tous les diviseurs d'une grandeur littérale ou numérique.

La méthode de résoudre ce Problème contient deux parties. 1°. Il faut trouver tous les diviseurs simples ou premiers de la grandeur proposée. 2°. Ayant tous les diviseurs premiers, il faut trouver tous les diviseurs composez de la grandeur proposée.

Première partie du Problème.

267. **P**OUR trouver tous les diviseurs premiers d'une grandeur, il faut la diviser d'abord par la grandeur première la plus simple dont elle peut être composée, & diviser le quotient par la même grandeur, & continuer de prendre la même grandeur pour diviseur des quotients, jusqu'à ce qu'elle ne puisse plus servir de diviseur exact. Il faut ensuite diviser le dernier quotient par une autre grandeur première; & continuer de diviser les quotients par la même grandeur première, jusqu'à ce qu'elle ne puisse plus servir de diviseur exact. Il faut continuer de diviser le dernier quotient par une troisième grandeur première; & le dernier quotient par une quatrième, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve un quotient qui soit lui-même une grandeur première: ce dernier quotient sera le dernier diviseur simple de la grandeur proposée. Il faut écrire à part tous les diviseurs premiers; & quand un même diviseur sert à plusieurs fois, il faut l'écrire autant de fois, qu'il a servi de diviseur exact: joindre à ces diviseurs le dernier quotient, & l'on aura tous les diviseurs premiers de la grandeur proposée.

I. E X E M P L E.

Sur une grandeur littérale incomplex, qui servira de formule pour trouver tous les diviseurs simples, & tous les composez.

POUR trouver tous les diviseurs premiers de $a^3b^2c^4d^5$. On divisera cette grandeur par le diviseur premier a ; & le quo-

tient $a^2b^2c^2d^2$ encore par a ; & le quotient $ab^2c^2d^2$ encore par a ; & a n'étant pas un diviseur exact du dernier quotient $b^2c^2d^2$, on divisera ce dernier quotient par le diviseur premier b ; & le quotient bc^2d^2 encore par b ; & b n'étant plus diviseur du dernier quotient c^2d^2 , on le divisera par c ; & le quotient c^2d^2 encore par c ; & le quotient cd^2 encore par c . Mais c n'étant plus un diviseur exact du dernier quotient d^2 , on le divisera par d ; & le dernier quotient d étant une grandeur première, ce sera le dernier diviseur premier de la grandeur proposée, dont tous les diviseurs premiers sont $a, a, a, b, b, c, c, c, d, d$.

On n'a mis cet exemple des grandeurs complexes, dont tous les diviseurs simples s'apperçoivent sans opération, que pour faire clairement concevoir la méthode, & pour servir de formule.

II. E X E M P L E.

Sur les diviseurs des nombres.

POUR trouver tous les diviseurs premiers de 441000; on divisera ce nombre par le diviseur premier 2; & le quotient 220500 encore par 2, & le quotient 110250 encore par 2; Le quotient 55125 ne pouvant plus se diviser sans reste par 2, on le divisera par le diviseur premier 3; & le quotient 18375 encore par 3. Le quotient 6125 ne pouvant plus se diviser par 3, on le divisera par un autre diviseur premier 5, & le quotient 1225 encore par 5; & le quotient 245 encore par 5. Le quotient 49 ne pouvant plus se diviser exactement par 5, on le divisera par un autre diviseur premier 7; & le quotient étant le nombre premier 7, c'est le dernier diviseur premier de 441000, dont tous les diviseurs premiers sont 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7.

Remarque pour les nombres.

ON remarquera sur les nombres que leurs diviseurs premiers ne sont pas toujours de suite les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, &c. Mais que dans la recherche de tous les diviseurs premiers, il faut tenter la division par les nombres premiers les plus simples; & quand ils ne réussissent pas, il faut prendre de suite pour diviseurs les nombres premiers suivant l'ordre naturel qui est entr'eux, n'allant de suite aux plus grands,

grands, qu'après avoir employé par ordre les plus petits.

Les Exemples suivans font sur les grandeurs litterales complexes.

AVERTISSEMENT.

IL faut toujours, avant l'opération, ordonner la grandeur complexe donnée par rapport à l'une des lettres qu'elle contient.

III. EXEMPLE.

SI l'on veut chercher tous les diviseurs premiers de $b^2a^2 - a^2b^2$; on verra d'abord que a, a, a, b, b , sont les diviseurs premiers incomplexes, & que le dernier quotient est $a^2 - b^2$ dont les diviseurs premiers sont complexes. On divisera ce quotient par le diviseur premier $a - b$, & l'on aura le quotient $a + b$, qui est aussi premier. Ainsi tous les diviseurs premiers qu'on cherchoit sont $a, a, a, b, b, a - b, a + b$.

IV. EXEMPLE.

SI l'on veut découvrir tous les diviseurs premiers de $b^2a^2 + b^2a^2 - b^2a^2 - b^2a^2$; on verra d'abord que les diviseurs premiers incomplexes qui multiplient tous les termes sont a, a, a, b, b , & que le dernier quotient est $a^2 + b^2a^2 - b^2a^2 - b^2$. On divisera ce quotient par le diviseur premier complexe d'une dimension $a + b$, & le quotient $a^2 - a^2b + 2ab^2 - 2a^2b^2 + ab^2 - b^2$ ne pouvant plus être divisé sans reste par $a + b$, on le divisera par $a - b$. Le quotient $a^2 + 2a^2b^2 + b^2$, ne pouvant plus être divisé par $a - b$, ni par aucun diviseur premier complexe d'une dimension, on le divisera par le diviseur premier complexe $a^2 + b^2$ de deux dimensions; & le quotient $a^2 + b^2$ étant une grandeur première, c'est le dernier diviseur simple de la grandeur proposée, dont tous les diviseurs premiers sont, $a, a, a, b, b, a + b, a - b, a^2 + b^2, a^2 + b^2$.

REMARQUE.

ON apperçoit d'abord tous les diviseurs premiers d'une grandeur litterale incomplexe; comme aussi tous les diviseurs premiers incomplexes qui multiplient tous les termes d'une grandeur litterale complexe. On trouve aussi facilement tous les diviseurs premiers d'un nombre, en allant de suite

des plus petits aux plus grands. Il n'y a de difficile que la recherche des diviseurs premiers complexes, soit d'une dimension, soit de plusieurs dimensions, d'une grandeur complexe littérale. Mais comme le plus grand usage de cette recherche est pour l'Analyse, l'on a donné les principales methodes pour découvrir ces diviseurs premiers complexes dans les trois premieres sections du 4^e Livre de l'Analyse démontrée, en particulier dans l'article 70. C'est le lieu où elles doivent être expliquées & démontrées. Les Lecteurs n'en ayant besoin que quand ils s'appliqueront à l'Analyse, & quand ils feront usage de cette science, on a cru qu'il seroit inutile d'arrêter ici les Commençans à ces methodes, qui ne leur seroient pas de grand usage dans la science du calcul, & qui détourneroiere l'application qu'ils doivent donner à bien apprendre les calculs qui leur sont nécessaires pour entendre l'Analyse & toutes les Mathematiques. De plus on ne sauroit démontrer exactement ces methodes de trouver les diviseurs premiers complexes, qu'en y employant les methodes de l'Analyse.

Seconde Partie du Problème.

268. **Q**UAND on a découvert tous les diviseurs premiers d'une grandeur numerique ou littérale, par la premiere partie du Problème; voici la methode pour trouver tous les diviseurs composez de la même grandeur. On l'appliquera à un exemple d'une grandeur littérale incomplex, pour servir de formule, & pour faire clairement concevoir la methode. Tous les diviseurs simples de $a^4b^3c^2d$ étant $a, a, a, b, b, c, c, d, d$, il faut écrire, dans un premier rang ou dans la premiere ligne, l'unité & toutes les puissances de suite de l'un des diviseurs premiers, (il n'importe lequel); mais pour se faire un ordre, il est bon de prendre, dans les grandeurs littérales, celle qui est des premieres de l'alphabet; & dans les nombres, le plus petit diviseur premier) jusqu'à celle qui a autant de degrés, que ce diviseur a servi de fois. Ainsi, dans l'exemple, le premier rang contient les diviseurs $1, a, a^2, a^3$. Il faut ensuite multiplier tous les diviseurs du premier rang par le second diviseur premier, qui est ici b , ce qui donne le second rang de diviseurs b, ab, a^2b, a^3b . Quand le second diviseur a servi plus d'une fois, & qu'il est repeté plusieurs fois, comme

* Voyez l'exemple à la page suivante.

E X E M P L E.

Grandeur dont il faut trouver tous les diviseurs.

$$a^2b^2c^2d^2$$

Les diviseurs simples.

$$1. a, a, a. b, b. c, c, c. d, d.$$

Tous les diviseurs de la même grandeur simples & composez dans l'ordre qu'on les trouve.

$$1^{\text{er}} \text{ rang. } 1, a, a^2, a^3.$$

$$2^{\text{e}} \text{ rang. } b, ab, a^2b, a^3b.$$

$$3^{\text{e}} \text{ rang. } c, ac, a^2c, a^3c.$$

$$4^{\text{e}} \text{ rang. } d, ad, a^2d, a^3d.$$

$$5^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b, ab^2, a^3b^2, a^2b^3, ab^3, a^3b^3.$$

$$6^{\text{e}} \text{ rang. } a^2c, ac^2, a^3c^2, a^2c^3, ac^3, a^3c^3.$$

$$7^{\text{e}} \text{ rang. } a^2d, ad^2, a^3d^2, a^2d^3, ad^3, a^3d^3.$$

$$8^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b^2, ab^2a, a^3b^2a, a^2b^3, ab^3a, a^3b^3a.$$

$$9^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b^2c, ab^2ca, a^3b^2ca, a^2b^3c, ab^3ca, a^3b^3ca.$$

$$10^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b^2d, ab^2da, a^3b^2da, a^2b^3d, ab^3da, a^3b^3da.$$

$$11^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b^2c^2, ab^2c^2a, a^3b^2c^2a, a^2b^3c^2, ab^3c^2a, a^3b^3c^2a.$$

$$12^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b^2cd, ab^2cda, a^3b^2cda, a^2b^3cd, ab^3cda, a^3b^3cda.$$

$$13^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b^2c^2d, ab^2c^2da, a^3b^2c^2da, a^2b^3c^2d, ab^3c^2da, a^3b^3c^2da.$$

$$14^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b^2c^2d^2, ab^2c^2d^2a, a^3b^2c^2d^2a, a^2b^3c^2d^2, ab^3c^2d^2a, a^3b^3c^2d^2a.$$

$$15^{\text{e}} \text{ rang. } a^2b^2c^2d^2c, ab^2c^2d^2ca, a^3b^2c^2d^2ca, a^2b^3c^2d^2c, ab^3c^2d^2ca, a^3b^3c^2d^2ca.$$

Grandeur numerique représentée par $a^2b^2c^2d^2$ dont on trouve tous les diviseurs de la même manière, en supposant les diviseurs simples numeriques représentés par les diviseurs simples listés.

$$441000 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3 \times 7^2$$

me ici b, b , il faut multiplier par ce même diviseur b , non les diviseurs du premier rang, mais les seuls diviseurs du rang précédent; ce qui donnera le 3^e rang b^2, ab, a^2b, a^3b .

Si b étoit repeté encore une fois , on multiplieroit par b le rang précédent , & non les autres.

Quand on passe au troisiéme diviseur premier c , il faut multiplier par c tous les rangs précédens ; ce qui fera le quatriéme rang des diviseurs , comme on le voit dans l'exemple . Il faut ensuite , à cause du troisiéme diviseur c repeté , multiplier par le second c , non les diviseurs de tous les rangs , mais les diviseurs du seul 4^e rang précédent . Et à cause du 3^e diviseur c repeté une 3^e fois , il faut encore multiplier par le 3^e c les diviseurs du 5^e rang précédent .

Le troisiéme diviseur c n'étant plus repeté , il faut passer au 4^e diviseur d , & multiplier par d les diviseurs de tous les rangs précédens , ce qui fera le 7^e rang ; il faut ensuite , à cause du 4^e diviseur d repeté deux fois , multiplier le seul 7^e rang précédent par le second d .

Comme il n'y a plus de diviseurs premiers , l'opération est finie ; & tous les diviseurs tant simples que composez sont ceux qu'on a trouvez , & qui occupent tous les rangs

S'il y avoit un plus grand nombre de diviseurs premiers , il faudroit , quand on arrive à chacun des diviseurs premiers , multiplier par ce diviseur premier tous les diviseurs de tous les rangs précédens ; mais quand le même diviseur premier est repeté plusieurs fois , il ne faut multiplier par ce diviseur à chaque fois qu'il est repeté , que les seuls diviseurs du rang qui précède .

REMARQUE.

L'ENONCE' de la methode & l'application que l'on en a faite en l'expliquant à trouver tous les diviseurs d'une grandeur litterale incomplexé , suffisent pour apprendre aux Commencans la maniere de découvrir eux-mêmes tous les diviseurs d'une grandeur numerique ou litterale , sans qu'il soit necessaire d'en mettre d'autres exemples . Ils pourroient s'exercer à trouver tous les diviseurs composez des exemples de la premiere partie du Probléme , dont tous les diviseurs premiers sont découverts .

Quand on a trouvé par la methode tous les diviseurs d'une grandeur , on peut ensuite , si l'on veut , les écrire suivant l'ordre de leurs dimensions , de façon que les diviseurs d'une dimension soient les premiers , ceux de deux dimensions les seconds , & ainsi de suite .

Démonstration du Problème. Il est évident * que le produit * 107.
de tous les diviseurs premiers, comme $a, a, a, b, b, c, c, c, d, d$ d'une grandeur proposée $a^3 b^2 c^3 d^2$, qui se découvrent par la première partie du Problème, est précisément la grandeur même proposée; & qu'ainsi * cette grandeur ne peut * 244.
pas avoir parmi les diviseurs, soit premiers soit composés, d'autres grandeurs premières, ni les produits, ni les puissances d'autres grandeurs premières. Tous les diviseurs composés de la grandeur proposée doivent donc être les produits des diviseurs premiers découverts par la première partie du Problème, & les puissances de ces diviseurs premiers. Mais il est évident qu'en suivant l'ordre prescrit par la méthode de la seconde partie du Problème, on découvre tous les diviseurs composés de la grandeur proposée, sans qu'il en manque un seul. Le Problème fait donc découvrir tous les diviseurs premiers & composés d'une grandeur proposée. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SECTION II.

Où l'on explique les réductions des grandeurs rompues.

PROBLÈME I.

269. **R**ÉDUIRE une fraction ou un rapport aux moindres termes; c'est à dire trouver la moindre fraction qui lui soit égale.

Si les deux termes de la fraction proposée sont premiers entr'eux, * elle est elle-même la moindre fraction. Si les deux * 231.
termes sont des grandeurs composées, voici la manière de les réduire aux moindres termes.

Opération. 1°. Il faut trouver * le plus grand diviseur com- * 250, 251
mun des deux termes de la fraction. 2°. Il faut diviser cha- & 252.
que terme par leur plus grand diviseur commun; & la fraction faite des deux quotients sera la moindre fraction qu'on cherchoit.

E X E M P L E S.

POUR réduire $\frac{216}{272}$ aux moindres termes: 1°. Je trouve le plus grand diviseur commun 16 des deux termes. 2°. Je di-

visé les deux termes par a^2c , & je fais des deux quotients la fraction $\frac{1}{2}$: c'est la fraction que je cherche.

Quand chaque terme de la fraction proposée est une grandeur littérale inconnue, il est visible qu'il ne faut qu'effacer les lettres communes aux deux termes, & que les lettres restantes sont la moindre fraction que l'on cherche.

Pour réduire la fraction $\frac{4}{7}$ aux moindres termes, il faut diviser les deux termes par leur plus grand diviseur commun 7, & l'on aura $\frac{1}{2}$ pour la moindre fraction.

Pour réduire $\frac{2}{5}$ aux moindres termes, il faut diviser les deux termes par leur plus grand diviseur commun 5, & l'on aura $\frac{1}{2}$ pour la moindre fraction.

Pour réduire la fraction $\frac{ab-ac}{ab+ac}$ aux moindres termes : 1°. Il faut trouver le plus grand diviseur commun $ab - ac$ des deux termes 2°. Diviser les deux termes par $ab - ac$, & écrire les quotients en fraction, & l'on aura $\frac{1}{1}$ pour la moindre fraction que l'on cherche.

- Démonstration du Problème.* 1°. La fraction que fait décou-
 • 109. vir le Problème * est égale à la proposée. 2°. Les deux ter-
 • 111. mes de la fraction, que l'on trouve par le Problème, * sont
 premiers entr'eux. Par conséquent le Problème fait décou-
 • 112. vir * la moindre fraction égale à la proposée. Ce qu'il falloit
 démontrer.

PROBLÈME II.

270. **R**ÉDUIRE deux fractions ou deux rapports à avoir un même dénominateur ou un même second terme, sans changer leur valeur.

Règle générale ou opération. Il faut multiplier les deux termes de chacune des fractions proposées par le dénominateur de l'autre ; les produits seront les fractions de même valeur réduites au même dénominateur. Cette règle est générale.

Règle qui abrège en des cas particuliers. 1°. Quand le dénominateur de l'une est un diviseur du dénominateur de l'autre, comme dans cet exemple $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, il faut multiplier par le quotient, qui vient de la division des dénominateurs, les deux termes de la fraction dont le dénominateur est le diviseur de l'autre dénominateur, & elle sera réduite à avoir le même déno-

minateur que l'autre fraction, sans que sa valeur ait été changée. Dans cet exemple, le quotient cd divisé par c est d . Il faut multiplier les deux termes de $\frac{1}{c}$ par le quotient d , & la fraction $\frac{d}{cd}$, sans avoir changé de valeur, aura le même dénominateur que l'autre fraction $\frac{a}{cd}$. 2°. Quand les dénominateurs des deux fractions ont un diviseur commun, comme $\frac{a}{cd}$, $\frac{b}{cf}$; il faut multiplier les deux termes de la première $\frac{a}{cd}$ par le quotient f qui vient de la division du dénominateur cf de la seconde par le diviseur commun c ; & multiplier de même les deux termes de la seconde $\frac{b}{cf}$ par le quotient d , qui vient de la division du dénominateur cd de la première par le diviseur commun c ; & les nouvelles fractions $\frac{af}{cd}$ & $\frac{bd}{cd}$ seront les fractions réduites au même dénominateur, sans que leur valeur soit changée.

E X E M P L E S.

POUR réduire les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$ au même dénominateur, il faut multiplier les deux termes de la première par le dénominateur 4 de la seconde, & multiplier les deux termes de la seconde par le dénominateur 3 de la première, & l'on aura les fractions $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, qui sont réduites au même dénominateur.

Pour réduire $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{5}$ au même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de la première par 5, & multiplier les deux termes de la seconde par 3, & l'on aura $\frac{5}{15}$ & $\frac{4}{15}$.

Pour réduire $\frac{1}{12}$ & $\frac{2}{3}$ au même dénominateur; on remarquera que le dénominateur 3 est un diviseur du dénominateur 12, & qu'en divisant 12 par trois le quotient est 4. Dans ce cas il faut seulement multiplier les deux termes de $\frac{2}{3}$ par 4, & l'on aura $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ qui a le même dénominateur que $\frac{1}{12}$.

Pour réduire $\frac{2}{3}$ & 4, qui est la même chose que l'entier 4, & $\frac{1}{3}$ à un même dénominateur, on remarquera que 1, dénominateur de la première, est diviseur de 3, dénominateur de la seconde, & que 3 est le quotient de 3 divisé par 1; & par conséquent qu'il faut multiplier les deux termes de la première par 3, dénominateur de la seconde, & l'on aura $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Pour réduire $\frac{2}{3}$ & 4, qui est la même chose que l'entier 4, & $\frac{1}{3}$ à un même dénominateur; on fera attention que le dé-

numérateur de la première est diviseur du dénominateur $a + b$ de la seconde, & que le quotient de $a + b$ divisé par 1 est $a + b$; & par conséquent qu'il faut multiplier les deux termes de $\frac{a}{1}$ par $a + b$, & l'on aura $\frac{a}{1} = \frac{a^2 + ab}{a + b}$.

Si l'on veut réduire $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - a}$ & $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - a}$ à un même dénominateur, on remarquera que les dénominateurs ont $a - b$, pour diviseur commun; que le quotient de $a^2 - b^2$ divisé par $a - b$ est $a + b$, & le quotient de $a^2 - a$ par $a - b$ est a ; c'est pourquoi on multipliera les deux termes de la première par a ; & les deux termes de la seconde par $a + b$, & l'on trouvera $\frac{a^3 - ab^2}{a^2 - a}$ & $\frac{a^3 - ab^2}{a^2 - a}$, qui ont un même dénominateur, & qui sont équivalentes aux fractions proposées.

Pour réduire les deux fractions $\frac{a}{1}$, $\frac{b}{2}$, au même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de la première par 2; & multiplier les deux termes de la seconde par b ; & l'on aura $\frac{2a}{2}$ & $\frac{b^2}{2}$.

AVERTISSEMENT.

IL est inutile de mettre ici des exemples fort composés, ne s'agissant que de faire clairement concevoir le Problème: les Commenceurs peuvent eux-mêmes faire tels exemples qu'il leur plaira.

- Démonstration du Problème.* Les fractions, que fait découvrir le Problème, n'étant que les fractions proposées dont
 * 75. les termes ont été multipliés, par une même grandeur, * elles ont les mêmes valeurs que les fractions proposées, & elles ont aussi chacune pour leur dénominateur commun, le produit des dénominateurs des fractions proposées quand on suit la règle générale; & il est évident qu'elles ont aussi toujours le même dénominateur dans la règle particulière qu'on a donnée pour abréger, dans les cas auxquels elle convient.

III. PROBLÈME.

271. *RÉDUIRE* tel nombre de fraction qu'on voudra, à avoir un même dénominateur, sans changer leur valeur.

Règle ou opération. Il faut multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres, les fractions faites des produits seront les fractions qu'on demande.

EXEMPLES.

E X E M P L E S.

POUR réduire $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ à un même dénominateur, sans changer leur valeur, il faut multiplier les deux termes de $\frac{1}{2}$ par le produit *de* des dénominateurs des autres; les deux termes de $\frac{2}{3}$ par *bf*; & les deux termes de $\frac{3}{4}$ par *bd*; & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{4f}{12f}$, $\frac{2d}{12d}$, $\frac{3b}{12b}$ égales aux proposées, & qui ont le même dénominateur.

Pour réduire $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ à un même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de $\frac{1}{2}$ par $4 \times 7 = 28$; les deux termes de $\frac{1}{3}$ par $2 \times 7 = 14$, & les deux termes de $\frac{1}{4}$ par $2 \times 4 = 8$; & l'on aura $\frac{7}{28}$, $\frac{2}{14}$, $\frac{1}{8}$.

Pour réduire les fractions $3 = \frac{1}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ à un même dénominateur, il faut multiplier les deux termes de $\frac{1}{1}$ par $3 \times 5 \times 7 = 105$; les deux termes de $\frac{2}{3}$ par $1 \times 5 \times 7 = 35$; les deux termes de $\frac{4}{5}$ par $1 \times 3 \times 7 = 21$; & les deux termes de $\frac{5}{7}$ par $1 \times 3 \times 5 = 15$, & l'on aura $\frac{105}{105}$, $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{75}{105}$.

Pour réduire les fractions $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ à un même dénominateur; il faut multiplier les deux termes de $\frac{a}{b}$ par $\frac{d \times f}{b}$, les deux termes de $\frac{c}{d}$ par $\frac{a \times f}{d}$, & les deux termes de $\frac{e}{f}$ par $\frac{a \times d}{f}$; & l'on aura $\frac{a \times d \times f}{b \times d \times f}$, $\frac{a \times c \times f}{d \times d \times f}$, $\frac{a \times d \times e}{f \times d \times f}$.

La démonstration de ce troisième Problème n'est pas différente de celle du second.

R E M A R Q U E.

272. **L**E second & le troisième Problème peuvent servir à faire connoître facilement le rapport qu'ont entr'elles deux ou plusieurs fractions ou rapports; car les ayant réduites à avoir le même dénominateur, elles ont *entr'elles les mêmes rapports * 116. que les numerateurs.

P R O B L È M E IV.

273. **R**ÉDUIRE deux fractions, trois fractions, en un mot, tant de fractions qu'on voudra, au même dénominateur qui soit le plus petit qu'il est possible, sans changer leur valeur.
Règle ou opération. 1°. Il faut réduire chacune des fractions * 169,

- * 165. proposées aux moindres termes. 2°. Il faut trouver * la plus petite grandeur qui ait pour diviseurs tous les dénominateurs des fractions proposées réduites aux moindres termes ; ce sera le dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut diviser cette plus petite grandeur, ou ce dénominateur commun, par le dénominateur de chacune des fractions réduites aux moindres termes, & multiplier le numérateur de chaque fraction réduite aux moindres termes par le quotient qui est venu de la division du dénominateur commun qu'on vient de trouver par le dénominateur de cette fraction réduite aux moindres termes ; les produits seront les numérateurs des fractions qu'on cherche.

E X E M P L E S.

Pour réduire $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, au même dénominateur qui soit le plus petit qu'il est possible ; 1°. Il faut les réduire chacune aux moindres termes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 10 qui ait pour diviseurs les deux dénominateurs 2 & 3 des moindres fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, & 10 sera le plus petit dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut diviser ce dénominateur commun par 2 dénominateur de $\frac{1}{2}$, & multiplier le numérateur de $\frac{1}{2}$ par le quotient 5 ; & l'on aura le numérateur de la première fraction qu'on cherche. Il faut de même diviser le dénominateur commun 10 par 3, dénominateur de $\frac{2}{3}$, & multiplier le numérateur de $\frac{2}{3}$ par le quotient 3, & l'on aura 4 pour le numérateur de la seconde fraction ; & les deux fractions qu'on cherchoit sont $\frac{5}{10}$ & $\frac{4}{10}$.

Pour réduire $\frac{1}{4}$ & $\frac{2}{5}$ au même plus petit dénominateur sans changer leur valeur, 1°. il faut les réduire aux moindres termes $\frac{1}{4}$ & $\frac{2}{5}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 30 qui ait pour diviseurs les deux dénominateurs 6 & 5, ce sera le plus petit dénominateur commun qu'on cherche. 3°. Il faut multiplier par le quotient 5 de 30 divisé par 6 le numérateur 1, & le produit 5 sera le numérateur de la première fraction. Il faut ensuite multiplier par le quotient 6 qui est venu de 30 divisé par 5, le numérateur 2 ; & le produit 12 sera le numérateur de la seconde fraction. Les deux fractions qu'on cherchoit sont $\frac{5}{30}$ & $\frac{12}{30}$.

Pour réduire $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$ au même plus petit dénomina-

teur, sans changer leur valeur; 1°. Il faut les réduire aux moindres termes $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$. 2°. Il faut trouver le plus petit nombre 210 qui ait pour diviseurs les dénominateurs 6, 5, 7. 3°. Ayant trouvé les quotients 35, 42, & 30 de 210 divisé par 6, 5, 7, il faut multiplier 5 par 35, 4 par 42, & 6 par 30; & les produits 175, 168, 180 seront les numérateurs qu'on cherche. $\frac{175}{210}, \frac{168}{210}, \frac{180}{210}$, sont les trois fractions qu'on cherchoit.

Pour réduire $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ au même plus petit dénominateur sans changer leur valeur; 1°. Il faut les réduire aux moindres termes $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$. 2°. Il faut trouver la plus petite grandeur cde qui ait pour diviseurs c, d, e ; ce sera le plus petit dénominateur qu'on cherche. 3°. Il faut diviser ce dénominateur commun cde par les dénominateurs c, d, e ; & multiplier par les quotients de, ce, cd , les numérateurs a, c, e , qui leur répondent; & les produits ade, c^2e, cd^2 seront les numérateurs qu'on cherche. Ainsi $\frac{ade}{cde}, \frac{c^2e}{cde}, \frac{cd^2}{cde}$, seront les fractions qu'on cherchoit.

Démonstration du Problème. Les fractions proposées qu'on peut représenter par $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ étant réduites aux moindres termes $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, n'ont pas changé de valeur. Or celles qu'on trouve par le problème, qui sont $\frac{ade}{cde}, \frac{c^2e}{cde}, \frac{cd^2}{cde}$ sont formées des fractions réduites aux moindres termes, en multipliant les deux termes de chacune par une même grandeur, & par conséquent elles leur sont égales. Les fractions, qu'on trouve par le Problème, sont donc égales aux fractions proposées. Il reste à démontrer que le dénominateur commun des fractions, que fait découvrir le Problème, est le moindre qui soit possible. Le plus petit dénominateur commun, auquel les fractions proposées peuvent être réduites, * doit avoir * 271. pour diviseurs les dénominateurs c, d, e , de ces fractions réduites aux moindres termes. Mais le commun dénominateur cde , que fait découvrir le Problème, * est la plus petite gran- * 265. deur qui ait pour diviseurs les dénominateurs c, d, e . Le Problème fait donc trouver le plus petit dénominateur auquel on puisse réduire les fractions proposées, sans changer leur valeur. Ce qu'il falloit démontrer.

V. PROBLÈME.

274 **RÉDUIRE** une fraction à avoir un dénominateur donné, sans changer sa valeur.

Par exemple, une toise contient six pieds; ainsi un pied est une sixième partie d'une toise: l'on a $\frac{2}{3}$ d'une toise; pour en découvrir la valeur en pieds, il faut réduire $\frac{2}{3}$ à une autre fraction qui ait 6 pour dénominateur, sans pourtant que la fraction $\frac{2}{3}$ d'une toise change de grandeur; & quand on aura trouvé cette autre fraction, que l'on verra dans la suite être $\frac{4}{3}$, on saura que $\frac{2}{3}$ d'une toise valent $\frac{4}{3}$ d'une toise, c'est à dire 4 pieds.

AVERTISSEMENT.

CE cinquième Problème est de grand usage dans la pratique de l'Arithmétique, dans laquelle réduire une fraction à avoir un dénominateur donné, sans changer sa valeur, s'appelle *évaluer une fraction*, & la pratique de cette réduction se nomme *l'évaluation d'une fraction*. On en va mettre la règle que l'on appliquera à plusieurs exemples, pour en faire voir l'usage dans la pratique.

Règle ou opération. 1°. Il faut multiplier le numérateur de la fraction proposée par le dénominateur donné. Par exemple, pour réduire $\frac{2}{3}$ d'une toise à avoir 6 pour dénominateur, il faut multiplier 2 par 6, ce qui donne 12.

2°. Il faut diviser le produit, qu'on vient de former, par le dénominateur de la fraction proposée; le quotient sera le numérateur de la nouvelle fraction, sous lequel il faut écrire le dénominateur donné. Dans l'exemple qu'on a pris, il faut diviser 12 par 3, & écrire le quotient 4 pour numérateur, & 6 pour dénominateur de la fraction qu'on cherchoit, qui est $\frac{4}{3}$.

3°. Quand la division marquée dans le second article donne pour quotient un entier & de plus une fraction; il faut écrire au numérateur l'entier, & cette fraction au devant de l'entier en plus petits chiffres, & le dénominateur donné au dessous de ce numérateur composé d'un entier & d'une fraction. On verra, dans les exemples, l'usage qu'on fait de cette fraction du numérateur, quand il y en a une.

E X E M P L E S.

POUR voir combien la fraction $\frac{2}{3}$ d'un écu, (en supposant que l'écu est de 60 sols) vaut de sous ; il faut réduire la fraction $\frac{2}{3}$ d'un écu à avoir pour dénominateur 60, sans changer de valeur ; ainsi il faut multiplier le numérateur 2 par le dénominateur donné 60, & diviser le produit 120 par 3, & écrire le quotient 40 pour le numérateur de la fraction qu'on cherche, & 60 pour son dénominateur, & la fraction qu'on cherche est $\frac{40}{60}$ d'un écu, c'est à dire 40 sous.

Pour réduire $\frac{1}{2}$ d'une toise à avoir 6 pour dénominateur, ce qui fera connoître combien la fraction $\frac{1}{2}$ vaut de pieds ; 1°. Il faut multiplier 4 par 6. 2°. Diviser le produit 24 par le dénominateur 7 de la fraction $\frac{1}{2}$. 3°. Ecrire le quotient 3 $\frac{1}{7}$ pour le numérateur de la fraction qu'on cherche, à laquelle il faut donner 6 pour dénominateur, & cette fraction sera $3\frac{1}{7}$.

R E M A R Q U E S.

1.

LA fraction $3\frac{1}{2}$ contenant l'entier 3, qui vaut trois sixièmes d'une toise ou trois pieds, & de plus trois septièmes d'une sixième de toise, c'est à dire $\frac{3}{2}$ d'un pied ; il faut réduire la fraction $\frac{3}{2}$ d'un pied en pouces, en la réduisant, sans changer sa valeur, à une autre fraction qui ait 12 pour dénominateur, parcequ'un pouce est une douzième d'un pied. Ainsi il faut multiplier par 12 le numérateur 3 de $\frac{3}{2}$ d'un pied, & diviser le produit 36 par 2 ; écrire le quotient 18 pour le numérateur de la fraction qu'on cherche, à laquelle on donnera 12 pour dénominateur, & cette fraction, qu'on cherche, sera $5\frac{1}{2}$ d'un pied, c'est à dire 5 pouces & $\frac{1}{2}$ d'une douzième d'un pied, c'est à dire $\frac{1}{2}$ d'un pouce.

On peut de même réduire la fraction $\frac{1}{2}$ d'un pouce en lignes, en lui donnant, sans changer sa valeur, pour dénominateur 12 ; parcequ'une ligne est la douzième partie d'un pouce. On multipliera donc par 12 le numérateur 1 de la fraction $\frac{1}{2}$ d'un pouce ; on divisera le produit 12 par le déno-

minateur 7 de $\frac{1}{2}$ d'un pouce ; on écrira 1 $\frac{1}{2}$ pour le numérateur de la nouvelle fraction , & 12 pour son dénominateur ; & l'on aura 1 $\frac{1}{2}$ d'un pouce pour la fraction équivalente à $\frac{1}{2}$

d'un pouce ; c'est à dire une douzième de pouce ou une ligne , & de plus $\frac{1}{2}$ d'une ligne ou d'une douzième de pouce. Ainsi la fraction $\frac{1}{2}$ d'une toise vaut $\frac{1}{2}$ d'une toise + $\frac{1}{12}$ d'un pied + $\frac{1}{12}$ d'un pouce , & elle vaut encore de plus $\frac{1}{2}$ d'une douzième d'un pouce ; c'est à dire la fraction $\frac{1}{2}$ d'une toise vaut 3 pieds 5 pouces 1 ligne & $\frac{1}{2}$ d'une ligne.

D'où l'on voit que le cinquième Problème sert , quand on a une fraction de quelque grandeur sensible comme d'une longueur , à trouver la valeur de cette fraction exprimée par les mesures ordinaires de cette grandeur jusqu'à la plus petite.

2.

275. Quand en faisant ces réductions on ne trouve pas une valeur exacte comme dans l'exemple précédent , où l'on voit qu'il reste encore $\frac{1}{2}$ d'une ligne , on néglige d'ordinaire la fraction restante qui est moindre que la plus petite espèce ou la plus petite mesure ; dans l'exemple précédent on néglige $\frac{1}{2}$ d'une ligne comme une grandeur insensible.

Cependant, pour rendre cette erreur la moins sensible qu'il se puisse , on remarque si la fraction est moindre que la moitié d'une mesure de la dernière espèce , ou si elle est plus grande , ce que l'on reconnoît par la comparaison du numérateur de la dernière fraction à son dénominateur . Car si le numérateur est moindre que la moitié du dénominateur , la fraction est moindre que la moitié d'une dernière espèce : s'il surpasse cette moitié comme dans $\frac{1}{2}$ d'une ligne , cette fraction est plus grande que la moitié d'une ligne. Dans le cas où la dernière fraction est moindre que la moitié , on néglige ordinairement cette dernière fraction : dans le cas où elle surpasse la moitié , on ajoute une unité afin que l'erreur soit plus petite . Ainsi on écrit pour la valeur de $\frac{1}{2}$ d'une toise , 3 pieds , 5 pouces , 2 lignes.

Usages du Problème cinquième dans les grandeurs décimales.

I. U S A G E.

276. QUAND on a une fraction quelconque, comme $\frac{1}{2}$ d'une grandeur, on peut la réduire en parties décimales par ce Problème. 1°. Il faut ajouter au numérateur autant de zeros qu'on voudra; plus on en met &c plus l'erreur est insensible, quand la division ne peut pas se faire sans qu'il reste une fraction. Cette addition de zeros est la même chose * que de multiplier le numérateur par l'unité précédée d'autant de zeros qu'on en ajoute au numérateur. 2°. Il faut diviser ce numérateur précédé de ces zeros par le dénominateur, & le quotient est la fraction proposée réduite en parties décimales. 3°. Si le numérateur de la fraction proposée surpassoit le dénominateur, elle contiendrait un nombre entier, par exemple $\frac{5}{4}$. Dans ce cas il faudroit écrire dans le quotient, à la droite du nombre entier du quotient, le point qui distingueroit l'entier d'avec les parties décimales, & écrire au devant de ce point, en allant de gauche à droite, toutes les parties décimales du quotient. Mais si le numérateur de la fraction proposée est moindre que le dénominateur, il faut d'abord écrire au quotient 0 pour marquer le lieu des entiers; un point à la droite de ce zero pour distinguer les parties décimales; & écrire au devant de ce point, en allant vers la droite, tout le quotient à mesure qu'on le trouve.

Ainsi pour réduire $\frac{1}{9}$ en parties décimales, 1°. on ajoutera, par exemple, cinq zeros au numérateur pour réduire la fraction en cent millièmes. 2°. On divisera 500000 par 9, & l'on écrira 0 à la première place du quotient pour marquer le lieu des entiers, un point à la droite de ce 0, pour distinguer les parties décimales, & le quotient à mesure qu'on le trouvera au devant de ce point en allant vers la droite, & l'on aura 0.55555 pour la fraction proposée $\frac{1}{9}$ réduite en cent millièmes.

L'on trouve à la fin de cette division un reste, qui est 5 à diviser par 9, ce qui vaut cinq neuvièmes d'une cent millième; comme ce reste surpasse la moitié d'une cent-millième

partie, on ajoute une unité au dernier chiffre, afin que l'erreur soit plus insensible; ainsi $\frac{1}{2} = 0.55556$.

II. USAGE.

277. **L**E calcul des parties décimales est moins embarrassant que celui des fractions ordinaires, ce calcul étant le même que celui des nombres entiers; c'est la raison pourquoi dans la pratique on se sert du calcul décimal, mais quand on a trouvé la grandeur que l'on cherchoit exprimée en parties décimales; on veut savoir quelle est la valeur exprimée par les mesures ordinaires. C'est à quoi sert aussi ce cinquième Problème. Par exemple, on aura trouvé dans un calcul 0.55556 de toise, on veut savoir combien cette grandeur, qui est moindre qu'une toise, vaut de pieds, de pouces &c. de lignes. Il faut regarder la grandeur décimale * comme une fraction $\frac{55556}{100000}$, dont le dénominateur est l'unité précédée d'autant de zéros qu'il y a de rangs de parties décimales, & la réduire à une fraction équivalente, qui ait pour dénominateur le nombre qui exprime combien de fois la mesure à laquelle on veut la réduire est contenue dans la mesure principale, de la manière que le prescrit le cinquième Problème; c'est à dire, si la fraction décimale exprime des parties décimales de toises, il faut la réduire au dénominateur 6; afin de la réduire à des pieds qui sont des sixièmes de toise, la toise étant la mesure principale. Ainsi il faut multiplier les parties décimales 0.55556 par 6; diviser le produit 3.33336 par le dénominateur sous-entendu 100000 de la fraction proposée; ce qui se fait simplement, en retranchant vers la droite autant de rangs du produit qu'il y avoit de rangs de parties décimales dans le numérateur de la fraction proposée, dans cet exemple, il faut retrancher cinq rangs, & le quotient sera 3. Enfin il faut écrire $\frac{1}{2}$ de toise $\rightarrow 0.33336$ d'une sixième de toise. C'est à dire 3 pieds & 0.33336 de pied.

Pour réduire 0.33336 de pied en pouces qui sont des douzièmes d'un pied, un pied étant la mesure principale par rapport aux pouces; 1°, il faut multiplier 0.33336 par 12; 2°, retrancher cinq rangs du produit 4.00032, l'on aura $\frac{1}{2}$ d'un pied $\rightarrow 0.00032$ d'une douzième de pied ou d'un pouce; c'est à dire 4 pouces 0.00032 d'une douzième de pied ou d'un

d'un pouce. Comme la fraction qui reste ne vaut pas une ligne, on la néglige.

Dans la pratique, la réduction des grandeurs décimales aux mesures ordinaires des grandeurs sensibles, se fait très aisément. On ne fait que la multiplication de la grandeur décimale par le nombre qui exprime combien de fois la mesure, à laquelle on veut réduire la grandeur décimale, est contenue dans la mesure plus grande qui la précède immédiatement : & ce qui se trouve de grandeurs entières dans le produit qui vient de cette multiplication, est le nombre qu'on cherche.

Par exemple, pour réduire 0.55556, qui exprime les parties décimales d'une toise, en pieds; ensuite en pouces, & enfin en lignes. 1°. On multiplie ce nombre décimal par 6, qui exprime qu'un pied est 6 fois dans une toise; on trouve le produit 3.33336, dans lequel la grandeur entière 3, marque que le nombre proposé contient 3 pieds; & de plus la fraction 0.33336 qui contient les parties décimales d'un pied. 2°. Pour la réduire en pouces, on la multiplie par 12; on trouve le produit 4.00032, dans lequel la grandeur entière 4 marque que la fraction 0.33336, qui contient les parties décimales d'un pied, vaut 4 pouces; & de plus la fraction 0.00032, qui contient les parties décimales d'un pouce. 3°. Enfin pour réduire cette dernière fraction en lignes, on la multiplie par 12, & l'on trouve le produit 0.00384. Ce produit n'ayant pas de grandeur entière, la fraction décimale 0.00032, ne vaut pas une ligne entière; elle contient seulement autant de parties décimales d'une ligne, qu'en exprime le nombre décimal 0.00384. Ainsi le nombre décimal proposé 0.55556, qui contient les parties décimales d'une toise, étant réduit aux mesures ordinaires de la toise, vaut 3 pieds, 4 pouces & 0.00384 d'une ligne: on néglige dans la pratique cette fraction, qui est plus petite que la moitié d'une ligne.

Quand la dernière fraction décimale qu'on néglige surpasse la moitié d'une unité, c'est à dire, quand le chiffre qui est immédiatement à la droite du point qui sépare les parties décimales, surpasse 5; on ajoute 1 à l'entier du dernier quotient. Quand elle est moindre, on la néglige; quand elle est égale à la moitié d'une unité, on peut ajouter ou ne pas

ajouter une unité au dernier quotient, l'erreur étant égale, soit qu'on ajoute une unité, soit qu'on ne l'ajoute pas.

Par exemple, si dans une dernière réduction on trouvoit 3. 72048, on ajouterait 1 à l'entier 3, & on prendroit 4 pour la grandeur entière, qui est de très peu de chose plus grande qu'il ne faut. Si la dernière fraction étoit 3. 42048, on prendroit seulement la grandeur entière 3, & on négligeroit le reste. Enfin, si la dernière fraction étoit 3. 52048, on pourroit prendre seulement la grandeur entière 3, & négliger le reste; ou bien ajouter 1 à l'entier 3, & prendre la grandeur 4 qui seroit de très peu de chose plus grande qu'il ne faut.

Démonstration du cinquième Problème. On remarquera que l'on n'a mis dans la règle du Problème que les opérations nécessaires dans la pratique; & qu'il faut concevoir dans le premier article qu'on multiplie le numérateur & le dénomina-

- * 71. teur de la fraction proposée par le dénominateur donné, * ce qui donne une seconde fraction équivalente: & que dans le second article il faut entendre qu'on divise le numérateur & le dénominateur de la seconde fraction équivalente, cha-
- * 109. cun par le dénominateur de la fraction proposée, * ce qui donne une troisième fraction équivalente à chacune des deux précédentes, à laquelle il reste pour le second terme le dénominateur donné. Ainsi pour réduire $\frac{1}{2}$ d'une toise en pieds ou sixièmes de toises, l'on doit concevoir que la première opération donne la seconde fraction équivalente $\frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{1 \times 6}{12} = \frac{6}{12}$; & que la seconde opération donne la troisième fra-
- * 109. ction $\frac{1 \times 6}{12 \times 6} = \frac{1}{12}$ * qui est équivalente à chacune des deux premières. D'où il suit que le Problème fait découvrir une fraction nouvelle, égale à la proposée, & qui a pour second terme le dénominateur donné. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Quand on trouve que le numérateur de la nouvelle fraction qu'on cherche contient un entier & une fraction, (comme si l'on vouloit réduire $\frac{1}{2}$ de toise en sixièmes de toise, on trouveroit $3\frac{1}{6}$) il est évident que l'entier 3 exprimant trois sixièmes d'une toise, la fraction $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$, exprime six huitièmes ou trois quarts d'une sixième de toise.

PROBLÈME VI.

173. **R**EDUIRE une grandeur entiere à une fraction equivalente qui ait un dénominateur donné.

Ce Problème est contenu dans le précédent, & on en a déjà vu des exemples dans le second Problème. Mais à cause de son grand usage dans les calculs, on s'est déterminé à le mettre en particulier.

Règle. Il faut prendre le produit de l'entier proposé par le dénominateur donné, pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & écrire pour son dénominateur le dénominateur donné.

E X E M P L E S.

POUR réduire 25 entiers en quatrièmes, ou à une fraction qui ait 4 pour dénominateur; il faut multiplier 25 par 4, & écrire le produit 100 pour le numerateur de la fraction qu'on cherche, & 4 pour dénominateur.

Pour réduire l'entier b à une fraction qui ait a pour dénominateur, il faut écrire $\frac{ab}{a}$.

Pour réduire $a \div b$ à une fraction qui ait $c \div d$ pour dénominateur, il faut multiplier $a \div b$ par $c \div d$; & écrire le produit pour premier terme de la fraction qu'on cherche, à laquelle on donnera $c \div d$ pour second terme, cette fraction sera $\frac{ac \div bd}{c \div d} = \frac{ac}{d}$.

Démonstration. Tout nombre entier peut être représenté par une lettre b , * qu'on peut ainsi écrire en fraction $\frac{b}{1}$; en multipliant le premier & le second terme par une même grandeur a , elle devient $\frac{ab}{1 \times a} = \frac{ab}{a}$, ce qui * n'en change * 117. point la valeur. Or c'est ce que prescrit le Problème qui est de multiplier l'entier proposé par le dénominateur donné a , & d'écrire au dessous de ce produit le dénominateur donné a ; ce qui est la même chose que de multiplier l'unité, second terme de la fraction proposée $\frac{b}{1}$, par a . Ainsi le Problème prescrit la manière de réduire un entier à une fraction dont le dénominateur soit donné, sans en changer la valeur. Ce qu'il falloit démontrer. * 75.

REMARQUE.

ON réduit par ce Problème les plus grandes espèces aux moindres. Par exemple, pour réduire 4 toises en pieds, qui sont des sixièmes de toises; il faut multiplier 4 par 6, & le produit 24, sous lequel on écrit, si l'on veut, le dénominateur 6, exprime que 4 toises valent 24 pieds ou 24 sixièmes de toise.

PROBLÈME VII.

279. *QUAND* une fraction contient un nombre entier, c'est à dire, * quand le premier terme surpasse le second, la réduire à l'entier.

Règle ou opération. Il faut diviser le numérateur par le dénominateur, le quotient exprimera les entiers.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{20}{5}$ à l'entier, il faut diviser 20 par 5, le quotient 4 est le nombre entier que vaut la fraction $\frac{20}{5}$.

Pour réduire $\frac{ab}{b}$ à l'entier, il faut diviser ab par b , & le quotient sera l'entier $a = \frac{ab}{b}$.

Pour réduire $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ à l'entier; il faut diviser $a^2 - b^2$ par $a - b$, & le quotient sera l'entier $a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$.

Pour réduire $\frac{22}{5}$ à l'entier, il faut diviser 22 par 5, & le quotient 4 $\frac{2}{5}$ marque l'entier 4 qui est contenu en $\frac{22}{5}$, & il y a de plus la fraction $\frac{2}{5}$; c'est à dire $4 \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$.

Démonstration. Supposons une fraction qui contient un nombre entier comme $\frac{20}{5}$, ou en general $\frac{ab}{b}$. Il est évident que la fraction $\frac{1}{1}$, ou en general la fraction $\frac{b}{b}$, (dont le premier & le second terme sont chacun égal au dénominateur de la fraction supposée,) peut être regardée comme une unité de la grandeur entière que contient la fraction supposée $\frac{20}{5} = \frac{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1}{1}$, ou $\frac{ab}{b}$. Or le quotient qui vient de la division du numérateur 20 ou ab de la fraction proposée par son dénominateur 5 ou b , marque combien de fois $\frac{1}{1}$ ou $\frac{b}{b}$ est contenue dans la fraction proposée. Ainsi ce quotient exprime combien la fraction proposée contient d'unités entières. Ce qu'il falloit démontrer.

Quand le quotient contient un entier & une fraction,

comme $\frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$, ou $\frac{22}{5} = 4 + \frac{2}{5}$; il est évident que la fraction proposée contient autant d'unités entières qu'en marque le quotient 4, & de plus autant des parties de l'unité qu'en marque la fraction du quotient $\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{5}$.

REMARQUES.

1.

ON réduit par ce Problème les petites especes aux plus grandes. Par exemple pour réduire 30 pieds, ou $\frac{1}{20}$ de toise, en toises; il faut diviser le nombre 30, qui exprime une plus petite espece, par le nombre 6 qui marque combien de fois cette plus petite espece est contenue dans la plus grande à laquelle on veut réduire la petite; & le quotient 5 fait connoître que 30 pieds valent 5 toises.

2.

Quand le nombre de la plus petite espece est moindre que le nombre qui marque combien de fois elle est contenue dans la plus grande; alors la réduction ne donne qu'une fraction sans aucun entier. Par exemple, pour réduire 5 pouces en pieds; on trouve pour quotient la seule fraction $\frac{5}{12}$ sans entier. De même pour réduire 5 pouces en toises, on trouve la seule fraction $\frac{5}{72}$ sans entier.

PROBLÈME VIII.

280. **R**ÉDUIRE une grandeur composée d'un entier & d'une fraction à une seule fraction.

Regle ou operation. 1°. Il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction. 2°. Il faut écrire le produit qu'on vient de trouver augmenté du numérateur de la fraction, pour le numérateur de la fraction qu'on cherche, & lui donner pour dénominateur celui de la fraction.

EXEMPLES.

Pour réduire $4\frac{2}{5}$ en une seule fraction, 1°. il faut multiplier l'entier 4 par 5. 2°. Ajouter au produit 20 le numérateur 2 de la fraction; & la somme 22 sera le numérateur de

la fraction qu'on cherche, qui aura 5 pour dénominateur. Cette fraction sera donc $\frac{2}{5} = 4 \frac{2}{5}$.

Pour réduire $a + \frac{c}{b}$ à une seule fraction, il faut écrire $\frac{ab + c}{b}$.

- * 179. Ce Problème n'est qu'un Corollaire du précédent, * on y rétablit par la multiplication l'expression que le précédent avoit fait changer par la division. Ainsi il n'a pas besoin de nouvelle démonstration.

PROBLÈME IX.

281. *TROUVER une fraction qui soit double, triple, en un mot, qui soit un multiple quelconque d'une fraction donnée.*

Règle ou opération. Il faut multiplier le numérateur de la fraction donnée par 2, si l'on en veut le double; par 3, si on en veut le triple; par 4, si l'on en veut le quadruple, &c. écrire ce produit pour le premier terme de la fraction qu'on cherche, &c. lui donner pour second terme le dénominateur de la fraction donnée.

EXEMPLES.

POUR trouver une fraction double de $\frac{1}{4}$, il faut écrire $\frac{2 \times 1}{4} = \frac{2}{4}$.

Pour trouver une fraction triple de $\frac{1}{4}$, il faut écrire $\frac{3}{4}$.

Démonstration. On supposera, pour rendre la démonstration générale, que le nombre qui exprime le multiple quelconque de la fraction donnée, est représenté par m . Par exemple, quand on demande le double de la fraction donnée, $m = 2$; quand on demande le triple, $m = 3$, &c. Ainsi $\frac{m}{4}$ représentera la fraction multiple quelconque de la fraction

- 118. $\frac{1}{4}$ que le Problème fait découvrir. Cela supposé * Un rapport est à un autre rapport, comme le produit des extrêmes est
- 109. au produit des moïens. Par conséquent $\frac{m}{4} : \frac{1}{4} :: mab : 1ab :: m : 1$. En mettant 2 au lieu de m , on aura $\frac{2}{4} : \frac{1}{4} :: 2ab : 1ab :: 2 : 1$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÈME X.

282. *TROUVER une fraction qui soit la moitié, le tiers, le quart, la cinquième partie; en un mot, qui soit la partie déterminée quelconque d'une fraction donnée.*

Règle ou opération. 1°. Il faut multiplier le dénominateur de la fraction donnée par 2, si l'on en veut la moitié; par 3, si l'on en veut le tiers; par 4, si l'on en veut le quart, &c. 2°. Il faut écrire le produit pour le dénominateur de la fraction qu'on cherche; & pour numérateur, le numérateur de la fraction donnée.

E X E M P L E.

Pour avoir la moitié de $\frac{1}{2}$, il faut multiplier 2 par 2, ce qui donnera 4; & écrire $\frac{1}{4}$. C'est la moitié de $\frac{1}{2}$.

Pour avoir le quart de $\frac{1}{2}$, il faut multiplier 2 par 4; le produit sera 8; il faut écrire $\frac{1}{8}$ pour le quart de $\frac{1}{2}$.

Pour avoir la cinquième partie de $\frac{1}{2}$, il faut écrire $\frac{1}{10}$.

Démonstration. On supposera, pour rendre la démonstration générale, que n représente 2 quand on veut la moitié d'une fraction; 3, quand on veut le tiers; 4, quand on veut le quart, &c. Ainsi $\frac{1}{2}$ représentant la fraction proposée; $\frac{1}{n}$ représentera en général celle que le Problème fait découvrir. Cela supposé * Un rapport est à un autre rapport, comme le produit des extrêmes est au produit des moyens. Ainsi $\frac{1}{2} :: \frac{1}{n} :: 1ab :: * 1. n$. C'est à dire, si n vaut 2, $\frac{1}{2} :: \frac{1}{2} :: 1ab :: * 108$. sera $\frac{1}{4}$; si n vaut 3, $\frac{1}{2} :: \frac{1}{3} :: 1ab :: * 109$. &c. L'on aura donc $\frac{1}{n}$. $\frac{1}{2} :: 1ab :: * 1. n$. &c. Ce qu'il falloit démontrer. * 109.

P R O B L È M E X I.

283. *RÉDUIRE une fraction de fraction à une seule fraction.*

Par exemple, réduire les $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ à une seule fraction.

Règle ou opération. Il faut former une fraction, qui ait pour premier terme le produit des numérateurs des deux fractions données, & pour second terme le produit des dénominateurs de ces deux fractions. Ce sera la fraction qu'on cherche.

E X E M P L E S.

Pour réduire les $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ en une seule fraction; il faut écrire $\frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$.

Pour réduire $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ en une seule fraction, il faut écrire $\frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$.

- Démonstration.* On appliquera la démonstration à un exemple pour la rendre plus claire. Réduire $\frac{2}{7}$ de $\frac{2}{3}$ à une seule fraction, c'est comparer ou rapporter immédiatement à l'unité deux tiers de quatre cinquièmes de l'unité; c'est à dire, trouver qu'elle est la fraction, qui ne contient que des parties de l'unité, & qui soit pourtant les deux tiers de quatre cinquièmes de l'unité. Or en multipliant 5, dénominateur de $\frac{2}{5}$ de l'unité, par 3 dénominateur de $\frac{2}{3}$ de quatre cinquièmes de l'unité, & écrivant le produit 15 pour le dénominateur d'une fraction dont le numérateur soit le numérateur 4 de $\frac{2}{5}$ de l'unité; il est évident par le Problème précédent * que cette fraction $\frac{4}{15}$ de l'unité sera un tiers de la fraction $\frac{2}{3}$ de l'unité. Par conséquent si on prend cette fraction deux fois; ou, ce qui revient au même, si on multiplie son numérateur 4 par 2, numérateur de $\frac{2}{3}$ de quatre cinquièmes de l'unité, on aura la fraction $\frac{8}{15} = \frac{2}{3}$ de l'unité, qui vaudra * deux tiers de quatre cinquièmes de l'unité. Le Problème fait donc réduire une fraction de fraction à une fraction de l'unité qui est égale à cette fraction de fraction. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

284. **P**OUR réduire une fraction de fraction de fraction; par exemple $\frac{2}{7}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{5}$; c'est à dire, la moitié de deux tiers de quatre cinquièmes de l'unité, à une seule fraction; il faut écrire le produit $1 \times 2 \times 4 = 8$ des numérateurs pour le premier terme de la fraction qu'on cherche, & pour second terme, le produit $2 \times 3 \times 5 = 30$ de trois dénominateurs, & la fraction qu'on cherche sera $\frac{8}{15}$.
- * 283. *Démonstration.* On a démontré * que $\frac{2}{15} = \frac{2}{3}$ étoit la valeur de la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{5}$ de l'unité. D'où il
- * 282. suit que $\frac{2}{15} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$, qui est la valeur * de la moitié de $\frac{2}{3}$ de l'unité; est par conséquent la valeur de $\frac{2}{7}$ de $\frac{2}{3}$ de l'unité. D'où l'on voit qu'on peut trouver de la même manière, par la multiplication des numérateurs & par la multiplication des dénominateurs, une seule fraction de l'unité égale à une fraction de fraction de fraction de fraction, &c. On peut nommer ces fractions de fraction de fraction, &c. des fractions composées.

COR-

COROLLAIRE.

285. **I**L suit des Problèmes précédens & de leurs Corollaires, qu'il n'y a point de nombre, qu'on ne puisse réduire à être une simple fraction de l'unité.

Car tout nombre est ou un nombre entier, ou un nombre rompu, c'est à dire, ou une fraction. Toute fraction est ou une fraction simple de l'unité, ou une fraction composée, c'est à dire, une fraction de fraction, &c. de l'unité; ou bien, c'est une fraction simple ou composée, c'est à dire, fraction, de fraction, &c. d'un nombre entier quelconque, comme $\frac{2}{3}$ de 60, $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de 60, sont des fractions du nombre 60, la première simple, la seconde composée.

Or, 1°. tout nombre entier peut être réduit en une simple fraction de l'unité, en l'écrivant en fraction, par exemple $\frac{10}{1}$, & multipliant ensuite ses deux termes * par un nom- * 278.
bre tel qu'on voudra, comme par 10, 100, &c. car on aura $\frac{10 \times 10}{1 \times 10} = \frac{100}{10}$.

2°. Toute fraction simple de l'unité est par elle-même sans réduction, une simple fraction de l'unité: & toute fraction composée; c'est à dire, toute fraction de fraction, &c. de l'unité, peut se réduire à une fraction simple de l'unité *par les articles 283, 284.*

3°. Enfin toute fraction d'un nombre entier quelconque tant simple que composée, c'est à dire, qui soit une fraction de fraction, &c. d'un nombre entier quelconque, peut se réduire à une simple fraction de l'unité. Car il n'y a qu'à réduire, *par l'article 278*, le nombre entier lui-même en simple fraction de l'unité, & la fraction soit simple soit composée; c'est à dire, la fraction de fraction, &c. du nombre entier, deviendra, par cette réduction, une fraction composée; c'est à dire, une fraction de fraction, &c. de l'unité. Elle pourra donc être réduite *par les articles 283 & 284*, à une simple fraction de l'unité.

COROLLAIRE.

ON voit clairement par le Corollaire précédent, qu'il n'y a point de nombre possible, soit entier, soit rompu, qui n'ait une mesure commune ou aliquote commune avec l'u-

SECTION III

*Où l'on explique l'Addition, la Soustraction, la Multiplication;
 la Division des fractions, la formation de leurs puissances,
 & l'extraction de leurs racines.*

L'Addition & la Soustraction des fractions ou rapports.

I PROBLÈME.

286. **AJOUTER** ensemble deux ou plusieurs fractions données, &
 retrancher une ou plusieurs fractions données d'une ou de plusieurs
 autres fractions données.

Règle ou operation. 1°. Il faut réduire toutes les fractions
 * 270. données * à un même dénominateur. 2°. S'il faut les ajouter,
 & 271. on prendra la somme de tous les numérateurs des fractions
 réduites pour le numérateur d'une fraction, & le dénomina-
 teur commun pour son dénominateur; & cette fraction sera
 la somme des fractions données. 3°. S'il faut retrancher l'une
 de l'autre, on retranchera le numérateur de la fraction qui est
 la réduite de celle qu'on veut retrancher, on le retranchera
 dis-je, du numérateur de la réduite de l'autre, & l'on for-
 mera une fraction qui ait la différence des numérateurs pour
 premier terme, & le dénominateur commun pour second
 terme; & elle sera la différence qu'on cherche. 4°. S'il faut
 retrancher plusieurs fractions d'une ou de plusieurs autres;
 après les avoir toutes réduites au même dénominateur, on
 ajoutera toutes celles qu'il faut retrancher dans une fraction
 qui en soit la somme, & toutes les autres aussi en une fra-
 ction qui en soit la somme; & l'on retranchera le numéra-
 teur de la première du numérateur de la seconde. On fera
 une fraction qui ait pour premier terme la différence des
 numérateurs qui vient d'être découverte, & pour second
 terme le dénominateur commun. Ce sera la fraction qu'on
 * 269. cherche. 5°. On peut, avant d'operer, réduire * chacune
 des fractions données aux moindres termes pour rendre l'o-

peration plus simple. On peut aussi, après l'opération, réduire aux moindres termes la fraction, qui est la somme ou la différence, pour la rendre plus simple.

Exemples de l'Addition des fractions.

POUR trouver la somme de $\frac{3}{7}$ & $\frac{1}{4}$, 1°. on les réduit au même dénominateur, & l'on trouve $\frac{12}{28}$ & $\frac{7}{28}$. 2°. On prend la somme 17 des numérateurs des fractions réduites, pour le premier terme, & le dénominateur commun 28 pour le second terme de la fraction $\frac{17}{28}$, qui est la somme des deux fractions $\frac{3}{7}$ & $\frac{1}{4}$.

Pour trouver la somme de $15 = \frac{15}{1}$ & $\frac{1}{4}$, on leur donne le même dénominateur, & elles deviennent $\frac{15}{4}$ & $\frac{1}{4}$. 2°. On prend la somme $75 + 1 = 76$ des numérateurs pour le premier terme, & le dénominateur commun 4 pour le second terme de la fraction $\frac{76}{4}$, qui est la somme de $\frac{15}{1}$ & de $\frac{1}{4}$.

Pour trouver la somme de $3 \frac{1}{2}$ & de $4 \frac{3}{7}$, 1°. On les réduit à un même dénominateur, & l'on trouve $\frac{3}{2}$ & $\frac{3}{7}$. 2°. On ajoute les numérateurs, & l'on fait de la somme 49 le premier terme, & du dénominateur commun 14 le second terme de la fraction $\frac{49}{14}$, qui est la somme qu'on cherche.

Quand il y a des entiers & des fractions, comme dans les deux exemples précédens, on peut, si l'on veut, ajouter les entiers à part, & les fractions à part, & écrire la somme des entiers, & au devant, en moindres chiffres, la somme des fractions. Ainsi on peut écrire $15 \frac{1}{4}$ pour la somme de 15 & de $\frac{1}{4}$; & $7 \frac{7}{7}$ ou $8 \frac{1}{7}$ pour la somme de $3 \frac{1}{2}$ & de $4 \frac{3}{7}$.

Soit proposée d'ajouter les trois fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. 1°. Voyant que le dénominateur 2 de la première est un diviseur du dénominateur 4 de la seconde, je réduis la première $\frac{1}{2}$ au dénominateur de la seconde, & les trois fractions sont $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, qui se réduisent, en ajoutant ensemble les deux premières, à $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{8}$. Je les réduis au même dénominateur, & elles deviennent $\frac{6}{8}$ & $\frac{1}{8}$. 2°. J'ajoute les numérateurs, & j'écris $\frac{7}{8}$ pour la somme de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. 270.

Pour ajouter $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-1 \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$. 1°. Je les réduis au même dénominateur, en multipliant seulement les deux

termes de chacune des deux dernières par 4, à cause de $4 \times 16 = 64$: & je trouve $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 2°. J'ajoute les deux positives $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = + \frac{4}{2}$. Et comme la négative $-\frac{1}{2}$ surpasse la positive, je retranche le numérateur 93 du numérateur 124, la différence est 31, laquelle est négative ; j'écris -31 pour le premier terme, & 64 pour le second terme de la fraction $-\frac{31}{64}$, qui est la somme des trois proposées.

On remarquera que quand on ajoute des fractions positives & négatives, l'addition des négatives aux positives est une véritable soustraction ; & si les négatives surpassent les positives, la somme aura le signe $-$; si les positives surpassent les négatives, la somme aura $+$; mais quand on ajoute des seules grandeurs négatives, c'est simplement une addition.

Pour ajouter ensemble $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 1°. je les réduis au même second terme, & elles deviennent $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$. 2°. J'ajoute les numérateurs, & j'écris $\frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$ pour la somme de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

Pour ajouter $\frac{a}{a-b}$ & $\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$, 1°. Je les réduis au même dénominateur, en multipliant simplement les deux termes de la première par c , qui est le quotient de $ac - bc$ divisé par $a - b$, & je trouve $\frac{ac-bc}{a-b} = \frac{ac-bc}{a-b}$, qui a le même dénominateur que la seconde. 2°. J'ajoute ensuite les numérateurs des deux fractions qui ont le même dénominateur, & j'écris leur somme pour le premier terme, & le dénominateur commun pour le second terme de la fraction $\frac{ac-bc+a^2-b^2}{a-b}$ qui est la somme des deux proposées.

Pour ajouter $\frac{a^2}{a^2-b^2}$ & $\frac{b^2}{a^2-b^2}$, 1°. je les réduis au même dénominateur, en remarquant qu'il suffit (à cause de $a - b$, diviseur commun des dénominateurs $a^2 - b^2 = a - b \times ab + b^2$, & $a^2 - ab = a - b \times a$) de multiplier les deux termes de la première par a , & les deux termes de la seconde par $ab + b^2$, & je trouve $\frac{a^3}{a^2-b^2} = \frac{a^3}{a^2-b^2}$, & $\frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{ab^2+b^3}{a^2-b^2}$. 2°. J'ajoute les numérateurs des fractions réduites au même dénominateur, & j'écris leur somme pour le premier terme, & le dénominateur commun pour le second terme

de la fraction $\frac{a'+b'+c'}{a'b'+b'c'+c'a'}$ qui est la somme des deux proposées.

Exemples de la Soustraction des fractions.

POUR retrancher $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$. 1°. Je les réduis au même dénominateur, & je trouve $\frac{2}{12}$ & $\frac{3}{12}$. 2°. Je retranche 2 de 3, & j'écris la différence 1 pour le premier terme, & le dénominateur commun 12 pour le second terme de la fraction $\frac{1}{12}$ que je cherche.

Pour ôter $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{12}$ de $\frac{1}{4}$. 1°. Je trouve la somme des deux premières réduites aux moindres termes $\frac{2}{12}$, & la somme des deux autres $\frac{1}{12}$. 2°. Je multiplie les deux termes de $\frac{1}{12}$ par 2, & j'ai $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. J'ôte ensuite le numérateur 9 du numérateur 10, & j'écris la différence 1 pour le premier terme & le dénominateur commun pour le second terme de la fraction $\frac{1}{12}$ que je cherche.

Lorsque les fractions à retrancher sont négatives & les autres positives, la soustraction est une addition; car pour retrancher les négatives il faut les rendre positives, & les ajouter aux autres positives.

Lorsque les fractions à retrancher sont positives & les autres négatives, la soustraction est encore une addition; car pour retrancher les positives il faut les rendre négatives, & ensuite les ajouter aux autres négatives.

Pour retrancher $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$. 1°, je les réduis au même dénominateur, & je trouve $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$. 2°. J'ôte le numérateur de la première du numérateur de la seconde, & j'écris $\frac{1-2}{12}$ pour la fraction que je cherche.

Pour retrancher $\frac{a'+b'+c'}{a'b'+b'c'+c'a'}$ de $\frac{a'+b'+c'}{a'b'+b'c'+c'a'}$. 1°, je les réduis au même dénominateur en multipliant seulement les deux termes de la première par $a+b$ qui est le quotient de $a^2 - b^2 = a-b \times a+b$ divisé par $a-b$, & je trouve $\frac{a'+b'+c'}{a'b'+b'c'+c'a'}$. 2°. Je retranche le numérateur de cette dernière fraction du numérateur $a'+b'$, j'écris leur différence pour le premier terme & le dénominateur commun pour le second terme de la fraction $\frac{a'+b'+c'-a'-b'}{a'b'+b'c'+c'a'}$ qui est celle que je cherche.

Pour ôter $a - \frac{a^2}{b}$ de $b - \frac{b^2}{a}$. 1°, je réduis $a - \frac{a^2}{b}$ à $\frac{a-b}{b}$, & $b - \frac{b^2}{a}$ à $\frac{b-a}{a}$, & je leur donne ensuite le même dénomi-

naiseur, & je trouve $\frac{ac-ac^2}{bc}$ & $\frac{b^2c-ac^2}{bc}$. 2°. Je retranche le numérateur de la première réduite du numérateur de la seconde réduite, & j'écris la différence pour le premier terme & le dénominateur commun pour le second de la fraction $\frac{b^2c-ac^2-ac^2+ac^2}{bc}$, qui est la fraction que je cherche, qu'on peut réduire à $b - a - \frac{ac^2+ac^2}{bc}$.

Quand il y a des entiers & des fractions à retrancher d'autres entiers joints aussi à des fractions, on peut retrancher à part les entiers des entiers, & les fractions des fractions, en écrivant les entiers du reste, & au devant les fractions du reste que fait découvrir la soustraction.

REMARQUE.

QUAND le numérateur est complexe, chaque grandeur incomplexue de ce numérateur peut être regardée comme un numérateur particulier, qui a pour dénominateur celui de la fraction, dont le numérateur est complexe.

Par exemple $\frac{b^2c-ac^2-ac^2+ac^2}{bc} = \frac{b^2c}{bc} - \frac{ac^2}{bc} - \frac{ac^2}{bc} + \frac{ac^2}{bc}$. Et l'on peut abréger celles de ces fractions qui le peuvent être en divisant leurs deux termes par une même grandeur. Par exemple, la fraction précédente se peut réduire à $b - a - \frac{ac^2}{bc} + \frac{ac^2}{bc}$.

- * 214. *Démonstration du Problème.* On a fait voir clairement * que les fractions qui ont le même dénominateur, peuvent être regardées comme des unités. Par exemple, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, peuvent être regardées comme des unités qui sont chacune une troisième partie de l'unité à laquelle elles ont rapport. Les numérateurs expriment le nombre de ces unités; ainsi en ajoutant les numérateurs, ou les retranchant les uns des autres, il est évident que la fraction qui a pour premier terme la somme ou la différence des numérateurs, & pour second terme le dénominateur commun, est la somme ou la différence de ces fractions.

La Multiplication des fractions.

II. PROBLÈME.

287. *MULTIPLIER deux ou plusieurs fractions les unes par les autres, & en trouver le produit.*

Règle ou opération. Il faut multiplier les numérateurs les uns par les autres, & écrire le produit pour le premier terme de la fraction qu'on cherche. Il faut multiplier ensuite les dénominateurs, & en écrire le produit pour le second terme de la fraction qu'on cherche.

E X E M P L E S.

POUR multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faut écrire $\frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$ pour le produit qu'on cherche.

Pour multiplier $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ les uns par les autres, il faut écrire $\frac{1 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4} = \frac{2}{24}$ pour le produit qu'on cherche, qui devient $\frac{1}{12}$, en le réduisant aux moindres termes.

Pour multiplier $3 = \frac{3}{1}$ par $\frac{2}{5}$, il faut écrire le produit $\frac{3 \times 2}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$.

Pour multiplier $2\frac{1}{4}$ par $4\frac{3}{5}$, il faut réduire * chaque entier & la fraction en une seule fraction, & l'on aura $\frac{9}{4}$ à multiplier par $\frac{23}{5}$; il faut ensuite écrire pour leur produit $\frac{9 \times 23}{4 \times 5} = \frac{207}{20}$, qui devient, en le réduisant, * $12\frac{7}{20}$, ou * $12\frac{1}{3}$. * 230. * 179. * 269.

R E M A R Q U E.

283. QUAND il y a des entiers & des fractions à multiplier par des entiers & des fractions, comme $2\frac{1}{4}$ par $4\frac{3}{5}$, on pourra faire la multiplication par parties. On multipliera d'abord les entiers par les entiers, comme dans cet exemple 2 par 4, & l'on aura 8; ensuite chaque entier par la fraction de l'autre entier, & l'on aura $2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$, & $4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$; enfin la fraction par la fraction, & l'on aura $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$. On prendra ensuite la somme de tous ces produits $8 + \frac{6}{5} + \frac{4}{4} + \frac{3}{20} = 12\frac{7}{20}$. Il est évident que ce sera le produit qu'on cherche.

Pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, il faut écrire le produit des numérateurs *ac* pour le premier terme, & le produit *bd* des dénominateurs pour le second terme de la fraction $\frac{ac}{bd}$ que l'on cherche.

Pour multiplier $ab = \frac{a}{1}$ par $\frac{c}{d} = \frac{c}{d}$. Il faut écrire $\frac{a \times c}{1 \times d} = \frac{ac}{d}$ pour le produit.

Si l'on veut multiplier $a = \frac{a}{1}$ par $d = \frac{d}{1}$, on peut faire la

multiplication de ces deux manières. 1°. On prendra par parties les quatre produits $a \times a = a^2$; $a \times -\frac{c}{b} = -\frac{ac}{b}$; $a \times \frac{c^2}{b^2} = \frac{ac^2}{b^2}$; $\frac{c^3}{b^3}$; & leur somme $a^2 - \frac{ac}{b} + \frac{ac^2}{b^2} - \frac{c^3}{b^3}$ sera le produit qu'on cherche. 2. Ou bien on réduira $a + \frac{c^2}{b}$

- * 280. à $\frac{a^2 + a^2}{b}$, &c. $a - \frac{c}{b}$ à $\frac{ab - c^2}{b}$. Ensuite on fera la multiplication $\frac{a^2 + a^2}{b} \times \frac{ab - c^2}{b} = \frac{a^3b + a^2b^2 - ac^2 - a^2c^2}{b^2}$ (qu'on pourra réduire à $a^3 + \frac{a^2b}{b} - \frac{ac^2}{b} - \frac{a^2c^2}{b^2}$.) & l'on aura le produit qu'on cherche.

Démonstration du Problème. Il faut démontrer qu'en multipliant deux fractions quelconques représentées par $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, leur produit est $\frac{ac}{bd}$. (C'est à dire, il faut démontrer que * 1.

- * 113. * 71. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: \frac{ac}{bd}$.) 1. $\frac{a}{b} :: * b. a :: * bc. ac :: * \frac{bd}{bd} \frac{ac}{bd}$. Par conséquent

- * 109. * 1. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: \frac{ac}{bd}$. Mais $\frac{bd}{bd} = * \frac{1}{1}$. C'est pourquoi si l'on met

- * 12. * 71. dans 1. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: \frac{ac}{bd}$, la fraction $\frac{1}{1}$ à la place de son égale $\frac{bd}{bd}$, l'on aura 1. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: \frac{ac}{bd}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Autre démonstration. On aura démontré que 1. $\frac{a}{b} :: \frac{1}{b} \frac{a}{1}$ si l'on fait voir que $\frac{1}{b} \frac{a}{1} :: 1. \frac{a}{b}$. En voici la démonstration.

- * 113. * 71. $\frac{1}{b} \frac{a}{1} :: * bcd. acd :: * b. a :: * 1. \frac{a}{b}$. Par conséquent *

- * 113. * 12. $\frac{1}{b} \frac{a}{1} :: 1. \frac{a}{b}$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

289. QUAND les deux fractions qu'on multiplie l'une par l'autre sont chacune moindre que l'unité, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, leur produit $\frac{1}{6}$ est moindre que l'unité. Car supposant ces deux fractions représentées par $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, & leur produit par $\frac{ac}{bd}$, on
- * 72. aura * 1. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: \frac{ac}{bd}$; mais le conséquent $\frac{c}{d}$ du premier rapport est supposé moindre que l'antécédent 1; le conséquent $\frac{bd}{bd}$ du second rapport est donc moindre que son antécédent $\frac{1}{1}$, qu'on a supposé plus petit que l'unité.

REMARQUE.

ON voit à présent la raison pourquoi une grandeur écrite à la droite d'une fraction est censée être au numérateur: car $\frac{a}{b} \times x = \frac{ax}{b} = \frac{ax}{b}$.

La Division des fractions.

PROBLÈME III.

290. **DIVISER** une fraction $\frac{a}{b}$ par une autre $\frac{c}{d}$, & en trouver le quotient.

Règle ou opération. Il faut multiplier le numérateur a du dividende $\frac{a}{b}$ par le dénominateur d du diviseur $\frac{c}{d}$; le produit ad sera le premier terme du quotient qu'on cherche. Il faut ensuite multiplier le dénominateur b du dividende $\frac{a}{b}$ par le numérateur c du diviseur $\frac{c}{d}$, le produit bc sera le second terme du quotient qu'on cherche, qui est $\frac{ad}{bc}$.

Ceux qui commencent, peuvent écrire le diviseur à la droite du dividende, & multiplier en croix $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$; le quotient sera $\frac{ad}{bc}$. Ou bien, ayant écrit le dividende le premier, & le diviseur le second, il n'y a qu'à prendre le produit des extrêmes pour le numérateur, & le produit des moyens pour le dénominateur de la fraction qui est le quotient.

Pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{4}$, il faut multiplier 2 par 4, le produit 8 sera le premier terme du quotient. Il faut ensuite multiplier 3 par 1, le produit 3 sera le second terme du quotient qui est $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Pour diviser $3 = \frac{3}{1}$ par $\frac{2}{5}$, il faut écrire pour le quotient $\frac{3 \times 5}{1 \times 2} = \frac{15}{2}$.

Pour diviser $\frac{4}{7}$ par $3 = \frac{3}{1}$, il faut écrire pour le quotient $\frac{4 \times 1}{7 \times 3} = \frac{4}{21}$.

Pour diviser $5\frac{2}{3}$ par $6\frac{1}{4}$, il faut réduire chaque entier & la fraction à une seule fraction, & l'on aura $\frac{32}{6}$ à diviser par $\frac{25}{4}$. Il faut ensuite former le quotient $\frac{32 \times 4}{6 \times 25} = \frac{64}{75}$.

Pour diviser $a = \frac{a}{1}$ par $\frac{b}{c}$, il faut écrire $\frac{a \times c}{1 \times b} = \frac{ac}{b}$.

Pour diviser $\frac{b}{c}$ par $a = \frac{a}{1}$, il faut écrire $\frac{b \times 1}{c \times a} = \frac{b}{ac}$.

Pour diviser $a + \frac{b}{c}$ par $d + \frac{e}{f}$, il faut réduire chaque entier & la fraction à une seule fraction, & l'on aura $\frac{ac+b}{c}$ à diviser par $\frac{df+e}{f}$. Il faut ensuite former le quotient $\frac{(ac+b) \times f}{c \times df + e^2} = \frac{acf+bf}{cdf+e^2}$.

Démonstration du Problème. Il faut démontrer qu'en fai-
Nn

tant la division d'une fraction quelconque représentée par $\frac{a}{b}$ par une autre fraction quelconque représentée par $\frac{c}{d}$, le

- 106. quotient est $\frac{ad}{bc}$: ce qui sera démontré * si l'on fait voir que
- 118. $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} :: \frac{ad}{bc} \cdot 1$. En voici la démonstration $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} :: *$ ad. bc ::
- 111. $* \frac{ad}{bc} \cdot 1$. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUES.

1.

291. QUAND le numérateur du diviseur est un diviseur exact du numérateur du dividende, &c que le dénominateur du diviseur est en même temps un diviseur exact du dénominateur du dividende, comme s'il falloit diviser $\frac{24}{12}$ par $\frac{2}{3}$; dans ce cas, on pourra prendre le quotient qui vient de la division du numérateur du dividende par le numérateur du diviseur pour le premier terme du quotient qu'on cherche, &c le quotient qui vient de la division du dénominateur du dividende par le dénominateur du diviseur, pour le second terme du quotient qu'on cherche. Pour diviser $\frac{24}{12}$ par $\frac{2}{3}$, on peut écrire pour quotient $\frac{6}{2}$.

- De même pour diviser $\frac{12}{5}$ par $\frac{2}{3}$, on prendra pour le premier terme du quotient qu'on cherche, le quotient 6 de 12 divisé par 2 ; &c pour second terme du quotient qu'on cherche, le quotient 4 de 20 divisé par 5, &c l'on aura $\frac{6}{5} = * \frac{6}{5}$ pour le quotient qu'on cherche.
- 169. La démonstration est évidente. Car $* 1. \frac{a}{b} :: \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}$. Par
 - 117. conséquent les rapports inverses sont égaux ; &c l'on aura *
 - 106. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} :: \frac{a}{b} \cdot 1$. D'où il suit * que $\frac{a}{b}$ est le quotient de $\frac{a}{b}$ divisé par $\frac{b}{a}$.

2.

On n'a pas mis d'exemples de fractions dont les numérateurs &c les dénominateurs fussent des grandeurs complexes ; parceque n'y ayant aucune difficulté particulière dans ces exemples ; les plus simples exemples servent mieux à faire concevoir clairement les règles de la multiplication &c de la division, que les Commensans peuvent eux-mêmes appliquer aux exemples les plus composés.

3.

On peut, si l'on veut, réduire aux moindres termes, les fractions avant la multiplication & la division, & cela rendra ces opérations plus simples. On peut aussi réduire encore les produits & les quotients qu'on trouve aux moindres termes pour les rendre plus simples.

4.

192. La division des fractions peut servir à faire connoître le rapport d'une fraction $\frac{a}{b}$ à une autre $\frac{c}{d}$. Car le quotient de la division d'un rapport par un autre rapport * est un rapport égal à celui qui est entre ces deux rapports; par exemple, le rapport de $\frac{a}{b}$ à $\frac{c}{d}$ est égal au quotient $\frac{ad}{bc}$. Car $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: * \frac{ad}{bc} : x :: * ad, bc$. * 118.
* 190.
* 111.

5.

293. Comme l'on marque la division d'une grandeur a par une grandeur b de cette manière $\frac{a}{b}$; on peut aussi marquer quelquefois la division de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, en écrivant $\frac{a}{b}$ sur une ligne, & $\frac{c}{d}$ au dessous de cette façon $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$; & pour réduire cette expression à une plus simple, on fait la division que marque cette expression, & l'on trouve le quotient $\frac{ad}{bc}$.

Quand on a cette autre expression $\frac{a + \frac{c}{d}}{b + \frac{e}{f}}$; on la réduit * d'abord à $\frac{af + \frac{cd}{f}}{bf + \frac{ed}{f}}$; & faisant ensuite * la division, on la réduira à $\frac{af + \frac{cd}{f}}{bf + \frac{ed}{f}}$. * 180.
* 190.

Si l'on avoit cette autre expression $\frac{a + \frac{c}{d}}{\frac{e}{f}}$; il faudroit d'abord réduire * le diviseur $b + \frac{e}{f}$ à $\frac{bf + \frac{ed}{f}}{f}$, & ensuite * diviser $a + \frac{c}{d} = \frac{af + \frac{cd}{f}}{f}$ par $\frac{bf + \frac{ed}{f}}{f}$, & le quotient seroit $\frac{af + \frac{cd}{f}}{bf + \frac{ed}{f}}$, qu'on peut réduire * à $\frac{af + \frac{cd}{f}}{bf + \frac{ed}{f}}$. * 180.
* 190.
* 169.

Cette autre expression toute seule $\frac{a}{\frac{c}{d}}$ est équivoque. Car elle peut marquer ces deux divisions différentes, 1°. ou bien que l'entier $a = \frac{a}{1}$ est divisé par la fraction $\frac{c}{d}$; & dans ce cas, le quotient est $* \frac{ad}{c}$. 2°. Ou bien elle peut marquer que * 190.

- la fraction $\frac{a}{c}$ est divisée par l'entier $c = \frac{c}{1}$; & le quotient est $\frac{a}{c}$, qui est différent du précédent. C'est pourquoi il faut éviter cette expression, ou bien il faut, si l'on veut s'en servir, faire la ligne qui sépare le dividende du diviseur, plus grande que l'autre ligne. Par exemple, $\frac{a}{\frac{c}{1}}$ marquera que a est divisé par $\frac{c}{1}$, & $\frac{a}{c}$ marquera que $\frac{a}{c}$ est divisé par c .

On verra facilement par les expressions qu'on vient d'expliquer dans cette remarque, la manière de faire la division marquée par l'expression suivante, qui servira à entendre celles qui seroient plus composées. $\frac{a + \frac{b^2}{c + \frac{d}{e}}}{b - \frac{c^2 + \frac{d^2}{e}}{f}}$. On voit

d'abord que le dividende est $a + \frac{b^2}{c + \frac{d}{e}}$, & le diviseur $b - \frac{c^2 + \frac{d^2}{e}}{f}$. Mais avant de faire la division, il faut réduire l'un & l'autre séparément à une seule fraction. Commençant

- * 180. par le dividende, il faut d'abord réduire $c + \frac{d}{e}$ à $\frac{ce + d}{e}$;
 * 190. & faisant la division * de $\frac{b^2}{1}$ par $\frac{ce + d}{e}$, on le réduira à $\frac{b^2 e}{ce + d}$.
 Ainsi le dividende est déjà réduit à $a + \frac{b^2 e}{ce + d}$; on le réduira
 * 200. enfin à $\frac{a(ce + d) + b^2 e}{ce + d}$.

Pour réduire le diviseur à une seule fraction, on réduira

- * 210. d'abord $b - \frac{c^2 + \frac{d^2}{e}}{f}$ à $\frac{bf - \frac{c^2 d + d^2}{e}}{f} = \frac{bf - \frac{c^2 d + d^2}{e}}{f}$. On divisera
 ensuite $\frac{bf - \frac{c^2 d + d^2}{e}}{f}$ par $e = \frac{e}{1}$, & l'on aura $\frac{bf - \frac{c^2 d + d^2}{e}}{ef} = \frac{bf - \frac{c^2 d + d^2}{e}}{ef}$. Le diviseur est déjà réduit à $b - \frac{c^2 d + d^2}{ef}$. On le réduira
 * 220. enfin à $\frac{b(ef - c^2 d - d^2)}{ef}$.

Le dividende & le diviseur proposés étant ainsi préparés, on les divisera l'un par l'autre, & l'on trouvera le quo-

$$\text{tient } \frac{\frac{a(ce + d) + b^2 e}{ce + d}}{\frac{b(ef - c^2 d - d^2)}{ef}} = \frac{a(ce + d) + b^2 e}{b(ef - c^2 d - d^2)} \cdot \frac{ef}{ce + d}.$$

Quand on s'est rendu familier le calcul des fractions & le calcul des grandeurs entières, que l'on a expliqué jusqu'ici, on peut employer l'un avec l'autre dans beaucoup de calculs

qui demandent ce mélange, & qui sont utiles dans l'Analyse, & dans la résolution d'un grand nombre de Problèmes des Mathématiques. On va mettre quelques exemples, qui suffiront aux Commençans pour leur faire concevoir clairement le mélange du calcul des entiers avec le calcul des fractions, quand ils en trouveront; & pour faire eux-mêmes de ces calculs mêlez du calcul des entiers, & du calcul des fractions, quand ils en auront besoin.

294. Si l'on donne a à diviser par $a + x$; il semble qu'il suffice d'écrire $\frac{a}{a+x}$ pour le quotient, & c'est véritablement le quotient, suivant les art. 105, 112 & 115. Cependant on peut, en mêlant le calcul des fractions avec le calcul des entiers, trouver un quotient de la division qu'on propose qui ait des termes à l'infini, & cela est utile en plusieurs rencontres. Voici comment on trouve ce quotient qui contient des termes à l'infini.

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{dividende.} & \left\{ \begin{array}{l} \text{diviseur.} \\ a + x \\ \hline \text{quotient} \end{array} \right. \\
 & a & \\
 1^{\text{re}} \text{ reste} & - x & \\
 & \cdot & \\
 2^{\text{e}} \text{ reste} & + \frac{x^2}{a} & \\
 & \cdot & \\
 3^{\text{e}} \text{ reste} & - \frac{x^3}{a^2} & \\
 & \cdot & \\
 4^{\text{e}} \text{ reste} & + \frac{x^4}{a^3} & \\
 & \cdot & \\
 5^{\text{e}} \text{ reste} & - \frac{x^5}{a^4} & \\
 & \cdot & \\
 & \&c. &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} - \&c. = \frac{a}{a+x}
 \end{array}$$

On divise a par a , & on écrit le quotient 1; puis on multiplie l'autre partie x du diviseur $a + x$ par le quotient 1, & on retranche le produit $+ 1x$ du dividende, ce qui se fait en écrivant $- 1x$ au dividende comme un reste. On efface le dividende a , ou bien on écrit 0 sous a , pour marquer qu'on s'en est servi.

On a donc le premier reste $- x$ pour le dividende sur lequel il faut operer. On divise $- x$ par a , on écrit le quotient $-\frac{x}{a}$; on écrit un 0 sous le dividende $- x$, on multiplie le quotient $-\frac{x}{a}$ par la seconde partie $+ x$ du diviseur,

& on ôte du dividende le produit $-\frac{a^2}{2}$, en l'écrivant au dividende avec le signe opposé $+\frac{a^2}{2}$, comme étant un reste.

On divise ce dividende $+\frac{a^2}{2}$ par a ; on écrit le quotient $+\frac{a}{2}$, on écrit 0 sous le dividende $+\frac{a^2}{2}$. On multiplie la seconde partie $+x$ du diviseur par le quotient $+\frac{a}{2}$; & on ôte du dividende le produit $+\frac{a^2}{2}$, en l'écrivant au dividende avec le signe opposé $-\frac{a^2}{2}$ comme un reste.

On opère sur ce nouveau dividende comme sur chacun des précédens, c'est à dire, on divise $-\frac{a^2}{2}$ par a , on écrit le quotient $-\frac{a}{2}$; on met 0 sous le dividende $-\frac{a^2}{2}$. On prend le produit de $-\frac{a^2}{2}$ par $+x$, seconde partie du diviseur, qui est $-\frac{a^2}{2}$, & on l'ôte du dividende, en l'écrivant au dividende avec le signe opposé $+\frac{a^2}{2}$ comme un reste.

En regardant ce reste comme le dividende, on continue la division tant qu'on veut, & l'on trouve toujours de nouveaux termes pour le quotient. La manière de trouver les termes déjà découverts, qu'on vient d'expliquer, suffit pour faire concevoir comment se font ces sortes de divisions, & comment on découvre des termes du quotient à l'infini.

Cette manière de trouver un quotient, qui ait des termes à l'infini, en faisant la division d'une grandeur a par une grandeur $a+x$, s'appelle une *approximation* à l'infini de la grandeur $\frac{a}{a+x}$. On dit aussi que la suite infinie $1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \&c.$ est la valeur de $\frac{a}{a+x}$; & la manière de trouver cette suite infinie se nomme la *réduction* de $\frac{a}{a+x}$ en la suite infinie, qui en est la valeur.

On peut voir d'autres exemples de ces sortes de divisions dans l'*Analyse démontrée*, article 208.

295. Quand en faisant une division des grandeurs littérales complexes par un diviseur complexe, l'on trouve un reste qui empêche la division d'être exacte; on peut, par des opérations semblables à celles qu'on vient d'expliquer, réduire ce reste en la suite infinie qui en est la valeur, en continuant de diviser ce reste par le diviseur tant qu'on voudra.

296. On peut aussi, par le moyen des opérations qu'on vient d'expliquer, trouver le plus grand diviseur commun de deux grandeurs littérales complexes, sans avoir besoin de la pré-

opération dont on a fait le cinquième article de la méthode
 * du plus grand diviseur commun ; Ce qu'on concevra aisé-^{* 251.}
 ment par un exemple.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad \left(\begin{array}{l} - 2x^2 + 5x - 3 \\ - \frac{2}{1} + \frac{1}{4} \end{array} \right) \\
 \underline{- \frac{2x^3}{1} + \frac{7x^2}{2} - 2} \\
 \text{1. reste.} \quad - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x
 \end{array}$$

Pour trouver le plus grand diviseur commun de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, & de $- 2x^2 + 5x - 3$. Il faut dire x^3 divisé par $- 2x^2$, donne pour quotient $-\frac{1}{2}$; il faut écrire 0 sous x^3 , pour marquer qu'on s'en est servi, & multiplier l'autre partie $+ 5x - 3$ du diviseur par le quotient $-\frac{1}{2}$, & retrancher du dividende les produits $-\frac{1x^2}{2} + \frac{1x}{2}$ à mesure qu'on les forme ; c'est à dire, il faut réduire $- 4x^2$ du dividende à $-\frac{8x^2}{2}$ 278. & en retrancher $-\frac{1x^2}{2}$, & écrire le reste $-\frac{7x^2}{2}$, & réduire aussi $+ 5x$ à $+\frac{10x}{2}$, en ôter $+\frac{1x}{2}$; & écrire le reste $+\frac{7x}{2}$.

Il faut continuer la division, parceque x^2 dans le dividende $-\frac{7x^2}{2} + \frac{7x}{2} - 2$ n'est pas à un moindre degré que dans le diviseur. On dira donc le quotient de $-\frac{7x^2}{2}$ divisé par $- 2x^2$ est $+\frac{7}{4}$, il faut l'écrire au quotient, mettre un 0 sous $-\frac{7x^2}{2}$; multiplier $+ 5x - 3$ par le quotient $+\frac{7}{4}$, & ôter les produits $+\frac{11x}{4} - \frac{21}{4}$ de $+\frac{7x}{2} - 2$ à mesure qu'on les forme ; ce qui se pratique en réduisant $+ \frac{7x}{2}$ à $+\frac{14x}{4}$, c'est à dire au^{* 279.} dénominateur de $\frac{11x}{4}$, & $- 2$ à $-\frac{8}{4}$; puis ôtant $+\frac{11x}{4}$ de $+\frac{14x}{4}$, & $-\frac{8}{4}$ de $-\frac{21}{4}$, & écrivant les restes $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

Dans le reste $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, x a un moindre degré que dans le diviseur $- 2x^2 + 5x - 3$; c'est pourquoi, suivant * la^{* 251. 271.} méthode de trouver le plus grand diviseur commun ; il faut à présent diviser $- 2x^2 + 5x - 3$, qui a servi de diviseur ; & qui devient le dividende, par le reste $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ pris pour diviseur. Mais ce nouveau diviseur ayant pour multiplicateur commun de tous ses termes la fraction $\frac{1}{4}$; car $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \times 1$; il faut en diviser tous les termes par $\frac{1}{4}$ (ou ce qui revient au même, les multiplier par 4, ce qui se fait en effaçant simplement 4) & le diviseur sera $-x + 1$.

Il faut à présent diviser $-2x^2 + 5x - 3$ par $-x + 1$, comme on l'a expliqué dans la division des grandeurs complexes entières; & trouvant que la division est exacte le reste $-x + 1$, qui a servi de diviseur dans cette division exacte, est le plus grand diviseur commun des deux grandeurs proposées.

On doit remarquer dans cet exemple de division, qu'il est quelquefois nécessaire, pour faire une division des grandeurs complexes, par la méthode de la division des grandeurs complexes entières, de se servir du calcul des fractions; on en va mettre un autre exemple pour faire concevoir clairement aux Commensans la manière de faire ces sortes de divisions.

$$\begin{array}{r}
 \text{A} \\
 \frac{7}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2a^2x + 12ab}{8} - \frac{1}{4}a^2b \\
 \hline
 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{2a^2}{8}x - \frac{1}{4}a^2b
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{B} \\
 \left(\frac{7}{8}x^3 - \frac{1}{4}ax + ab \right) : \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}a \right)
 \end{array}$$

297. Pour diviser la grandeur $\frac{7}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2a^2x + 12ab}{8} - \frac{1}{4}a^2b$ par la grandeur $\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}a + ab$: je dis $\frac{7}{8}x^3$ divisé par $\frac{1}{8}x$, le quotient $\frac{7}{8}x$. J'écris $\frac{7}{8}x$ au quotient, & je mets 0 sous $\frac{7}{8}x^3$. Je multiplie le reste du diviseur $-\frac{1}{8}ax + ab$ par le quotient $+\frac{7}{8}x$; & j'ôte du dividende les produits $-\frac{7}{8}ax^2 + \frac{7a^2b}{8}$ à mesure que je les forme, ce qui se fait ainsi. Je multiplie chaque terme de $-\frac{7}{8}ax^2$ par 2, pour réduire cette fraction au dénominateur 8; & elle devient $-\frac{7}{4}ax^2$; j'ôte $-\frac{7}{4}ax^2$ de $-\frac{1}{2}x^2$, & j'écris le reste $-\frac{1}{4}x^2$. Je réduis aussi $+\frac{7a^2b}{8}$ au dénominateur 48, en multipliant ses deux termes par 16, & j'ai $+\frac{12a^2b}{48}$, que j'ôte de $+\frac{12a^2b}{48}$; & il reste 0 que j'écris. Ainsi le dividende sur lequel il faut opérer est $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{2a^2}{48}x - \frac{1}{4}a^2b$.

- Je dis le quotient de $-\frac{1}{4}x^2$, divisé par $+\frac{1}{8}x$, est $-\frac{2}{8}a$
 *169. = * $-\frac{1}{4}a$ J'écris au quotient $-\frac{1}{4}a$, je mets 0 sous $-\frac{1}{4}x^2$; je multiplie la seconde partie $-\frac{1}{8}ax + ab$ du diviseur par le nouveau quotient $-\frac{1}{4}a$; & à mesure que je forme les
 *71. produits $+\frac{1}{32}a^2x = * + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}a^2x = + \frac{1}{16}a^2x$, & $-\frac{1}{4}a^2b$,
 je

je les ôte du dividende; & trouvant qu'il reste 0, je suis assuré que $\frac{7}{4}x - \frac{1}{4}a$ est le quotient que je cherchois.

298. On fera remarquer sur ces sortes d'exemples de division, où il faut suivre la méthode de la division des grandeurs complexes entières, & y employer aussi la division & les autres opérations des fractions; que quand la grandeur complexe qui est le dividende, & la grandeur complexe qui est le diviseur contiennent des fractions, c'est à dire, quand chacun des termes, ou quelques-uns des termes de ces grandeurs complexes sont des fractions; on peut réduire le dividende & le diviseur à n'avoir aucunes fractions, de manière pourtant que l'on n'en trouvera pas moins ensuite le véritable quotient. Par exemple, si l'on propose de diviser la grandeur A par la grandeur B, il faut d'abord réduire tous les termes de A à un même dénominateur sans changer leur valeur, & réduire de même les termes de B; & l'on aura le dividende a, & le diviseur b. Il faut ensuite réduire a & b

$$A \quad \frac{7x^3}{16} - \frac{5ax^2}{16} + \frac{9x^2x + 12abx}{64} - \frac{5}{4}a^2$$

$$B \quad \frac{3x^2}{32} - \frac{1ax}{32} + a$$

$$a \quad \frac{28x^3}{64} - \frac{35ax^2}{64} + \frac{9x^2x}{64} + \frac{12abx}{64} - \frac{80a^2}{64}$$

$$b \quad \frac{3x^2}{32} - \frac{1ax}{32} + a$$

$$d \quad \frac{28x^3}{64} - \frac{35ax^2}{64} + \frac{9x^2x}{64} + \frac{12abx}{64} - \frac{80a^2}{64}$$

$$b \quad \frac{3x^2}{32} - \frac{1ax}{32} + a$$

$$A \quad \frac{28x^3}{64} - \frac{35ax^2}{64} + \frac{9x^2x}{64} + \frac{12abx}{64} - \frac{80a^2}{64}$$

$$B \quad \frac{3x^2}{32} - \frac{1ax}{32} + a$$

à un même dénominateur commun sans changer de valeur *, * 270.
& l'on aura a pour le dividende, & b pour le diviseur. Enfin

chaque terme de a & de b étant multiplié par la même grandeur $\frac{1}{a+b}$, il faut les diviser tous par cette grandeur, ou, ce qui revient au même, les multiplier par $\frac{a+b}{1}$; ce qui se fait en effaçant simplement le diviseur commun à a & b ; & A sera le dividende, & B le diviseur, qui sont l'un & l'autre sans fractions.

- Faisant la division de A par B , on trouvera le même quotient, que si l'on divisoit immédiatement A par B . Car
- * 106. le * quotient de A par B doit être à l'unité comme A est à B .
 - * 71 & Et il est évident * que A est à B , comme A est à B ; ainsi le
 - 109. quotient de A divisé par B , & celui de A divisé par B sont égaux; puisqu'ils ont le même rapport à l'unité, leur rap-
 - * 106. port à l'unité étant * le même que celui de A à B , ou celui
 - & 111. de A à B .

7^e REMARQUE.

Où l'on explique la manière de faire le calcul des fractions par le calcul des exposans des puissances.

DEFINITION OU SUPPOSITION.

299. **O**N a déjà dit * que toute grandeur représentée par une
- * 143. lettre pouvoit être regardée comme une puissance. Quand elle n'a qu'une dimension comme a , c'est la première puissance de a , dont l'exposant est 1. Quand a est élevée à une puissance plus haute comme a^3 , son exposant 3 marque le degré de la puissance. Pour marquer en general toutes les puissances auxquelles a peut être élevée, on lui donne pour exposant une lettre. a^n marque en general toutes les puissances auxquelles a peut être élevée; l'exposant n représentant
 - * 145 & tous les nombres 1, 2, 3, &c. On a aussi vu * que quand une
 - 146. grandeur où la puissance d'une grandeur étoit au dénominateur d'une fraction, il n'y avoit qu'à l'écrire au numérateur, en changeant le signe de l'exposant de la puissance. Par exemple $\frac{a}{x} = ax^{-1}$, $\frac{a}{x^2} = ax^{-2}$, $\frac{a^2}{x^3} = a^2x^{-3}$, $\frac{a^2}{x^2} = a^2x^{-2}$, $\frac{a^2+b^2}{x} = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x} = ax^{-1} + bx^{-1}$; $\frac{a}{x^2} = ax^{-2}$, &c. D'où l'on voit la manière de réduire les fractions aux expressions des grandeurs entières, $\frac{a}{x} = ax^{-1}$; $\frac{a+b}{x+d} = \frac{a}{x+d} + \frac{b}{x+d}$; $\frac{a}{x+d} = \frac{a}{x} \times \frac{1}{1+\frac{d}{x}} = \frac{a}{x} \times \frac{1}{1+\frac{d}{x}}$.

L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS

PAR LE CALCUL DES EXPOSANS.

300. **L**ES fractions étant réduites aux expressions des grandeurs entières ; elles doivent être ajoutées les unes aux autres, & retranchées les unes des autres comme les grandeurs entières.

Par exemple, la somme de $+ay^{-1} - ab^{-1}$, & de $4ay^{-1} + 3ab^{-1}$, est $5ay^{-1} + 2ab^{-1}$.

La différence de $4ay^{-1} + 3ab^{-1}$, & de $+ay^{-1} - ab^{-1}$, est $3ay^{-1} + 4ab^{-1}$.

LA MULTIPLICATION.

301. **Q**UAND les fractions sont exprimées par le moyen des exposans, & réduites par là à l'expression des grandeurs entières, & qu'elles sont complexes; pour les multiplier, on les joint ensemble, en observant * la règle des signes, par rapport aux signes qui les précédent; mais on ne change rien dans les signes des exposans, & l'on suit * le calcul des exposans quand une même lettre se trouve dans le multiplié & dans le multiplicateur; c'est à dire, on ajoute ensemble les exposans de cette lettre, & la somme, ou la différence quand ils sont opposés, est l'exposant de cette lettre dans le produit. * 96. * 142.

Quand les grandeurs sont complexes, on les multiplie en les joignant par le signe x de la multiplication; & on ne fait pas d'autre multiplication, quand l'exposant de l'une des deux grandeurs complexes est négatif.

Par exemple, le produit de ab^{-1} par ac^{-1} est $a^2b^{-1}c^{-1}$; le produit de ax^{-1} par ax^{-1} est a^2x^{-2} , le produit de ax^2 par ax^{-1} est $a^2x^{2+1-1} = a^2$; le produit de ax^m par ax^{-n} est a^2x^{m-n} . Mais le produit de $x^2 - ax$ par $x - a$ est $x^2 - ax \times x - a$.

LA DIVISION.

302. **P**OUR diviser une fraction exprimée par le moyen des exposans, par une autre exprimée aussi par les exposans; il faut changer les signes des exposans des grandeurs du divi-

feur dans les grandeurs incomplexes, & le signe du seul exposant du diviseur considéré comme une seule grandeur quand il est complexe, & ensuite multiplier le dividende par le diviseur, & le produit sera le quotient.

Par exemple, pour diviser ab^{-1} par cd^{-1} , je change les signes des exposans du diviseur qui devient $c^{-1}d^{+1}$, & je multiplie ab^{-1} par $c^{-1}d^{+1}$, & le produit $ab^{-1}c^{-1}d^{+1}$ est le quotient.

Pour diviser $a + b$ par $c - d^{-1}$, je change le signe $-$ de l'exposant du diviseur considéré comme une seule grandeur, & je forme le produit $a + b \times c - d^{+1}$; c'est le quotient.

Pour diviser $a^m x^n$ par ax^{-1} , je change ax^{-1} en $a^{-1}x^{+1}$ & je prends le produit de $a^m x^n$ par $a^{-1}x^{+1}$ qui est ax^{n-1} . C'est le quotient que je cherchois.

Pour diviser $a^n x^m$ par $a^{m-1} x^{n+1}$, je change $a^{m-1} x^{n+1}$ en $a^{-m+1} x^{-n-1}$, & je multiplie ensuite $a^n x^m$ par $a^{-m+1} x^{-n-1}$, & le produit $a^{n-m+1} x^{m-n-1}$ est le quotient.

On remarquera que quand une grandeur n'a point d'exposant, on sous-entend qu'elle a pour exposant l'unité positive; mais quand elle doit avoir pour exposant l'unité négative, on doit toujours écrire l'unité négative pour son exposant.

On remarquera aussi que quand une fraction a ses deux termes, si quelque lettre du dénominateur avoit un exposant négatif, elle seroit censée être au numérateur *.

Par exemple, dans $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d}$, $\frac{ax^m}{x^{-n}}$; c^{-1} & x^{-n} marquent que c^{-1} & x^{-n} appartiennent au numérateur. $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d} =$

$$\frac{ab^{-1}c}{d} = ab^{-1}cd^{+1}, \quad \frac{ax^m}{x^{-n}} = ax^{m+n}.$$

* 190. Car $\frac{ab^{-1}}{c^{-1}d} = \frac{a}{\frac{c}{b}} = * \frac{a}{c} = * ab^{-1}cd^{+1}$. De même

* 145. $\frac{ax^m}{x^{-n}} = \frac{ax^m}{\frac{1}{x^n}} = * ax^{m+n}.$

D'où l'on voit la raison de la règle qu'on a donnée pour la division, qui n'est fondée que sur ce que ces différentes expressions marquent une même chose. Par exemple, $\frac{ab^{-1}}{cd^{-1}}$

$$= \frac{a}{b} = * \frac{a}{b} = * ab^{-1} c^{-1} d.$$

• 290.

• 141.

La formation des puissances des fractions.

PROBLÈME IV.

303. **E**LEVER une fraction à une puissance quelconque, dont l'exposant est un nombre entier positif.

Règle ou opération Il faut élever séparément le numérateur & le dénominateur * à la puissance marquée par l'exposant; * 159 & la fraction, formée de ces deux puissances du même degré, sera la puissance qu'on cherche. 117.

EXEMPLES.

POUR élever $\frac{2}{3}$ à la troisième puissance, il faut élever 2 à la troisième puissance, & l'on aura 8; & ensuite élever 3 à la troisième puissance, & l'on aura 27; il faut écrire $\frac{8}{27}$ pour la troisième puissance de $\frac{2}{3}$.

Pour élever $\frac{2}{3}$ à la seconde puissance, à la troisième, &c. il faut écrire $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$, &c.

Si l'on veut élever $\frac{x-y}{z}$ à la seconde puissance; il faut élever $x - y$ à la seconde puissance, & former la fraction $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{z^2}$.

Quand on a des grandeurs complexes, dont quelques-uns des termes, ou même tous, sont chacun une fraction, à élever à une puissance; il faut employer les opérations des grandeurs entières & le calcul des fractions; ce que l'on fera clairement concevoir par les exemples suivans.

Pour élever $x - \frac{1}{2}a$ à la seconde puissance, il faut multiplier $x - \frac{1}{2}a$ par $x - \frac{1}{2}a$; & l'on trouvera $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$ pour le carré que l'on cherchoit.

Pour élever $\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}c$ à la troisième puissance; on trouvera, en suivant les règles * de la formation des puissances, & en se servant aussi du calcul des fractions, $\frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{4}ay^2 + \frac{1}{12}a^2y - \frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{6}cy^2 - \frac{1}{12}acy + \frac{1}{27}a^2c + \frac{1}{4}cy^2 - \frac{1}{6}ac^2 + \frac{1}{27}c^3$. * 172.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir clairement la formation des puissances des fractions, & des grandeurs complexes qui contiennent des fractions.

- Démonstration du Problème.* La formation des puissances
- * 159. d'une fraction $\frac{a}{b}$ * se doit faire par la multiplication de cette fraction par elle-même, répétée autant de fois qu'il y a d'unités moins une dans l'exposant de la puissance à laquelle on veut l'élever; c'est à dire, il faut la multiplier une fois par elle-même pour avoir sa seconde puissance, deux fois pour avoir la troisième, trois fois pour avoir la quatrième, & ainsi de suite. Mais pour multiplier une fraction $\frac{a}{b}$ par elle-même, *
 - * 187. * il faut multiplier le premier terme par lui-même, & le second terme par lui-même, & la fraction $\frac{a^2}{b^2}$ faite des produits, est le produit qu'on cherche. Pour multiplier ce produit $\frac{a^2}{b^2}$ par $\frac{a}{b}$; il faut de même multiplier a^2 par a , & b^2 par b , & $\frac{a^3}{b^3}$ sera le produit qu'on cherche, & ainsi de suite. C'est aussi ce que prescrit le Problème : par conséquent le Problème prescrit ce qu'il faut faire pour élever une fraction à telle puissance qu'on voudra.

L'extraction des racines des puissances des fractions.

PROBLÈME V.

304. **T**ROUVER la racine d'une fraction, laquelle fraction est une puissance quelconque dont l'exposant est un nombre entier; c'est à dire, trouver la racine d'une fraction qui est une seconde puissance, ou une troisième, ou une quatrième, &c.
- * 191, 200 & les suivants, jusqu'à 207 compris. *Règle ou opération.* Il faut trouver, * par les règles de l'extraction des racines des grandeurs entières, la racine du numérateur, & la racine du dénominateur de la fraction proposée, & faire une fraction de ces deux racines; ce sera la racine que l'on cherche.

Si le numérateur ou le dénominateur de la fraction proposée ou tous les deux contenoient des termes qui fussent des fractions, il faudroit joindre aux règles de l'extraction des racines des grandeurs entières le calcul des fractions, comme on le verra dans les exemples.

E X E M P L E I.

POUR trouver la racine quarrée de $\frac{11119}{10716}$, il faut chercher séparément les racines quarrées de 15129 & de 20736; & l'on trouvera 123 & 144. Il faut les écrire en fraction, & $\frac{123}{144}$ sera la racine qu'on cherchoit.

A V E R T I S S E M E N T.

IL est inutile de mettre ici d'autres exemples pour l'extraction des racines seconde, troisième, quatrième, &c. des fractions numériques, n'y ayant pas d'autres difficultez, que celles qu'on trouve à extraire les racines des puissances des nombres entiers, qui ont été toutes expliquées dans le Livre précédent. Il faut seulement remarquer que quand on cherche la racine d'une fraction numérique, & que chacun de ses deux termes n'est pas une puissance parfaite du même degré dont l'exposant est un nombre entier quelconque n ; il faut réduire la fraction proposée aux moindres termes; & si chaque terme du moindre rapport est une puissance parfaite du même degré dont l'exposant est n ; on en trouvera la racine par le Problème. Si les deux termes du moindre rapport ne sont pas chacun une puissance parfaite dont l'exposant est n ; on ne sçauront trouver la racine qu'on cherche que par approximation, comme on le fera voir après les exemples suivans.

E X E M P L E II.

POUR avoir la racine quarrée de $\frac{a^2}{b^2}$, la racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$, la racine quatrième de $\frac{a^4}{b^4}$, la racine cinquième de $\frac{a^5}{b^5}$, & en general la racine n de $\frac{a^n}{b^n}$; il faut écrire $\frac{a}{b}$; c'est la racine qu'on cherche.

Pour avoir la racine deuxième de $\frac{a^2}{b^2}$, il faut écrire $\frac{a}{b}$.

Pour avoir la racine troisième de $\frac{a^3}{b^3}$, il faut écrire $\frac{a}{b}$. Pour

avoir la racine n de $\frac{a^n}{b^n}$, il faut écrire $\frac{a}{b}$.

AVERTISSEMENT.

IL n'y a pas d'autres difficultez pour trouver les racines des fractions litterales dont les deux termes sont chacun une grandeur entiere complexe, que celles qui se rencontrent dans la recherche des racines des puissances complexes entieres qui ont été expliquées dans le premier Livre *. La seule difficulté est quand une grandeur litterale complexe, dont on cherche la racine, contient des termes qui sont des fractions. En voici quelques exemples pour faire voir la maniere de joindre le calcul des fractions aux regles de l'extraction des racines des grandeurs complexes.

EXEMPLE III.

$$\begin{array}{r} x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \left(\begin{array}{r} x - \frac{1}{2}a \\ + 2x - \frac{1}{2}a \end{array} \right.$$

POUR trouver la racine quarrée de $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, 1°. Je dis la racine de x^2 est x , j'écris x à la racine, & j'écris 0 sous x^2 , pour marquer que je m'en suis servi.

2°. Pour continuer l'operation, & trouver la seconde partie de la racine, je regarde $-ax + \frac{1}{4}a^2$ comme un dividende; pour former le diviseur, je prends le double * $2x$ de la partie de la racine déjà découverte; & je divise $-ax$ par $2x$, en disant le quotient de $-ax$ par $+2x$ est $-\frac{1}{2}a$. J'écris $-\frac{1}{2}a$ pour la seconde partie de la racine, & je l'écris encore au devant du diviseur. Employant la multiplication des fractions, je multiplie $+2x - \frac{1}{2}a$ par $-\frac{1}{2}a$, & je retranche les produits $-ax + \frac{1}{4}a^2$ de la puissance proposée; & comme il ne reste rien, il s'ensuit que $x - \frac{1}{2}a$ est la racine exacte de la puissance proposée.

EXEMPLE

EXEMPLE IV.

A	R
$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{27}a^3 \\ + \frac{1}{12}cy^2 - \frac{1}{2}acy + a^2c \\ + \frac{1}{12}c^2y - \frac{1}{2}ac^2 \\ + \frac{1}{27}c^3 \end{aligned} \right\}$	$\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$ <hr style="width: 100%;"/> $\frac{1}{2}y = a \text{ de la formule.}$ $+ \frac{1}{2}y^2 \text{ diviseur } = a^2 \text{ de la formule}$ $- \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = b \text{ de la formule.}$
$\left. \begin{aligned} - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{27}a^3 \\ + \frac{1}{12}cy^2 - \frac{1}{2}acy + a^2c \\ + \frac{1}{12}c^2y - \frac{1}{2}ac^2 \\ + \frac{1}{27}c^3 \end{aligned} \right\} = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ de la formule.}$	

POUR trouver la racine cubique ou troisième de la troisième puissance A

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{27}a^3 \\ + \frac{1}{12}cy^2 - \frac{1}{2}acy + a^2c \\ + \frac{1}{12}c^2y - \frac{1}{2}ac^2 \\ + \frac{1}{27}c^3 \end{aligned}$$

dont les termes contiennent des fractions, je me sers de la formule de la troisième puissance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Et, supposant $+\frac{1}{2}y^3$ représentée par a^3 de la formule; je dis la racine troisième de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}$, & la racine troisième de y^3 est y . Ainsi j'écris $\frac{1}{2}y$ à la racine R, & je mets 0 sous $\frac{1}{2}y^3$ dont je me suis déjà servi.

2°. Supposant $\frac{1}{2}y = a$ de la formule, je prens $+\frac{1}{2}y^2$ pour le diviseur représenté par $3a^2$, & je divise $-\frac{1}{2}ay^2 + \frac{1}{12}cy^2$ par $+\frac{1}{2}y^2$, en employant la division des fractions, & j'écris à la racine R le quotient $-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$, que je suppose représenté par b de la formule.

Je forme ensuite, par la multiplication des fractions, les

produits que prescrit la formule $+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, &c. je trouve $-\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$
 $+ a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2$, je les retranche de la puissance proposée; & trouvant que le reste est zero, c'est à dire qu'il n'y a aucun reste, je vois par là que $\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}c$ est la racine troisième de la grandeur proposée A.

THEOREME.

- 305 *LORSQU'UN* nombre entier, qu'on nommera A, est considéré comme une puissance, c'est à dire comme étant un quarré ou une troisième puissance, ou une quatrième; & en general, comme une puissance dont l'exposant est un nombre entier quelconque représenté par n; supposé qu'il ne soit pas une puissance parfaite; c'est à dire, qu'il n'y ait pas de nombre entier qui multiplié par lui-même (une fois, si A est quarré; deux fois, si A est une troisième puissance; trois fois, si A est une quatrième puissance; & en general, autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans le nombre entier n qui est l'exposant de la puissance de A,) donne un produit égal à A; il ne peut y avoir aucune fraction numérique, qu'on représentera par $\frac{a}{b}$, qui soit la racine exacte du nombre entier A; c'est à dire, qui étant multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans n, donne un produit $\frac{a^n}{b^n}$ qui soit égal à A.

Démonstration. Si l'y avoit une telle fraction $\frac{a}{b}$, on auroit par cette supposition $\frac{a^n}{b^n} = A$, c'est à dire égale à un nombre entier A; & cette fraction seroit une puissance parfaite, puisque a & b sont supposés chacun un nombre entier qui forment la fraction $\frac{a}{b}$. D'où il suivroit * que le nombre entier A seroit une puissance parfaite: ce qui détruit la supposition qu'on a faite que A n'est pas une puissance parfaite. Par conséquent il est impossible qu'il y ait une fraction numérique $\frac{a}{b}$ qui puisse être la racine d'un nombre entier A, lorsque ce nombre entier n'est pas une puissance parfaite. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME II

306. *Si une fraction numerique representée par $\frac{A}{B}$, est un moindre rapport, & si chacun de ses termes A & B n'est pas une puissance parfaite seconde, ou troisieme, ou quatrieme; ou en general une puissance parfaite qui ait pour exposant un nombre entier quelconque n; ou bien si la fraction $\frac{A}{B}$ n'étant pas un moindre rapport, le moindre rapport qui lui est égal qu'on supposera être $\frac{1}{2}$, n'a pas pour ses termes a & b deux nombres qui soient chacun une puissance parfaite seconde ou troisieme, ou en general une puissance parfaite, qui ait pour exposant un nombre entier quelconque n; il ne peut pas y avoir une fraction numerique qu'on représentera par $\frac{C}{D}$ qui soit la racine de la fraction proposée $\frac{A}{B}$; c'est à dire, qui étant multipliée par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans n donne un produit $\frac{C^n}{D^n}$ qui soit égal à $\frac{A}{B}$.*

Démonstration. S'il y avoit une telle fraction $\frac{C}{D}$, laquelle, si elle n'est pas elle-même un moindre rapport, ait pour son moindre rapport $\frac{1}{2}$, (& si elle est un moindre rapport, ce qu'on va dire de $\frac{1}{2}$ conviendra à $\frac{C}{D}$) on auroit par cette supposition $\frac{C^n}{D^n} = * \frac{C^n}{D^n} = \frac{A}{B}$; & si $\frac{A}{B}$ n'est pas un moindre rapport, & que le moindre rapport égal à $\frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{2}$, l'on auroit $\frac{C^n}{D^n} = \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$. Mais $\frac{C^n}{D^n} *$ est un moindre rapport, & $\frac{a}{b}$ n'est pas un moindre rapport, & $\frac{C^n}{D^n}$ & $\frac{a}{b}$ sont chacun une puissance parfaite; puisque c & d sont supposez être deux nombres entiers dont est formée la fraction $\frac{1}{2}$: & $\frac{1}{2}$ étant aussi suppose un moindre rapport; il faut que les rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{C^n}{D^n}$ ne soient pas seulement égaux; mais que ce soit précisément le même rapport, & que $a = C^n$, & $b = D^n$. D'où il suivra que a & b sont chacun une puissance parfaite du même degré dont n est l'exposant:

cela détruit la supposition qu'on a faite que a & b n'étoient pas une puissance parfaite. Il ne peut donc pas y avoir une fraction numérique $\frac{c}{d}$ qui soit la racine de la fraction proposée $\frac{a}{b}$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

307. **O**N déduit du premier Théorème qu'on ne sauroit trouver de fraction numérique qui soit la racine exacte d'un nombre entier, qui est une puissance numérique imparfaite.

COROLLAIRE II.

308. **O**N déduit de même du second Théorème que quand les deux termes d'une fraction numérique réduite aux moindres termes ne sont pas chacun une puissance numérique parfaite d'un même degré, on ne sauroit trouver de fraction numérique qui soit la racine exacte de cette première fraction.

COROLLAIRE III.

Où l'on démontre les incommensurables.

309. **N**OMMANT a tout nombre entier qui est une puissance numérique imparfaite, dont l'exposant est un nombre entier quelconque n , & la racine véritable, qui ne sauroit être exprimée par une fraction numérique, étant nommée $\sqrt[n]{a}$.
 Nommant aussi $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ la racine véritable de toute fraction numérique $\frac{a}{b}$ réduite à ses moindres termes, chacun desquels n'est pas une puissance parfaite de même degré dont l'exposant soit un nombre entier quelconque n . Je dis que $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ne peuvent chacune avoir aucune aliquote commune, ni avec l'unité, dont sont formez les nombres a & la fraction $\frac{a}{b}$, ni avec aucun nombre soit entier soit rompu formé de cette unité. Ainsi $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ sont chacune une grandeur incommensurable, avec cette unité & avec tout nombre soit entier soit rompu formé de cette unité.

Démonstration. Si $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ avoient chacune une aliquote commune avec l'unité ; on pourroit former une fraction dont le dénominateur seroit le nombre, qu'on nommera m , qui exprimeroit combien de fois cette aliquote est contenue dans l'unité, & le numérateur seroit le nombre, qu'on nommera i , qui exprimeroit combien de fois cette aliquote seroit contenue dans la grandeur $\sqrt[n]{a}$, ou dans $\sqrt[n]{b}$. Et $\sqrt[n]{a}$ ou $\sqrt[n]{b}$ seroit égale à cette fraction $\frac{i}{m}$ de l'unité. Ainsi un nombre entier qui est une puissance imparfaite, comme aussi une fraction numérique, qui étant réduite aux moindres termes, est une puissance imparfaite, auroit pour sa racine une fraction numérique de l'unité. On a démontré * que cela étoit impossi-³⁰⁷ & ble. Donc $\sqrt[n]{a}$, & $\sqrt[n]{b}$ ne sauroient chacune avoir une ali-³⁰⁸ quote commune avec l'unité.

$\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ ne sauroient non plus chacune avoir une aliquote commune avec aucun nombre, soit entier, soit rompu, formé de l'unité ; car tous les nombres possibles formez de l'unité peuvent * se réduire à des fractions simples de l'u.³⁰⁹ 185. nité. Ainsi il suffit de démontrer que $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ ne sauroient avoir d'aliquote commune avec une fraction simple de l'unité, pour faire voir qu'elles ne sauroient avoir d'aliquote commune avec tout nombre possible formé de l'unité : c'est ce qu'on va démontrer.

Si $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ pouvoient chacune avoir une aliquote commune avec une fraction de l'unité, on pourroit former une fraction égale à $\sqrt[n]{a}$ ou à $\sqrt[n]{b}$, laquelle auroit pour dénominateur un nombre qu'on nommera p , qui marqueroit combien de fois cette aliquote est dans la fraction de l'unité, & pour numérateur un nombre q , qui exprimeroit combien de fois cette aliquote est dans $\sqrt[n]{a}$ ou $\sqrt[n]{b}$: & l'on auroit par

conséquent $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ égale à $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}$ seroit une fraction de
 * 283. fraction de l'unité, qui étant * réduite à une fraction simple
 de l'unité qu'on nommera $\frac{1}{2}$, seroit égale à $\sqrt[n]{a}$ ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

On déduit donc nécessairement de la supposition que $\sqrt[n]{a}$
 ou $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ eussent chacune une aliquoté commune avec quelque
 nombre possible que ce fût formé de l'unité, que $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
 seroient chacune une fraction de l'unité. Mais on a démon-
 * 307 tré * que cela étoit impossible. Par conséquent $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
 & 308. ne sçauroient avoir aucune aliquoté commune avec l'unité,
 ni avec aucun nombre formé de l'unité. Donc $\sqrt[n]{a}$ & $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
 sont chacune incommensurable avec l'unité & avec tout nom-
 bre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Avertissement.

LA Geometrie démontre que ces racines des puissances
 numeriques imparfaites peuvent s'exprimer exactement par
 des lignes.

Remarque.

* 199. ON a donné dans le premier Livre * la methode d'appro-
 cher tant près qu'on voudra de la racine veritable d'une puis-
 sance numerique imparfaite, laquelle racine veritable ne
 * 309. sçauroit * s'exprimer exactement par aucune fraction, & on
 s'est servi pour faire cette approximation du calcul des par-
 * 122. ties décimales qui sont * de veritables fractions, quoique
 leur calcul soit le même que celui des nombres entiers. On
 pourroit encore, quand on a trouvé la racine en entiers de la
 plus grande puissance parfaite entiere qui est contenue dans
 la puissance imparfaite dont on cherche la racine; on pour-
 roit, dis-je, continuer l'extraction de la racine sur le reste
 par le calcul des fractions, & l'on trouveroit une suite de
 fractions, qui jointe à la partie de la racine déjà découverte
 seroit la racine approchée que l'on cherche; mais le calcul
 est embarrassant, & l'approximation des racines est bien plus

aisée par le calcul des parties décimales qu'on a expliqué dans le premier livre. * Enfin il y a d'autres méthodes d'ap-
 * 129.
 procher à l'infini des racines des puissances numériques imparfaites qui supposent les règles de l'Analyse. On a donné deux de ces méthodes dans l'Analyse démontrée, Livre VI. Section III. depuis l'article 167 jusqu'à la fin de la Section.

On va donner ici la méthode d'approcher tant près qu'on voudra de la racine d'une fraction numérique qui est une puissance imparfaite, en y employant le calcul des parties décimales à peu près comme dans le premier Livre, art. 199. afin d'accoutumer les Commencans à une même méthode.

Méthode d'approximation des racines des fractions numériques.

310. **P**OUR approcher tant près qu'on voudra à l'infini de la racine d'une fraction qu'on conçoit être une puissance dont l'exposant est un nombre entier quelconque n , & dont chaque terme n'est qu'une puissance imparfaite du degré $n : 1^o$. Il faut réduire * la fraction proposée à une grandeur déci-
 * 176.
 male, donnant à cette grandeur décimale tant de rangs de parties décimales qu'on voudra, pourvu qu'on puisse les partager en tranches chacune d'autant de rangs qu'il y a d'unités dans n . 2^o . Regardant cette grandeur décimale comme une puissance dont l'exposant est n , il faut en extraire la racine comme dans le premier Livre *. La racine qu'on
 * 191.
 trouvera sera la racine approchée que l'on cherchoit.

EXEMPLE I.

POUR trouver par approximation la racine de $\frac{5}{8}$ considérée comme une seconde puissance, 1^o * Je la réduis à la
 * 176.
 grandeur décimale 0.625 qui lui est égale; & comme pour faire cette réduction j'ai ajouté trois zeros au numérateur 5, & que la division de 5.000 par le dénominateur 8 m'a donné le quotient exact 0.625. J'ajoute à cette grandeur décimale tant de zeros que je veux, observant seulement que je puisse partager les rangs des parties décimales en tranches chacune de deux rangs, parceque j'en cherche la racine quarrée, & que l'exposant n représente 2 dans l'extraction de la racine quarrée ou deuxième.

Je prens donc pour la fraction proposée la grandeur déci-

304 LA SCIENCE DU CALCUL, &c.
trale 0., 62, 30, 00, 00, qui est équivalente à la proposée $\frac{1}{4}$.

2^e Je trouve la racine quarrée 0.7905 de la puissance 0.62500000 équivalente à $\frac{1}{4}$. Cette racine est approchée jusqu'aux dix millièmes; c'est à dire, elle diffère moins d'une dix millième de la racine veritable qu'on ne scauroit exprimer exactement par une fraction. Ainsi c'est la racine approchée de la fraction proposée $\frac{1}{4}$.

En continuant l'approximation jusqu'aux cent millièmes, c'est à dire jusqu'au cinquième rang des décimales dans la racine approchée, je trouve 6 pour le cinquième rang qui vaut six cens-millièmes, qui surpasse la moitié d'une dix millième, c'est pourquoi si je me borne au quatrième rang, qui est celui des dix millièmes, j'ajoute, si je veux, une unité au quatrième rang, afin que l'erreur soit moindre, & la racine approchée que je cherchois est 0.7906.

EXEMPLE II

POUR faire l'approximation de la racine quarrée de $3\frac{1}{4}$, =
* 176. $\frac{13}{4}$, 1^e. Je * réduis $\frac{13}{4}$ à la grandeur décimale 3.2512857142. Et comme il arrive que quoique j'ajoute beaucoup de zeros au numerateur, la division de ce numerateur par 42 n'est pas exacte; je continue la division jusqu'à ce que j'aye un quotient qui ait un nombre arbitraire de rangs de décimales, que je puisse pourtant partager en tranches chacune de deux rangs. Je me borne, si je veux, à cinq tranches chacune de deux rangs, qui me donneront une racine approchée qui aura cinq rangs de décimales, & la racine approchée ne différera pas d'une cent-millième partie de l'unité de la veritable qu'on ne scauroit exprimer par une fraction.

Le quotient de la division que j'ai employée pour réduire $\frac{13}{4}$ en grandeur décimale n'étant pas exact, la grandeur décimale 3.25 &c. n'est pas exactement équivalente à $\frac{13}{4}$. Mais la difference n'étant pas $\frac{1}{100000000}$ de l'unité, on peut la regarder comme étant équivalente sans erreur sensible à $\frac{13}{4}$.

* 177. 2^e. Je trouve * la racine deuxième 1.79184 de la puissance décimale 3.2512857142 qui est équivalente à $\frac{13}{4}$. Cette racine est approchée jusqu'au cinquième rang de décimales, c'est

c'est à dire jusqu'aux cent millièmes. C'est la racine approchée que je cherchois.

Avertissement.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir clairement la méthode d'approximation des racines des fractions numériques. Les Commensurans peuvent l'appliquer à trouver les racines 3^{me}, &c 4^{me}, &c. des fractions.

Démonstration Il est évident que la méthode fait découvrir la racine approchée tant près qu'on voudra de la véritable racine d'une grandeur décimale équivalente, sans erreur sensible, à la fraction proposée, par conséquent elle fait trouver la racine approchée que l'on cherchoit.

Méthode d'approximation des racines des grandeurs littérales complexes, quand ces grandeurs sont des puissances imparfaites.

311. **P**OUR approcher à l'infini de la racine d'une grandeur littérale complexe qui est une puissance imparfaite, il n'y a qu'à suivre les règles de l'extraction des racines des grandeurs littérales complexes, qui sont des puissances parfaites, en employant le calcul des fractions tout comme l'on a fait dans le 3^e & le 4^e Exemple du 5^e Problème: * il n'y a de différence * 304. qu'en ce que les puissances du 3^e & 4^e Exemple du 5^e Problème étant parfaites, l'on a fait l'extraction des racines sans aucun reste; & dans les puissances imparfaites, il se trouve toujours un reste, & l'on peut continuer l'opération, ou l'approximation à l'infini: ce qu'on concevra clairement par les Exemples suivans.

EXEMPLE I.

Puissance imparfaite.

$$x^3 - x^2$$

$$1. \text{ reste. } \rightarrow \frac{1}{4} x^2$$

$$2. \text{ reste. } \rightarrow \frac{1}{16} x^4 - \frac{1}{64} x^{12}$$

$$3. \text{ reste. } \rightarrow \frac{1}{64} x^4 - \frac{1}{256} x^{12} - \frac{1}{2048} x^{16}$$

Racine approchée:

$$\left(x - \frac{1}{20} x^2 - \frac{1}{32} x^4 - \frac{1}{128} x^6 - \&c. \right)$$

$$* 2x - \frac{1}{8} x^2 \text{ diviseurs.}$$

$$* 2x - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{64} x^4$$

$$2x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{256} x^4 - \frac{1}{128} x^6$$

Pour faire l'approximation de la racine quarrée de $r^2 - x^2$, x^2 . Je dis la racine quarrée de r^2 est r , j'écris r pour la premiere partie de la racine.

2°. Pour trouver la seconde partie de la racine, je forme le diviseur $2r$, en prenant le double de la partie r de la racine déjà découverte, & je divise $-x^2$ par $+2r$, & je trouve le quotient $-\frac{1}{2r}x^2$ que j'écris à la racine, & encore devant le diviseur $+2r$; puis je multiplie $+2r$ par $-\frac{1}{2r}x^2$ par $-\frac{1}{2r}x^2$; & j'ôte les produits $-x^2 + \frac{1}{2r}x^2$ de la puissance proposée, & je trouve le reste $-\frac{1}{2r}x^4$.

3°. Pour continuer l'operation sur ce reste, & trouver la troisième partie de la racine, je double la somme des deux parties de la racine, & j'ai pour nouveau diviseur $+2r - \frac{1}{2r}x^2$. Je divise le reste $-\frac{1}{2r}x^4$ par ce diviseur, & je trouve le quotient $-\frac{1}{4r^2}x^2$ que j'écris à la racine, & encore au devant du diviseur. Je multiplie $+2r - \frac{1}{2r}x^2$ par $-\frac{1}{4r^2}x^2$, & j'ôte les produits $-\frac{1}{2r}x^2 + \frac{1}{4r^2}x^4 + \frac{1}{8r^3}x^4$ du premier reste, & je trouve le second reste $-\frac{1}{4r^2}x^4 - \frac{1}{8r^3}x^4$.

4°. Pour continuer l'operation sur ce reste, je double les parties de la racine déjà découvertes, & cela me donne le diviseur $+2r - \frac{1}{2r}x^2 + \frac{1}{4r^2}x^2$. Je divise le second reste par ce diviseur, en disant le quotient de $-\frac{1}{4r^2}x^4$ divisé par $+2r$ est $-\frac{1}{8r^3}x^2$; que j'écris à la racine & au diviseur; je multiplie $+2r - \frac{1}{2r}x^2 + \frac{1}{4r^2}x^2$ par ce quotient $-\frac{1}{8r^3}x^2$; j'ôte le produit $-\frac{1}{4r^2}x^2 + \frac{1}{16r^3}x^4 + \frac{1}{32r^4}x^4$ du second reste, & je trouve un troisième reste $-\frac{1}{16r^3}x^4 - \frac{1}{32r^4}x^4$.

Je pourrais continuer l'approximation sur ce troisième reste; mais les operations précédentes suffisent pour apprendre aux Commencans à la continuer eux-mêmes tant qu'ils voudront, & à faire eux-mêmes l'approximation de la racine quarrée des grandeurs litterales complexes qui sont des quarrés imparfaits.

EXEMPLE II.

Puissance 3^e imparfaite.

$$1 - x^3$$

$$1. \text{reste.} \quad -\frac{1}{3}x^3 \div \frac{1}{3}x^3$$

$$2. \text{reste.} \quad -\frac{1}{3}x^3 \div \frac{1}{3}x^3 \div \frac{1}{3}x^3 \div \frac{1}{3}x^3$$

Racine 3^e approchée.

$$(1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 - \&c.)$$

$$1 = a$$

$$3 = 3a^2$$

$$- \frac{1}{3}x^3 = b$$

$$-x^3 \div \frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3}x^3 \div \frac{1}{3}x^3 = 3a^2b \div 3ab^2 \div b^3$$

$$1 - \frac{1}{3}x^3 = a$$

$$3 - 2x^3 \div \frac{1}{3}x^3 = 3a^2$$

$$- \frac{1}{9}x^6 = b$$

$$-\frac{2}{3}x^3 \div \frac{1}{9}x^6 = -\frac{2}{3}x^3 \div \frac{1}{9}x^6 = 3a^2b \div 3ab^2 \div b^3$$

POUR trouver la racine cubique ou 3^e de $1 - x^3$, j'emploie la formule de la 3^e puissance $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; &c x^3 , je prens la racine 3^e de 1 (représenté par a de la formule) dans la puissance imparfaite $1 - x^3$; cette racine représentée par a de la formule est 1. J'écris 1 à la racine, & je mets 0 sous 1 dans la puissance proposée $1 - x^3$, pour marquer que je m'en suis servi.

2^e. Pour trouver la seconde partie de la racine représentée par b de la formule, je suppose $1 = a$ de la formule. Je forme le diviseur $+ 3$ représenté par $3a^2$ de la formule: je divise $-x^3$ par $+ 3$, & j'écris le quotient $-\frac{1}{3}x^3$ à la racine. Je suppose $-\frac{1}{3}x^3 = b$ de la formule, & je forme les produits représentés par la formule $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, &c je trouve $-x^3 \div \frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3}x^3 \div \frac{1}{3}x^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Je les retranche de $-x^3$ qui est le seul terme qui reste de $1 - x^3$ après la 1^{re} operation, &c je trouve le 1^{er} reste $-\frac{1}{3}x^3 \div \frac{1}{3}x^3$.

3^e Pour trouver la 3^e partie de la racine, je continue l'operation sur le 1^{er} reste. Je suppose $1 - \frac{1}{3}x^3 = a$ de la formule. Je forme le diviseur que prescrit $+ 3a^2$, &c je trouve $+ 3 - 2x^3 \div \frac{1}{3}x^3 = + 3a^2$. Je divise le 1^{er} reste par ce diviseur, en faisant le quotient de $-\frac{1}{3}x^3$ divisé par $+ 3$, est $-\frac{1}{9}x^6$. J'écris ce quotient à la racine, & je suppose $-\frac{1}{9}x^6 = b$ de la formule.

Je forme les produits représentés par la formule $+ 3a^2b$
 $+ 3ab^2 + b^3$, &c je trouve $-\frac{1}{2}x^8 + \frac{3}{2}x^6 - \frac{1}{4}x^{10} -$
 $\frac{1}{24}x^{12} = + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Je retranche ces produits du 1^{er} reste, &c je trouve le second reste $-\frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{8}x^{10} + \frac{1}{24}x^{12}$.

Si je voulois continuer l'approximation, il faudroit continuer l'opération sur ce second reste; mais les opérations précédentes suffisent pour apprendre la manière de faire l'approximation.

La méthode d'approximation est une suite évidente de la méthode de l'extraction des racines qu'on a démontrée; &c il est clair que si après avoir trouvé tant de termes qu'on voudra de la racine approchée, on multiplie leur somme par elle-même une fois si c'est la racine 2^e, deux fois si c'est la 3^e, &c. &c qu'on ajoute au produit le dernier reste qu'on a trouvé; il est, dis-je, évident qu'on retrouvera la puissance imparfaite proposée.

AVERTISSEMENT.

DANS le second exemple on a pris 1 pour le premier terme de $1 - x^2$, au lieu d'une grandeur littérale homogène à $-x^2$, comme r^2 ; parceque si l'on avoit pris, par exemple r^2 , la racine cubique auroit été la grandeur incommensurable $\sqrt[3]{r^2}$, ou $r^{\frac{2}{3}}$, qui auroit embarrassé les Commencans jusqu'à ce qu'on leur ait expliqué le calcul des incommensurables. Mais quand ils l'auront appris, ils ne trouveront aucune difficulté à faire l'approximation des racines de toute sorte de grandeurs.

* 294. & Remarques sur les suites infinies que l'on trouve par la division *,
 295. & par * l'extraction des racines des puissances imparfaites,

* 311. lesquelles suites sont les valeurs approchées des quotiens ou des racines.

1.

ON peut trouver, tant par la division que l'on a expliquée dans l'art 294, que par l'extraction des racines que l'on a expliquée dans l'art 311, plusieurs suites dont les expressions seront toutes différentes; &c cependant chacune de ces

suites sera la valeur approchée du quotient, ou de la racine dont on cherche la valeur. Voici comment on les trouve.

En divisant a par $a + x$ dans l'art. 294; on a pris dans le diviseur $a + x$, la grandeur a pour le premier terme du diviseur, & x pour le second terme; & l'on a trouvé la *suite* marquée dans l'art. 294. On pourroit aussi prendre la grandeur x pour le premier terme du diviseur $x + a$; & faisant la division, on trouveroit une autre expression de la *suite* infinie qui est la valeur approchée du quotient de a divisé par $x + a$. Et si le diviseur avoit plus de deux termes, on pourroit prendre successivement les termes du diviseur l'un après l'autre, pour le premier terme du diviseur; & les divisions que l'on feroit dans chacun de ces changemens du premier terme du diviseur, donneroient chacune une *suite* dont l'expression seroit différente de l'expression de la *suite* que seroit trouver chaque autre division.

De même dans l'extraction des racines, par exemple, dans l'extraction de la racine quarrée de $r^2 + x^2$, on peut prendre r^2 pour le premier terme de la puissance 2^e $r^2 + x^2$, & x^2 pour le second terme; & l'on trouvera par la méthode expliquée dans l'art. 311, une *suite* infinie qui sera la valeur approchée de la racine quarrée de $r^2 + x^2$. On peut aussi prendre x^2 pour le premier terme de la puissance 2^e $x^2 + r^2$, & commencer l'extraction de la racine quarrée par ce premier terme x^2 , & l'on trouvera une autre *suite* différente de la première, pour la valeur approchée de la racine quarrée de $x^2 + r^2$.

2.

Toutes les *suites* que l'on trouve pour la valeur, soit d'un même quotient, soit d'une même racine, étant conçues chacune comme contenant le nombre infini de termes qui lui convient, sont chacune la véritable valeur de ce même quotient, ou de cette même racine, comme le démontre l'opération par laquelle chacune de ces *suites* se découvre. Ainsi toutes les *suites* qui sont la valeur d'un même quotient, ou d'une même racine, regardées comme ayant tous leurs termes à l'infini, sont égales entr'elles.

Mais on ne peut pas trouver ce nombre infini de termes de chaque *suite*. On n'en peut trouver qu'un nombre déterminé de termes ; & ce nombre fini de termes d'une *suite* n'est qu'une valeur approchée du quotient , ou de la racine : & afin que cette valeur approchée soit d'usage dans la résolution des Problèmes , il faut que la différence d'avec la vraie valeur soit insensible , & qu'on puisse dans la pratique négliger cette différence sans erreur sensible.

C'est pourquoi parmi les *suites* différentes , qu'on pourroit trouver pour la valeur approchée d'une même grandeur ; il faut choisir celle qui a besoin du moindre nombre de termes qui se puisse , afin que la différence d'avec la vraie valeur soit insensible. Or il est évident que les termes de la *suite* étant des fractions distinguées par les puissances d'une lettre ou d'une grandeur , comme dans l'*art* 294 , plus la grandeur qui distingue les termes au numérateur sera petite , par rapport à la grandeur qui est au dénominateur , & plus les fractions qui composent les termes de la *suite* seront petites ; car plus une fraction est petite , & plus les puissances vont en diminuant. D'où l'on voit qu'il faut choisir parmi les différentes *suites* , qu'on pourroit trouver pour les valeurs approchées d'une même grandeur , celle dont les termes vont le plus en diminuant , celle où on arrive , après un petit nombre de termes , à des grandeurs si petites qu'on peut les négliger toutes sans erreur sensible. Dans l'exemple de l'*art* 294 , si a surpasse x , il faut prendre a pour le 1^{er} terme du diviseur $a \div x$; afin que x & les puissances de x se trouvent dans les numérateurs , & les puissances de a dans les dénominateurs des termes. Si a est moindre que x , il faudra prendre x pour le premier terme du diviseur $x \div a$; afin que a & les puissances de a se trouvent dans les numérateurs des termes de la *suite* , & les puissances de x dans les dénominateurs. On doit suivre la même règle dans le choix des *suites* que l'on trouve par l'extraction des racines de l'*art* 311.

On peut même préparer la grandeur qu'on doit réduire en *suite* , afin que les termes de la *suite* aillent en diminuant considérablement de l'un à l'autre. Mais comme le principal usage de ces *suites* est dans l'Analyse , on a mis la manière de faire ces préparations dans l'Analyse démontrée , *art* 280 , & *art* 743.

3.

Ces *suites* qui sont les valeurs approchées des grandeurs qu'on cherche en plusieurs Problèmes des Mathématiques, lesquelles ne diffèrent pas sensiblement des véritables valeurs qu'on ne peut pas avoir dans la dernière exactitude, sont devenues de notre temps de grand usage. On fait sur ces *suites* les mêmes calculs que sur les grandeurs complexes d'un nombre déterminé de termes. On les ajoute les unes aux autres; on les retranche les unes des autres; on les multiplie, & on les divise les unes par les autres; on les élève à toutes les puissances, & on en extrait les racines. Leur addition, leur soustraction & leur multiplication n'ont pas d'autres difficultés que celles qui se trouvent dans les opérations semblables sur les grandeurs complexes où il faut mêler le calcul des grandeurs entières avec celui des fractions, qui ont été expliquées.

La formation des puissances des *suites* & l'extraction de leurs racines se font de la même manière que les semblables opérations sur les grandeurs complexes, que l'on a expliquées dans les art. 303 & 311. Et l'on enseignera dans le troisième Livre de cet Ouvrage la manière de trouver la formule générale qui est dans l'*Analyse démontrée*, page 410, qui sert à la formation de toutes les puissances possibles des *suites*, & à l'extraction de leurs racines, par de simples substitutions.

La division des *suites* les unes par les autres, se fait aussi de la même manière que la division des grandeurs complexes, où il faut mêler le calcul des grandeurs entières & celui des fractions, comme dans les articles 296, 297. Mais comme les Commensurans pourroient trouver de la difficulté à se servir d'un dividende & d'un diviseur qui ont chacun une infinité de termes; on en va mettre ici un exemple.

Supposé qu'il faille trouver la *suite* infinie qui est la valeur de

$$\sqrt{1+ay^2}$$

$$\sqrt{1-by^2}$$

Il y a trois opérations à faire pour découvrir la *suite* qu'on cherche.

1°. Il faut par l'art. 311. réduire $\sqrt{1+ay^2}$ en la *suite* qui en

est la valeur; & l'on trouvera $\sqrt{1+ay} = 1 + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{8}a^2y^2 + \frac{1}{16}a^3y^3 - \frac{1}{128}a^4y^4$, &c. qu'on nommera A.

2°. Il faut par la même méthode chercher la suite qui est la valeur de $\sqrt{1-by}$, & l'on trouvera $\sqrt{1-by} = 1 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{8}b^2y^2 - \frac{1}{16}b^3y^3 + \frac{1}{128}b^4y^4$, &c. qu'on nommera B.

3°. Il faut diviser la 1^{re} de ces suites par la 2^e, & c'est l'exemple de la division que l'on va mettre ici.

Exemple de la division d'une suite infinie, par une autre suite infinie.

Dividende.

A

$$\begin{aligned}
 &1 + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{8}a^2y^2 + \frac{1}{16}a^3y^3 - \frac{1}{128}a^4y^4 \text{ \&c.} \\
 &+ \frac{1}{2}by - \frac{1}{8}b^2y^2 + \frac{1}{16}b^3y^3 - \frac{1}{128}b^4y^4 \\
 &+ \frac{1}{8}aby^2 - \frac{1}{16}ab^2y^3 + \frac{1}{128}ab^3y^4 \\
 &+ \frac{1}{16}b^2y^3 - \frac{1}{128}b^3y^4 + \frac{1}{1024}b^4y^5 \\
 &- \frac{1}{128}a^2by^3 - \frac{1}{1024}a^2b^2y^4 \\
 &+ \frac{1}{1024}ab^2y^4 + \frac{1}{16384}ab^3y^5 \\
 &+ \frac{1}{16384}b^3y^5 + \frac{1}{262144}b^4y^6 \\
 &+ \frac{1}{262144}a^2b^2y^4 \\
 &- \frac{1}{262144}a^2b^3y^5 \\
 &+ \frac{1}{262144}ab^3y^5 \\
 &+ \frac{1}{4194304}b^4y^6
 \end{aligned}$$

Diviseur.

B

$$\begin{aligned}
 &1 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{8}b^2y^2 - \frac{1}{16}b^3y^3 + \frac{1}{128}b^4y^4 \text{ \&c.} \\
 &\hline
 &\text{Quotient.} \\
 &\text{C} \\
 &1 + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{8}a^2y^2 + \frac{1}{16}a^3y^3 - \frac{1}{128}a^4y^4 \text{ \&c.} \\
 &+ \frac{1}{2}by - \frac{1}{8}b^2y^2 + \frac{1}{16}b^3y^3 - \frac{1}{128}b^4y^4 \\
 &+ \frac{1}{8}aby^2 - \frac{1}{16}ab^2y^3 + \frac{1}{128}ab^3y^4 \\
 &+ \frac{1}{16}b^2y^3 - \frac{1}{128}b^3y^4 + \frac{1}{1024}b^4y^5 \\
 &+ \frac{1}{1024}a^2b^2y^4 - \frac{1}{1024}a^2b^3y^5 \\
 &+ \frac{1}{16384}ab^3y^5 + \frac{1}{262144}b^4y^6
 \end{aligned}$$

Pour diviser la suite A par la suite B, 1°. Il faut ordonner l'une & l'autre suite, par rapport à une même lettre, qui est ici

ici γ . Mais dans la division des grandeurs complexes qui n'ont qu'un nombre déterminé de termes, le premier terme contient la plus haute puissance de la lettre qui distingue les termes, & les autres termes contiennent les puissances suivantes qui vont en diminuant; au contraire dans les *suiter* infinies les puissances de la lettre qui distingue les termes vont en augmentant à l'infini; & le 1^{er} terme est celui dans lequel la lettre qui distingue les termes ne se trouve point, comme dans notre exemple; ou bien, quand elle est dans tous les termes, le 1^{er} terme est celui où la puissance de la lettre qui distingue les termes est au plus bas degré; les termes suivans sont distinguez par ordre par les puissances de la lettre qui distingue les termes à mesure que ces puissances augmentent; & toutes les grandeurs incomplexes qui contiennent la même puissance de cette lettre, ne font qu'un même terme, & on les écrit les unes sous les autres, comme on le verra dans le quotient C : les *suiter* A & B sont ici ordonnées par rapport à γ .

2°. Comme on ne peut pas entreprendre la recherche d'un quotient d'une infinité de termes, on se borne au nombre de termes qu'on juge devoir contenir une valeur assez approchée du véritable quotient: nous nous bornerons ici à cinq termes; & il est clair que cela détermine le nombre des termes du dividende A & du diviseur B dont on doit se servir. Dans notre exemple les termes du dividende & du diviseur où est γ^4 doivent être les derniers de ceux dont on doit se servir; & on verra même qu'à mesure qu'on avance dans la division, il y a des termes dans le diviseur qui deviennent inutiles à la division qu'on fait actuellement.

Tout ce que la division des *suiter* les unes par les autres contient de particulier, qui pourroit embarrasser les Commentateurs, est contenu dans ces deux premiers articles, la division se fait ensuite de la même manière que la division des grandeurs complexes, où il faut employer le calcul des grandeurs entières & celui des fractions, comme dans les articles 294 & les suivans.

3°. Je divise donc le premier terme 1 du dividende A par le premier terme 1 du diviseur B , & j'écris le quotient 1. J'écris 0 sous 1 du dividende pour marquer qu'il ne doit plus servir. Je multiplie ensuite les termes du diviseur B qui sui-

vent 1, jusqu'à celui qui contient y^3 , par le quotient 1, & je retranche du dividende les produits que je trouve par cette multiplication, ce qui se fait en les écrivant avec des signes contraires, & la 1^{re} operation est finie.

Le 1^{er} terme du dividende de la 2^e operation est $+\frac{1}{2}ay^2$ $+\frac{1}{2}by^4$. Je le divise par le 1^{er} terme 1 du diviseur, & j'écris le quotient $+\frac{1}{2}ay^2$ $+\frac{1}{2}by^4$. J'écris aussi 0 sous ce 1^{er} terme du dividende, pour marquer que je m'en suis servi; je multiplie ensuite les termes du diviseur qui suivent le premier; par ce nouveau quotient. Je retranche du dividende les produits à mesure que je les trouve, en les écrivant avec des signes contraires, & la 2^e operation est finie.

On doit remarquer que le terme du diviseur où se trouve y^3 a été inutile à cette operation, & qu'il ne doit plus servir à la suivante, non plus que celui où se trouve y^6 .

Le 1^{er} terme du dividende de la 3^e operation, en ajoutant ensemble $+\frac{1}{2}by^4$ $+\frac{1}{2}by^4$, est $-\frac{1}{2}ay^4$ $+\frac{1}{2}aby^4$ $+\frac{1}{2}by^6$. Je le divise par le 1^{er} terme 1 du diviseur, & j'écris le quotient $-\frac{1}{2}ay^4$ $+\frac{1}{2}aby^4$ $+\frac{1}{2}by^6$. J'écris aussi 0 sous le 1^{er} terme du dividende dont je viens de me servir. Je multiplie les termes du diviseur qui suivent le 1^{er} 1, par ce nouveau quotient, (excepté ceux où se trouvent y^6 & y^3 qui deviennent inutiles, à cause du nombre des termes du quotient auquel je me suis borné;) & je retranche les produits du dividende, en les écrivant avec des signes contraires; & la 3^e operation est finie.

Le 1^{er} terme du dividende de la 4^e operation, en ajoutant ensemble les grandeurs semblables, est $+\frac{1}{10}ay^6$ $-\frac{1}{10}aby^6$ $+\frac{1}{10}aby^6$ $+\frac{1}{10}by^8$. Je le divise par le 1^{er} terme 1 du diviseur, & j'en écris le quotient qui est le même terme, à cause que l'unité est le diviseur. Je marque 0 sous le 1^{er} terme du dividende, dont je viens de me servir. Je multiplie par le quotient que je viens de trouver, le seul terme $-\frac{1}{2}by^4$ du diviseur, les autres étant inutiles par rapport au nombre de termes que je cherche, & je retranche du dividende les produits à mesure que je les trouve; & la 4^e operation est finie.

Le 1^{er} terme du dividende de la 5^e operation, en ajoutant ensemble les grandeurs semblables, est $-\frac{1}{12}ay^8$ $+\frac{1}{24}aby^8$

$-\frac{1}{12}a^2b^2y^2 + \frac{1}{12}ab^2y^3 + \frac{1}{12}b^3y^3$. Je le divise par le 1^{er} terme x du diviseur; & à cause que x est le diviseur, j'écris ce même terme pour le quotient de la 5^e operation; & m'étant borné à ces cinq termes du quotient, l'operation est finie.

Cet exemple suffit pour faire concevoir aux Commencans la maniere de diviser une suite infinie par une autre suite infinie.

SECTION IV.

Sur les comparaisons des rapports geometriques où sont expliquées les proportions des grandeurs en general.

Avertissement.

IL n'y a rien de plus necessaire dans les Mathematiques que la connoissance des comparaisons des rapports des grandeurs en general. Elles servent ces comparaisons des rapports, comme on l'a pû voir dans ce Traité, de fondement au calcul des grandeurs en general; & les Mathematiques particulieres ne sont qu'une application de ces comparaisons des rapports des grandeurs en general aux grandeurs sensibles & particulieres.

On va repeter ici en peu de mots ce qu'on a déjà dit sur les rapports & les comparaisons des rapports, & on y ajoutera tout ce qu'il faut sçavoir sur cette matiere; afin que les Commencans trouvent dans cette section tout ce qu'ils doivent se rendre très familier sur ces comparaisons des rapports, pour entendre les Mathematiques.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

312. **T**OUTE grandeur représentée par a peut être conçue partagée en tel nombre qu'on voudra de parties égales qu'on nomme les aliquotes. Nommant x chacune de ces aliquotes, & n le nombre de ces aliquotes tel qu'on voudra, on peut concevoir $a = nx$.

DEFINITION.

313. **L**erapport geometrique, ou simplement le rapport d'une grandeur a à une autre grandeur b , est la comparaison que l'on
- R r ij

fait de l'une de ces grandeurs à l'autre, en considérant combien de fois a contient b , ou est contenue dans b , si a est moindre que b .

Mais parceque le plus souvent la plus petite des deux grandeurs d'un rapport n'est pas contenue exactement dans l'autre, voici une notion plus générale d'un rapport. C'est la comparaison d'une grandeur a à une autre b de même nature, en considérant combien de fois l'une de ces grandeurs a contient une aliquote quelconque x de l'autre b . Supposant que n marque tel nombre qu'on voudra des parties égales dans lesquelles on peut concevoir que b est divisé, & qu'ainsi $b = nx$; que m marque un nombre entier tel qu'on voudra, & qu'on prenne ce nombre m pour marquer combien a contient de parties égales x de b ; l'expression générale de tout rapport sera $\frac{a}{b} = \frac{mx}{nx}$.

314. Quand dans le rapport $\frac{a}{b}$, ou son égal $\frac{mx}{nx}$, chacun des nombres m & n est fini & déterminé, c'est un rapport communurable; mais quand il arrive que b étant conçu partagé dans un nombre quelconque n fini & déterminé d'aliquotes x , jamais a n'en contient exactement un nombre fini m , & qu'il y a toujours un reste; ou, * ce qui revient au même, quand il faut concevoir le conséquent b divisé en un nombre infini de parties égales x , afin que l'antécédent a en contienne aussi un nombre infini; c'est à dire, quand les nombres m & n sont infinis, le rapport de a à b se nomme *incommensurable*.

Ce qu'on dira des rapports dans la suite conviendra aux rapports incommensurables, aussi-bien qu'aux commensurables, comme on l'a fait voir dans l'article 51.

DEFINITION.

315. ON peut comparer les rapports les uns avec les autres; comme on compare les grandeurs. La comparaison de deux rapports égaux s'appelle *une proportion*; la comparaison de deux rapports inégaux n'a pas d'autre nom que celui de comparaison de deux rapports.

Deux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont égaux quand les deux conséquents b & d étant partagez dans le même nombre n d'aliquotes, chaque antécédent contient le même nombre m

d'aliquotes de son conséquent. Ainsi nommant x l'aliquote qui est dans b le nombre de fois que marque n , & y l'aliquote semblable qui est dans d le même nombre de fois n , l'antecedent a contient x un nombre de fois marqué par m , l'antecedent c contient aussi y le même nombre de fois m , & $\frac{a}{m} = \frac{ax}{mx} = \frac{x}{x} = \frac{c}{my} = \frac{cy}{my}$ sera l'expression generale de deux rapports égaux par le moyen des aliquotes. Dans les rapports égaux commensurables m & n sont des nombres finis, & * * § 1. dans les incommensurables m & n sont des nombres infinis.

Deux rapports $\frac{a}{m}$, $\frac{c}{n}$ sont inégaux, quand les antecedens a & c ne contiennent pas le même nombre de fois les aliquotes semblables x & y de leurs conséquents f & b ; ou quand les conséquents f & b ne contiennent pas le même nombre de fois les aliquotes semblables de leurs antecedens a & c . Ainsi $\frac{ax}{mx}$ & $\frac{cy}{ny}$, & encore $\frac{ax}{mx}$ & $\frac{cy}{ny}$ peuvent servir d'expression generale à deux rapports inégaux.

A X I O M E S.

1.

316. Si l'on compare plusieurs grandeurs inégales a, b, c , à une même grandeur d ; les plus grandes auront un plus grand rapport à d que les plus petites; & celles qui y auront un plus grand rapport seront plus grandes que celles qui y auront un moindre rapport. Si d est zero, le rapport d'une grandeur réelle à zero sera infiniment grand, & la grandeur réelle pourra être considérée comme infinie par rapport à zero. Ce qu'on doit entendre au sens qui est expliqué dans la remarque qui suit l'article 40.

2.

317. Si l'on compare une même grandeur d à des grandeurs inégales a, b, c , le rapport de d à une plus grande sera plus petit que le rapport de d à une plus petite. Et si le rapport de d à a est plus petit que le rapport de d à b ; a est plus grande que b ; & si d est zero, le rapport de d ou de zero à une grandeur réelle sera infiniment petit: ce qui doit être entendu au sens de la remarque de l'article 40.

3.

318. Parmi les rapports inégaux, un rapport $\frac{a}{m}$ plus grand qu'un
R r ij

autre rapport $\frac{1}{2}$, est plus grand que tout autre rapport égal à $\frac{1}{2}$ ou moindre que $\frac{1}{2}$.

4.

319. Une même grandeur d étant comparée à des grandeurs égales $a = b = c$, tous les rapports à ces grandeurs égales sont égaux, & si les rapports d'une grandeur d à d'autres grandeurs a, b, c sont égaux, ces autres grandeurs sont égales.

5.

320. Les rapports égaux à un même rapport, ou à des rapports égaux, sont égaux entr'eux.

6.

321. En deux rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si les deux termes a & b de l'un sont déterminés, & qu'un seul des deux termes de l'autre soit aussi déterminé comme c , l'autre terme d du second * 54. rapport * est déterminé.

D E F I N I T I O N .

322. QUAND deux ou plusieurs rapports sont égaux comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; les antécédents s'appellent les termes *relatifs* ou *homologues*, & les conséquents se nomment aussi *relatifs* ou *homologues*.

T H E O R È M E I.

323. LORSQUE plusieurs rapports sont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ * 55. $= \frac{e}{f}$, les rapports inverses * sont aussi égaux, c'est à dire $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$.

T H E O R È M E II

324. SI plusieurs rapports sont égaux comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, * 56. le rapport de chacun des antécédents à son conséquent * est égal au rapport de la somme de tous les antécédents à la somme de tous les conséquents $\frac{a}{b}$ c'est à dire $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$.

C O R O L L A I R E .

325. D'où il suit qu'ayant un rapport donné $\frac{a}{b}$, supposant que m marque un nombre entier quelconque, ou une fraction

numérique quelconque, * on aura $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$. Ainsi supposant * 61.

$m = 2, 3$, &c. on aura $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}$, &c. $\frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{3a}{3b}$ &c.

$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}b} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{1}{3}b}$ &c.

THEORÈME III.

326. **QUAND** deux ou plusieurs rapports sont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, les rapports des antécédents sont égaux aux rapports * 62. des conséquents, c'est à dire $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{a}{e} = \frac{b}{f}$, $\frac{c}{e} = \frac{d}{f}$. Ces derniers rapports s'appellent les rapports alternes.

THEORÈME IV.

327. **SI** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, on aura * $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. * 57.

THEORÈME V.

328. **SI** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, & si $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; dans chacun de ces cas * on * 58, 59. aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. &c 60.

THEORÈME VI.

329. **EN** tout produit qu'on peut concevoir comme formé de deux grandeurs, dont l'une est le multiplicateur, & l'autre le multiplié *, l'unité est à l'une, comme l'autre est au produit. * 72.
 $1 . a :: b . ab . 1 . a :: a^2 . a^2 . 1 . a :: a^n . a^{n+1} . 1 . \frac{a}{b} :: \frac{a}{b} . \frac{a}{b}$.

THEORÈME VII.

330. **EN** toute division, par exemple $\frac{a}{b}$, le dividende a * est au * 106. diviseur b , comme le quotient $\frac{a}{b}$ est à l'unité. $a . b :: \frac{a}{b} . 1$. Et les rapports * inverses étant égaux, on a aussi cette pro- * 107. portion $1 . \frac{a}{b} :: b . a$.

COROLLAIRE.

331. **D'**où il suit, qu'en nommant q le quotient qui viendrait en faisant la division du premier terme a d'un rapport $\frac{a}{b}$ par le second terme b , on aura * $qb = a$; &c que l'on pourra expri- * 107. mer tout rapport $\frac{a}{b}$ de cette manière $\frac{a}{b}$.

On pourroit, par le moyen de cette expression, démontrer

la plupart des propriétés des proportions & des progressions géométriques.

THEORÈME VIII.

332. *DEUX* grandeurs étant multipliées chacune par une même
 *75. grandeur, ou étant divisées chacune par une même grandeur *,
 les produits auront entr'eux le même rapport que les deux gran-
 *109. deurs ; * les quotients auront aussi le même rapport que les deux
 grandeurs. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$: & $a.b :: \frac{a}{c} . \frac{b}{c}$.

COROLLAIRE.

333. D'où il suit que deux rapports qui ont le même consé-
 *116. quent ou des conséquents égaux, * sont entr'eux comme les
 antécédents. $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a.b$.

THEORÈME IX.

334. *DEUX* rapports qui ont le même antécédent, ou des antécé-
 *121. dents égaux, sont entr'eux * comme leurs conséquents pris dans
 un ordre renversé. $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: c.b$.

THEORÈME X.

335. *TOUTS* les rapports égaux sont des grandeurs égales. Car ils
 *111. ont * le même rapport à une même grandeur qui est l'unité.

THEORÈME XI fondamental.

336. *DEUX* rapports quelconques $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ sont entr'eux * comme le
 *118. produit des extrêmes ad est au produit bc des moyens. $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} ::$
 $ad.bc$.

Ce Théorème fait voir la manière de trouver le rapport que deux rapports ont entr'eux.

COROLLAIRE.

337. D'où il suit que quand on a deux produits homogènes on
 peut en former une proportion. Par exemple on fera des
 deux produits ad & bc , la proportion $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} :: ad.bc$. On fera
 de ad & bc la proportion $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} :: a.d.b.c$.

THEOREME XII fondamental,
qu'il faut bien retenir.

338. *EN toute proportion, le produit des extrêmes * est égal au* 119.
produit des moyens. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *l'on aura* $ad = bc$. *Et si*
ad = bc, on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. 120.

Ainsi quand deux produits sont égaux, on en peut toujours former une proportion, en prenant les extrêmes dans l'un des produits, & les moyens dans l'autre.

Il faut aussi remarquer que quand un rapport $\frac{a}{b}$ est égal au rapport inverse d'un autre rapport $\frac{c}{d}$, (c'est à dire $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$) on dit, (en laissant l'arrangement des rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$) que *a* est à *b* réciproquement comme *c* est à *d*. Et dans cet arrangement de deux rapports égaux $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, dont l'un, sçavoir $\frac{a}{b}$, est écrit dans un ordre inverse $\frac{d}{c}$; il est évident que c'est le produit des antécédents *ad* qui est égal au produit des conséquents *bc*.

Quand aussi deux produits sont égaux $ad = bc$, si on les conçoit réduits en deux rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, dont les antécédents soient pris de l'un des produits *ad*, & les conséquents de l'autre produit égal *bc*, il est évident que le premier de ces rapports $\frac{a}{b}$ est égal au rapport inverse de l'autre $\frac{c}{d}$, c'est à dire $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$; & on dit alors que *a* est à *b* réciproquement comme *c* est à *d*.

A V E R T I S S E M E N T.

ON a démontré toutes les propositions qui précèdent dans les lieux qui sont cités à la marge, il faut se les rendre très familières, & leurs démonstrations. On va ajouter les autres principales propositions sur la comparaison des rapports, qu'il faut de même se rendre très familières.

C O R O L L A I R E I.

339. *EN tout proportion continue* $a. b :: b. c$, *où le second*
& le troisième terme sont la même grandeur *b*; *le carré* b^2 *du terme moyen* *b*, *est égal au produit* *ac* *des extrêmes. Et*
si l'on a un produit *ac* *égal à un carré* b^2 , *l'on aura une pro-*
portion continue $a. b :: b. c$, *dans laquelle la racine du*

quarré b^2 fera moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs a & c , dont est formé le produit ac .

- * 336. *Démonstration.* $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} :: * ac. b^2$. Or on suppose dans la première partie du Corollaire $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Par conséquent $ac = b^2$. On suppose dans la seconde partie $ac = b^2$. Par conséquent $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II. PROBLÈME I.

340. **L**ES deux termes moyens d'une proportion & un seul des deux extrêmes étant donnez ou connus trouver l'autre extrême. Et les deux extrêmes & l'un des moyens étant donnez ou connus, trouver l'autre moyen.

• *Operation.* Soient les deux moyens ou les deux extrêmes connus représentez par b & c , l'extrême ou le moyen connu représenté par a , & l'extrême ou le moyen inconnu qu'on cherche représenté par x .

- La proportion sera $a. b :: c. x$; ou $b. a :: x. c$. Dans l'un & l'autre cas, on aura $* ax = bc$. Et divisant chacun de ces produits égaux par a , on aura $x = \frac{bc}{a}$. Ce qui donne la fameuse Règle de trois.

• *La règle de proportion qu'on nomme ordinairement la Règle de trois.*

341. **T**ROIS termes d'une proportion a, b, c , étant connus, trouver le quatrième terme x .

Puisqu'il y a trois termes de connus, il est évident que les deux moyens & un des extrêmes sont connus, & qu'on cherche l'autre extrême; ou que les deux extrêmes & un moyen sont connus, & qu'on cherche l'autre moyen. Dans l'un & l'autre cas il est bon d'arranger les trois termes connus de manière que les deux extrêmes ou les deux moyens connus occupent le 2^e & le 3^e rang de la proportion, que le seul extrême ou moyen connu occupe le premier rang; & que le terme inconnu qu'on cherche soit conçu occuper le 4^e rang de la proportion, de cette manière $a. b :: c. x$. Le sens de la question fera assez connoître cet ordre de termes, comme on le verra dans les exemples.

• *Règle ou operation.* Il faut multiplier les deux moyens connus b & c l'un par l'autre, ou les deux extrêmes connus l'un

par l'autre; diviser dans le premier cas le produit bc par celui des extrêmes a qui est connu; & dans le second cas, par celui des moyens a qui est connu; & le quotient $\frac{b}{a}$ sera le quatrième terme qu'on cherchoit.

Quand les trois termes connus sont arrangez, comme on l'a dit, il faut multiplier le 1^{er} & le 3^e terme l'un par l'autre, & diviser leur produit bc par le 1^{er} terme a , & le quotient $\frac{b}{a}$ sera le 4^e terme, ou bien, ce qui revient au même, & ce qui est quelquefois plus commode dans la pratique, il faut diviser le 1^{er} terme par le premier, ce qui donnera le quotient $\frac{1}{a}$; ou si la division peut se faire plus commodément, il faut diviser le 3^e terme par le premier ce qui donnera le quotient $\frac{c}{a}$; multiplier dans le premier cas le quotient $\frac{1}{a}$ par le 3^e terme c ; & dans le second cas, multiplier le quotient $\frac{c}{a}$ par le 2^e terme b ; & dans l'un & dans l'autre cas, le produit $\frac{b}{a} * c$ sera le 4^e terme qu'on cherchoit. Ou bien enfin il faut diviser le 1^{er} terme par le 2^e, ce qui donne le quotient $\frac{1}{a}$; & diviser le 3^e terme c par le quotient précédent, & le quotient $\frac{1}{a} * c$ sera le 4^e terme. On a mis toutes ces manieres de trouver le 4^e terme d'une proportion, afin que dans la pratique on puisse choisir celle qu'on verra être la plus commode pour chaque exemple qui peut se presenter.

E X E M P L E

SUPPOSANT que les longueurs des ombres que font deux hauteurs, étant prises en même temps, aient le même rapport chacune à leur hauteur; on peut aisément mesurer une hauteur par son ombre, en se servant de la regle de trois. Il n'y a qu'à prendre un bâton dont la longueur soit connue, par exemple de 5 pieds, le tenir à plomb, lorsqu'il fait du soleil, auprès de l'extrémité de l'ombre que fait la hauteur qu'on veut mesurer; marquer au même instant l'extrémité de l'ombre du bâton, & l'extrémité de l'ombre de la hauteur; & mesurer ensuite la longueur des deux ombres. Supposé que l'ombre du bâton soit de 3 pieds, & que l'ombre de la hauteur soit de 27 pieds; on connoitra les trois termes d'une proportion dont la hauteur est le 4^e terme: car l'ombre du bâton est à la hauteur du bâton, comme l'ombre de la hauteur est à la hauteur. Ce qui fait voir qu'il faut ainsi arranger les termes de la proportion. 3 pieds d'ombre du

bâton font à 5 pieds de hauteur, qui est la hauteur du bâton, comme 27 pieds d'ombre de la hauteur font au nombre des pieds de la hauteur. $3 : 5 :: 27 : x$. Il faut multiplier 27 par 5, & diviser le produit 135 par 3, & le quotient 45 sera le 4^e terme. Ainsi la hauteur est de 45 pieds. Ou bien 27 se divisant sans reste par 3, on peut diviser 27 par 3, & multiplier le quotient 9 par 5, & le produit 45 sera le 4^e terme.

EXEMPLE II.

QUAND on a voulu mesurer le tour de la terre, c'est à dire trouver combien la circonférence d'un grand cercle de la terre, par exemple d'un méridien, contenoit de lieues; on a pris deux Villes situées sur un même méridien. On a mesuré exactement combien il y avoit de lieues de l'une à l'autre: on a observé les deux hauteurs du pôle à ces deux Villes, & on en a pris la différence; ces deux choses ont suffi pour donner les trois termes connus d'une proportion dont le quatrième étoit le nombre des lieues du tour de la terre. Car supposant, 1^o. qu'il y ait 20 lieues entre deux Villes situées sur un même méridien; 2^o. que la différence des hauteurs du pôle de ces deux Villes soit de $\frac{2}{3}$ d'un degré, on a cette proportion: $\frac{2}{3}$ d'un degré font à 20 lieues, comme 360 degrez que contient le tour de la terre, font au nombre des lieues du tour de la terre. $\frac{2}{3} : 20 :: 360 : x$.

Il faut multiplier 360 par 20, diviser le produit 7200 par $\frac{2}{3}$, en se servant de la division des fractions; & le quotient $\frac{10800}{\frac{2}{3}} = 9000$, est le nombre des lieues du tour de la terre.

Ou bien on divisera le premier terme $\frac{2}{3}$ par le second 20, ce qui donnera le quotient $\frac{1}{15}$. On divisera le 3^e terme 360 par le quotient $\frac{1}{15}$, & le quotient de cette division, qui est $\frac{10800}{1} = 9000$, sera le nombre des lieues du tour de la terre.

AVERTISSEMENT.

LA regle de proportion entre dans la resolution de la plupart des Problèmes des Mathematiques, & dans la plupart des calculs du commerce. C'est pourquoi les commençans doivent se la rendre très familiere. On va mettre un exemple sur la regle de société ou de compagnie, qui est formée de la regle de proportion répétée.

Règle de la Société ou de Compagnie.

IL s'agit dans la règle de société de partager une grandeur donnée, qu'on nommera p , en un nombre donné de parties, qu'on nommera x, y, z , &c. lesquelles parties aient entr'elles les mêmes rapports qu'ont entr'elles autant de grandeurs données, qu'on nommera a, b, c , &c. qu'il y a de parties x, y, z , &c.

Règle. 1°. Il faut faire une somme de toutes les grandeurs données; supposant qu'il y en ait trois; cette somme est $a + b + c$.

2°. Il faut faire autant de règles de proportion qu'on $a + b + c. p$; $\left\{ \begin{array}{l} a : \frac{a}{a+b+c} = x \\ b : \frac{b}{a+b+c} = y \\ c : \frac{c}{a+b+c} = z \end{array} \right.$ cherche de parties. Dans

notre supposition, il en faut faire trois. Le premier terme de chacun doit toujours être la somme $a + b + c$, &c. des grandeurs données. Le second terme doit toujours être la grandeur p , qu'il faut partager. Mais le 3° terme de la première règle doit être la première des grandeurs données a ; le 3° terme de la seconde règle, doit être la seconde grandeur b ; le 3° terme de la 4° règle, doit être la troisième grandeur c ; &c. ainsi de suite s'il y a plus de trois grandeurs données. Les 4° termes, qu'on trouvera en faisant les règles de trois, étant pris de suite comme on les voit dans l'exemple littéral, seront les parties, x, y, z , &c. que l'on cherchoit.

Car les 4° termes qu'on trouve pour la valeur des parties x, y, z que l'on cherchoit, ayant le même conséquent, & leurs antécédents étant de suite les grandeurs a, b, c , chacune multipliée par p , sont * entr'eux comme ces grandeurs, a, b, c ; ^{333.} & leur somme $\frac{a+b+c}{a+b+c} p$ est visiblement égale à la grandeur ^{332.} partagée p .

Dans le commerce, supposé que trois personnes aient fait une société; que la première ait mis une telle somme d'argent qu'on voudra représentée par a ; la 2°, une autre somme représentée par b ; & la 3°, une autre somme représentée par c ; & que le profit ou la perte, c'est à dire ce qui est provenu de la société, soit représenté par p ; il faut partager le profit ou la perte, représentée par p , en trois parties proportionnelles aux trois sommes d'argent. Les 4° termes de l'exemple en lettres, font voir les opérations qu'il faut faire pour trouver ces trois parties proportionnelles.

DÉFINITION.

QUAND les quatre termes d'une proportion ou de deux rapports égaux, sont arrangez de façon que les deux termes de l'un des rapports égaux sont dans un ordre renversé, on nomme la proportion *inverse* ou *reciproque*. Par exemple, la proportion droite étant $2. 4 :: 8. 16$, l'inverse ou la reciproque est $2. 4 \quad 16. 8$, & dans cet arrangement on dit que 2 est à 4 en raison inverse de 16 à 8, ou que 2 est à 4 reciproquement, comme 8 est à 16; & l'on dit que les deux termes du premier rapport sont reciproquement proportionnels aux deux termes du second. Si la proportion droite est $a. b :: c. d$, en l'arrangeant ainsi $a. b. d. c$, ou de cette maniere $b. a. c. d$; on dit que a est à b reciproquement comme c est à d , ou que b est à a reciproquement comme d est à c .

Dans cet arrangement de la proportion reciproque, il est évident que le 1^{er} & le 3^e termes sont les extrêmes, & que le 2^e & le 4^e termes sont les moyens de la proportion droite. Ainsi il est facile de reduire la proportion reciproque à la proportion droite, & trois termes étant connus, de trouver le 4^e par la regle de proportion. Par exemple, si les trois premiers termes a, b, d étant connus, on demande le 4^e c ,
 * 340. il est évident que $* c = \frac{ad}{b}$.

Quelques Auteurs arrangent encore une proportion reciproque de cette seconde maniere. Soit la proportion droite $a. b :: c. d$; la proportion reciproque est a, d, b, c , c'est à dire le 1^{er} terme a est au 3^e b , comme le 4^e c est au second d . Dans cet ordre de la proportion reciproque, le 1^{er} & le 2^e termes sont les extrêmes, le 3^e & le 4^e sont les moyens. Si l'on veut chercher un terme de cette proportion reciproque, par exemple le 4^e c , il est évident que $c = \frac{ad}{b}$.

EXEMPLE III.

UN Courier en faisant 24 lieues par jour, ne scauroit arriver qu'en 8 jours au lieu qu'il se propose; il seroit necessaire qu'il y arrivât en 4 jours; on demande combien il doit faire de lieues par jour pour y arriver en 4 jours.

L'état de la question fait connoître que le nombre des lieues qu'on cherche, doit être d'autant plus grand que 24 lieues, que le temps de 4 jours est plus petit que le temps

de 8 jours. Ainsi en arrangeant les termes de la proportion suivant le sens de la question, on dira, le Courier employe 8 jours en faisant 24 lieues par jour; pour n'employer que 4 jours, combien doit-il faire de lieues par jour? La proportion est reciproque dans cet arrangement, qui est de la seconde maniere. Car l'on aura pour premier terme, 8 jours; pour second terme, 24 lieues; pour 3^e terme, 4 jours; & le 4^e terme sera le nombre des lieues qu'on cherchoit. Il est visible que le premier terme 8 jours, est au 3^e 4 jours, comme reciproquement le 4^e terme, qui est le nombre des lieues qu'on cherche, est au 2^e terme 24 lieues. D'où l'on voit qu'il faut multiplier le premier terme 8 & le second 24 l'un par l'autre, car ce sont les extrêmes de la proportion droite, & diviser le produit 192 par le 3^e terme 4 qui est le moyen connu; & le quotient 48 est le 4^e terme de la proportion reciproque, & c'est aussi le second moyen de la proportion droite.

On auroit reduit la proportion inverse à une proportion droite, en l'ordonnant de cette maniere, 4 jours sont à 8 jours, comme 24 lieues sont au nombre des lieues qu'on cherche, que l'on trouve être 48 lieues.

EXEMPLE IV.

SUPPOSE' qu'ayant une étoffe d'une $\frac{1}{2}$ aulne de large, 8 aulnes suffisent pour faire un habit; on trouve une autre étoffe qui a $\frac{2}{3}$ de large, on veut savoir combien il en faut d'aulnes pour faire un habit. Il est évident que plus l'étoffe a de largeur, & moins il en faut d'aulnes pour faire un habit; c'est pourquoi en suivant le sens de la question, on dira, autant qu'une $\frac{1}{2}$ aulne est plus petite que $\frac{2}{3}$ d'aulne, autant le nombre de 8 aulnes doit être en proportion inverse plus grand que le nombre d'aulnes qu'on cherche; Et c'est l'arrangement de la premiere maniere de la proportion reciproque. Pour trouver le 4^e terme, il faut multiplier le premier terme $\frac{1}{2}$ & le 3^e terme 8, qui sont les deux moyens de la proportion reciproque reduite à une proportion droite, & diviser le produit $4 = 4$ par le 2^e terme $\frac{2}{3}$, qui est un des moyens de la proportion droite; & le quotient $\frac{12}{2} = 6$ sera le 4^e terme de la proportion reciproque; & en même temps le second moyen de la proportion droite. Ainsi il faut 6 aulnes

338 LA SCIENCE DU CALCUL, &c.
d'étoffe de $\frac{1}{2}$ de large. La proportion droite est $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} :: 8 : x$.

EXEMPLE V.

IL y a aussi des cas où il faut partager une grandeur donnée en un nombre de parties qui aient entr'elles des rapports inverses d'autres rapports qui sont entre autant de grandeurs données qu'on demande de parties; ce qu'on exprime de cette manière. Partager une grandeur donnée p en un nombre donné de parties x, y , &c. qui soient entr'elles reciproquement comme sont entr'elles autant de grandeurs données a, b , &c.

On en prendra un exemple de physique sur le mouvement des corps. Pour le faire concevoir clairement, on supposera qu'on démontre dans le traité du mouvement, que la quantité du mouvement d'un corps qui se meut, est le produit de sa masse par sa vitesse. Ainsi nommant m la masse d'un corps, & v sa vitesse, mv est la quantité de son mouvement. Il suit de là &c. de l'article 338, qu'afin que deux corps homogènes, dont les masses sont différentes, qu'on nommera M & m , aient une égale quantité de mouvement, il faut que leurs vitesses, qu'on nommera V & v , soient entr'elles reciproquement comme les masses M & m ; c'est à dire, que le rapport inverse des vitesses V & v soit égal au rapport direct des masses M & m . Il * 338. faut donc que $M : m :: v : V$. Car l'on en déduira $* MV = mv$; c'est à dire que les quantitez de mouvement sont égales.

Cela supposé, voici le Problème. Une vitesse (u) étant donnée, la partager reciproquement aux masses M & m de deux corps; c'est à dire la partager en deux parties, qu'on nommera V & v , telles que leur rapport inverse $\frac{1}{v}$ soit égal au rapport direct $\frac{M}{m}$ des masses des corps.

Operation Il faut faire deux regles de proportion. Le premier terme de chacune doit être la somme des deux masses $M + m$; le second terme de chacune doit être la vitesse à partager (u), le 3^e terme de la premiere regle doit être la masse m du second corps, le 3^e terme de la 2^e regle doit être la masse M du premier corps; &c. les 4^e termes, qu'on trouvera en faisant ces deux regles,

$$M + m : u :: \begin{cases} m \cdot \frac{u}{M + m} = V. \\ M \cdot \frac{u}{M + m} = v, \end{cases}$$

seront

seront les parties de vitesses qu'on cherche ; savoir $\frac{m \cdot u}{M + m}$ sera la vitesse V qu'il faut donner au corps M ; & $\frac{Mu}{M + m}$ sera la vitesse v qu'il faut donner au corps m ; & après cela leurs quantitez de mouvement MV & mv seront égales. Car il est évident que les numérateurs mu & Mu des 4^{es} termes, ayant le même consequent $M + m$, & étant chacun multiplié par la même grandeur (u) , sont entr'eux comme m à M , c'est à dire, le rapport des 4^{es} termes est égal à l'inverse du rapport direct $\frac{M}{m}$, & de plus il est évident que la somme des 4^{es} termes $\frac{m \cdot u}{M + m} + \frac{Mu}{M + m}$ est égale à la grandeur (u) qu'il falloit partager.

COROLLAIRE III. PROBLÈME II.

342. **DEUX** grandeurs a & c étant données, trouver la grandeur y qui est un moyen proportionnel entre a & c , c'est à dire dans la proportion continue $a :: y :: c$, il faut trouver le moyen proportionnel y , les deux grandeurs a & c étant données.

Operation. Il faut multiplier a par c , & prendre la racine quarrée du produit ac ; cette racine z^* , représentée par \sqrt{ac} , sera la grandeur y qu'on cherche. Car par la supposition $a :: y :: c$. Donc $a \cdot y = ac$. En tirant la racine z^* de chacune de ces grandeurs égales, on aura $a \cdot y = \sqrt{ac}$. * 538.
* 212.

COROLLAIRE IV. PROBLÈME III.

343. **LE** produit ac de deux grandeurs étant donné, trouver un quarré y^2 qui lui soit égal.

Operation. Il faut trouver $a \cdot y$ moyenne proportionnelle entre a & c , & le quarré y^2 de y sera égal à ac . * 342.
* 338.

REMARQUES.

I.

344. **DANS** les grandeurs numeriques, lorsque le produit ac des deux grandeurs numeriques données, n'est pas une puissance parfaite, on ne peut pas trouver exactement un nombre y qui soit moyen proportionnel entre le nombre a & le nombre c ; mais dans la Geometrie, en exprimant chacune des lignes droites d'une figure par une lettre, on peut trouver

Tt

exactement une ligne, représentée par y , qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données a & c .

2.

345. On fera remarquer ici aux Commencans, par rapport aux calculs dans lesquels les grandeurs doivent être homogènes, la manière de distinguer dans les fractions littérales, celles qui sont homogènes, c'est à dire d'un même nombre de dimensions.

La multiplication des grandeurs littérales est la cause de leurs dimensions; par exemple, le produit ab est de deux dimensions; abc est de trois dimensions, &c. La division qui est opposée à la multiplication, diminue les dimensions des produits. C'est pourquoi dans une fraction littérale, le numérateur étant censé être divisé par le dénominateur, le surplus des dimensions du numérateur sur le dénominateur, est le nombre des dimensions de la fraction. Par exemple $\frac{ab}{c}$ est une fraction lineaire; $\frac{abc}{d}$ est de deux dimensions; $\frac{abcd}{e}$ est de trois dimensions. Il en est de même des autres.

Quand on a des fractions qui ne sont pas homogènes, on peut les rendre homogènes en multipliant le numérateur de celles qui ont le moins de dimensions, ou multipliant le dénominateur de celles qui ont le plus de dimensions par une grandeur littérale prise pour l'unité. Ainsi pour rendre $\frac{a}{b}$ homogène à $\frac{c}{d}$, on prendra, par exemple, a pour l'unité, & l'on écrira $\frac{a^2}{b}$ au lieu de $\frac{a}{b}$, & $\frac{ac}{d}$ sera homogène à $\frac{a^2}{b}$; ou bien on écrira $\frac{a}{b^2}$ au lieu de $\frac{a}{b}$, & les fractions $\frac{a}{b^2}$, $\frac{c}{d^2}$ seront homogènes. Ces opérations en changeant l'expression des fractions, n'en changent point la valeur; car il est évident qu'une grandeur multipliée ou divisée par l'unité ou par les puissances de l'unité, ne change point de valeur.

COROLLAIRE V. PROBLÈME IV.

346. **DEUX** termes d'une progression géométrique étant donnez; trouver de suite tous les termes suivans.

Operation. Soient les deux premiers termes donnez a & b ; il est évident que l'on a trois termes d'une proportion continue $a. b : b. x$; & l'on cherche le 4^e terme x qui est le 3^e

- * 347. terme de la progression. On le trouvera en prenant * le quar-

ré b^2 du moyen b , &c le divifant par le premier terme a , &c il viendra $x = \frac{b^2}{a}$. L'on a déjà $\div a. b. \frac{b^2}{a}$. Pour trouver par ordre les termes fuivans, on voit clairement qu'il ne faut que prendre le quarré du terme qu'on vient de trouver, &c divifer ce quarré par le terme qui précède immédiatement le terme qu'on vient de découvrir, &c le quotient fera le terme qui le fuit. Ainfi la progression fera $\div a. b. \frac{b^2}{a}. \frac{b^4}{a^2}. \frac{b^6}{a^3}. \frac{b^8}{a^4}$, &c.

Si le premier terme de la progression eft l'unité, tous les termes feront de fuite les puiffances du fecond terme, $\div 1. a. a^2. a^3. a^4$, &c.

Si l'unité étant le premier terme, le fecond eft $\frac{1}{2}$, on trouvera que la progression eft $\div 1. \frac{1}{2}. \frac{1}{4}. \frac{1}{8}. \frac{1}{16}$, &c. ou bien, * ce qui revient au même, $\div 1. a^{-1}. a^{-2}. a^{-3}. a^{-4}$, &c.

On peut ordonner ces deux progressions de maniere qu'elles ne feront qu'une même progression, dans laquelle le rapport de chaque terme à celui qui eft immédiatement plus à droite que lui, fera $\frac{1}{2}$: (ce rapport eft nommé *le rapport qui reigné dans la progression*.) l'unité fera entre les termes de la progression qui auront pour expoſans des nombres entiers poſitifs qui fuivront vers la droite, &c entre les termes qui auront des expoſans négatifs qui précéderont l'unité vers la gauche; &c on pourra concevoir que la progression s'étend à l'infini tant vers la droite que vers la gauche de l'unité. \div &c. $a^{-6}. a^{-5}. a^{-4}. a^{-3}. a^{-2}. a^{-1}. 1. a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6$, &c.

On peut de même continuer à l'infini vers la gauche la progression $\div a. b. \frac{b^2}{a}. \frac{b^4}{a^2}. \frac{b^6}{a^3}$, &c. &c l'on trouvera \div &c. $\frac{b^8}{a^4}. \frac{b^{10}}{a^5}. \frac{b^{12}}{a^6}. a. b. \frac{b^2}{a}. \frac{b^4}{a^2}. \frac{b^6}{a^3}. \frac{b^8}{a^4}$, &c. ou bien \div &c. $a^4 b^{-4}. a^3 b^{-3}. a^2 b^{-2}. a. b. a^{-1} b^1. a^{-2} b^2. a^{-3} b^3$, &c.

REMARQUE.

Ces expreſſions des progressions geometriques, priſes de leur formation, ſervent à en découvrir facilement les proprietéz.

T c ij

Des changemens qu'on peut faire sur les quatre termes a. b :: c d d'une proportion droite, de maniere que les quatre nouveaux termes qui viendront de ces changemens, feront encore une proportion.

347. **O**N a déjà démontré deux de ces changemens; sçavoir,
 * 1^{re}. quand on a une proportion droite $a.b :: c.d$, on aura * la
 * 61. proportion inverse $b.a :: d.c$, & * l'alterne $a.c :: b.d$.

COROLLAIRE VI.

348. **L**A proportion droite étant $a.b :: c.d$, on aura (ce qu'on nomme *en composant* ou *par composition*, ce qu'on devroit plutôt nommer *en ajoutant* ou *par addition*) $a + b.b :: c + d.d$; on aura encore $a - b.b :: c - d.d$, (ce qu'on nomme *en divisant* ou *par division*, & ce qu'on devroit plutôt nommer *en retranchant* ou *par soustraction*.)
 * 338. *Démonstration.* Il suit de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que * $ad = bc$. Cela supposé, on trouve que le produit des extrêmes de l'une & l'autre des proportions précédentes, est égal au produit des moyens; car dans la première, $ad + bd = bc + bd$; & dans
 * 338. la seconde, $ad - bd = bc - bd$. Donc * $a + b.b :: c + d.d$; & $a - b.b :: c - d.d$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE VII.

349. **O**N déduit des proportions précédentes cette autre-ci, $a + b.c + d :: a - b.c - d$. Car puisqu'on a démontré que $a + b.b :: c + d.d$, & que $a - b.b :: c - d.d$, on aura la proportion alterne $a + b.c + d :: a - b.c - d$.

COROLLAIRE VIII.

350. **L**A proportion droite étant $a.b :: c.d$, on aura $a.c - b.d :: c.c - d.d$. Ce qu'on nomme *conversion de raison*, ou simplement *conversion*. On aura encore $a.a + b :: c.c + d$. Car la
 * 338. proportion droite donnant * $ad = bc$, dans l'un & l'autre des changemens de ce Corollaire, on trouvera le produit des extrêmes égal à celui des moyens, étant visible que dans le premier, $ac - ad = ac - bc$, & dans le second, $ac + ad = ac + bc$.

REMARQUES.

1.

351. ON doit remarquer que la proportion droite étant $a. b :: c. d$, & l'alterne $a. c :: b. d$, les mêmes changemens qui conviennent à la proportion droite, doivent aussi convenir à l'alterne. Ainsi, 1°. $a \div c :: b \div d$; 2°. $a - c :: b - d$; 3°. $a \div c. b \div d :: a - c. b - d$; 4°. $a. a - c :: b. b - d$; 5°. $a. a \div c :: b. b \div d$.

2.

Voilà les principaux changemens que l'on peut faire sur les termes d'une proportion droite, de manière que les quatre termes qui résultent de ces changemens, soient encore en proportion. Il faut se les rendre très familiers à cause de leur fréquent usage. Il y en a encore d'autres qui ne sont pas d'un si grand usage. Il est inutile de les mettre, car quand on les rencontrera, ou quand on en aura besoin, on pourra toujours s'assurer si les quatre nouveaux termes sont en proportion en prenant le produit des extrêmes & des moyens, & en voyant s'ils sont égaux. On en va mettre quelques exemples pour faire voir aux Commensans qu'ils ne scauroient leur causer de difficulté.

COROLLAIRE IX.

352. QUAND on a une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, laquelle donne $ad = bc$; en supposant que m représente un nombre quelconque entier ou rompu, & que n en représente un autre, on aura, 1°. $\frac{ma}{b} = \frac{mc}{d}$; 2°. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; 3°. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; 4°. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; 5°. $\frac{ma + nb}{b} = \frac{mc + nd}{d}$, &c. Car il est évident que dans tous ces changemens le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. On a mis, pour abréger, \div dans les deux derniers changemens; c'est à dire afin de renfermer deux cas en un seul.

COROLLAIRE X.

353. SUPPOSE' $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ce qui donne $* ad = bc$; & que $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, ce qui donne $ed = hf$; l'on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Car il est évident que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

COROLLAIRE XI.

354. **D**ANS une proportion $a. b :: c. d$, le plus grand & le plus petit termes sont toujours les deux extrêmes ou les deux moyens. C'est à dire, si a est plus grand que chacun des trois autres termes, d est nécessairement le plus petit terme. Si a est le moindre, d est le plus grand. Si c'est un moyen b qui est le plus grand ou le moindre des termes, l'autre moyen c sera le plus petit ou le plus grand.

* 338. *Démonstration.* * $ad = bc$. Donc si le plus grand terme se trouve parmi les extrêmes, & que ce soit par exemple a ; d ne sauroit être ni égal à chacun des deux moyens b ou c , ni plus grand qu'aucun des deux moyens b ou c ; car le produit ad surpasseroit le produit bc de b , (b étant supposé égal à d , ou moindre que d) par c plus petit que a , par la supposition. Ainsi d est le plus petit terme de la proportion quand a est le plus grand. Si c'étoit un des moyens qui fût le plus grand ou le plus petit terme de la proportion, la même démonstration feroit voir que l'autre moyen seroit aussi le plus petit ou le plus grand terme.

COROLLAIRE XII.

355. **L**ORSQUE le plus grand terme a est un des extrêmes, & par conséquent le plus petit est l'autre; la somme des extrêmes $a + d$ surpassé la somme des moyens $b + c$; c'est le contraire quand le plus grand & le plus petit termes sont les moyens.

Démonstration. Puisque $a. b :: c. d$, l'on aura par conversion, * 350, $a. a - b :: c. c - d$; d'où viendra l'alterne $a. c :: a - b. c - d$. Mais par la supposition $a > c$. Donc $a - b > c - d$. Par conséquent si l'on ajoute $b + d$ à chaque membre, $a - b + b + d (= a + d) > c - d + b + d (= b + c)$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE XIII.

356. **D**'où il suit que dans une proportion continue $a. b :: b. c$, la somme $a + c$ des extrêmes surpassé le double $2b$ du moyen proportionnel.

COROLLAIRE XIV.

357. Si l'on a trois grandeurs d'une part a, b, c , & trois d'une autre e, f, g , de telle sorte que $a, b :: e, f$, & $b, c :: f, g$, l'on aura (ce qu'on nomme *par égalité*) $a, c :: e, g$.

Démonstration. Puisque $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, on aura $* \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$. De même $\frac{b}{c} = \frac{f}{g}$ donnera $* \frac{b}{c} = \frac{f}{g}$. Donc $* \frac{a}{b} = \frac{f}{g}$. Par conséquent $* a, c :: e, g$. Ce qu'il falloit démontrer. * 347.
* 347.
* 320.
* 347.

S'il y avoit tant de grandeurs qu'on voudra d'une part a, b, c, d, e , &c. & le même nombre de grandeurs f, g, h, i, k , &c. d'une autre; suppose qu'on nomme correspondantes la première d'une part & la première de l'autre, la seconde d'une part & la seconde de l'autre, & ainsi de suite; & qu'en allant de suite de la première à la dernière, deux grandeurs de la première part aient toujours le même rapport que les deux correspondantes de la seconde part; la même démonstration continuée, fera voir que la première d'une part, sera toujours *par égalité* à la dernière, ou à telle autre qu'on voudra; comme la première de l'autre part à la dernière, ou à la correspondante.

COROLLAIRE XV.

358. Si l'on a a, b, c d'une part, e, f, g de l'autre; & que la première a soit à la seconde b d'une part, comme de l'autre la seconde f à la troisième g ; & que la seconde b de la première part soit à la troisième c , comme de l'autre la première e est à la seconde f , on aura (ce qu'on nomme dans les *Elémens* d'Euclide *par égalité troublée*) la première a à la troisième c d'une part, comme de l'autre la première e à la troisième g .

Démonstration. $\frac{a}{b} = \frac{f}{g}$ donne $* ag = bf$. De même $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$ donne $bf = ce$. Donc $ag = ce$. Par conséquent $* a, c :: e, g$. Ce qu'il falloit démontrer. * 338.
* 338.

REMARQUE.

CETTE manière de conclure *par égalité troublée*, est difficile à retenir; c'est pourquoi quand on la trouve dans les Auteurs, il suffit de s'assurer de la conclusion $\frac{a}{c} = \frac{e}{g}$ par l'égalité du produit des extrêmes & du produit des moyens,

que l'on déduit des proportions données qui servent de prémisses, sans se mettre en peine de retenir cette manière d'arranger les grandeurs données.

COROLLAIRE XVI.

359. Si l'on a quatre grandeurs qui fassent une proportion $a . b :: c . d$; les puissances quelconques d'un même degré, dont on marquera l'exposant par m , font aussi une proportion; c'est
 * 338. à dire $a^m . b^m :: c^m . d^m$. Car il suit de $a . b :: c . d$, * que
 $ad = bc$. Elevant chacun de ces produits égaux à la puissance
 * 311. ce m , on aura * $a^m d^m = b^m c^m$. Donc * $a^m . b^m :: c^m . d^m$.
 * 338. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE XVII.

360. D'où il suit que si $a^m . b^m :: c^m . d^m$, on aura $a . b :: c . d$; car le produit des extrêmes $a^m d^m$ étant égal à celui des moyens $b^m c^m$;
 * 311. les racines, dont l'exposant est m , de ces produits * sont nécessairement
 * 338. également égales. Ainsi $ad = bc$; d'où * l'on a $a . b :: c . d$.
 Ces deux derniers Corollaires conviennent aussi aux racines quelconques. Si $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} . \sqrt[m]{d}$, l'on aura $a . b :: c . d$; & si $a . b :: c . d$, l'on aura $\sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} . \sqrt[m]{d}$. C'est la même démonstration.

COROLLAIRE XVIII.

361. Si l'on a une progression quelconque $\div a . b . c . d . e . f$, &c. l'on aura aussi $\div a^m . b^m . c^m . d^m . e^m . f^m$, &c. & encore $\div \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} . \sqrt[m]{c} . \sqrt[m]{d} . \sqrt[m]{e} . \sqrt[m]{f}$, &c. & si $\div a^m . b^m . c^m . d^m . e^m$, &c. ou bien encore si $\div \sqrt[m]{a} . \sqrt[m]{b} . \sqrt[m]{c} . \sqrt[m]{d} . \sqrt[m]{e}$, &c. l'on aura aussi $\div a . b . c . d . e$, &c. C'est la même démonstration.

AVERTISSEMENT.

- VOILA les propositions sur les proportions des grandeurs qui sont le plus d'usage; il est inutile d'en apprendre beaucoup d'autres qu'on pourroit ajouter. Quand il s'en présentera, on les
 * 336. deduira aisément de * l'11^e & du 12^e Theorèmes.
 * 338.

Les Comparaisons des rapports inégaux.

COROLLAIRES DE L'ONZIÈME THEOREME *, * 336.

1.

362. Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, l'on aura * $ad > bc$. Et si $ad > bc$, l'on aura * 336.
 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. * 337.

2.

363. Supposant $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ce qui donne * $ad > bc$, l'on aura pour * 336.
 les rapports inverses $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ car $bc < ad$.

3.

364. On aura pour l'alterne $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, puisque $ad > bc$.

4.

365. On aura par composition, ou plutôt par addition $\frac{a+b}{c+d} > \frac{a}{c}$, * 336.
 car * $ad + bd > bc + bd$.

5.

366. On aura par division, ou plutôt par soustraction $\frac{a-b}{c-d} > \frac{a}{c}$,
 parceque $ad - bd > bc - bd$.

6.

367. Enfin on aura par conversion $\frac{a}{a-b} < \frac{c}{c-d}$; car le produit des
 extrêmes $ac - ad$ est moindre que celui des moyens $ac - bc$,
 puisque dans le premier le produit ad (plus grand par la sup-
 position que bc) est retranché de ac , & dans le second bc
 moindre que ad est retranché de la même grandeur ac .

7.

368. Si l'on a plusieurs grandeurs d'une part a, b, c , & autant d'une
 autre e, f, g , & que $\frac{a}{e} > \frac{b}{f}$; & $\frac{b}{f} > \frac{c}{g}$. On aura par égalité * $\frac{a}{e} > \frac{c}{g}$.
Démonstration. $\frac{a}{e} > \frac{b}{f}$ donne l'alterne * $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$, & $\frac{b}{f} > \frac{c}{g}$ * 364.
 donne l'alterne * $\frac{b}{c} > \frac{f}{g}$. Donc $\frac{a}{c} > \frac{e}{g}$; d'où l'on tire l'alterne * 364.
 $\frac{a}{e} > \frac{c}{g}$. Ce qu'il falloit démontrer.

8.

369. Ayant d'une part a, b, c , & de l'autre e, f, g , supposant
 $\frac{a}{e} > \frac{b}{f}$, & $\frac{b}{f} > \frac{c}{g}$, on aura par égalité troublee $\frac{a}{e} > \frac{c}{g}$.

V u

- * 336. *Démonstration.* $\frac{a}{2} > \frac{f}{2}$ donne $* ag > bf$; & $\frac{b}{2} > \frac{f}{2}$ donne $* bf > ce$. Donc $ag > ce$; d'où l'on déduit $* \frac{a}{2} < \frac{c}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

9.

370. Si c est moindre que a , & d moindre que b , & qu'on suppose $\frac{a}{2} > \frac{c}{2}$, l'on aura $\frac{b}{2} < \frac{d}{2}$.
Démonstration. $\frac{a}{2} > \frac{c}{2}$ donne $ad > bc$. Cela supposé, il est évident que le produit des extrêmes $ab - ad$ de $\frac{a}{2}$, $\frac{c}{2}$, est moindre que le produit des moyens $ab - bc$.

REMARQUE.

- Ces propositions sur la comparaison des rapports inégaux sont bien de moindre usage que celles qui sont sur la comparaison des rapports égaux. Ainsi il est inutile d'ajouter d'autres comparaisons des rapports inégaux; s'il s'en présentoit, on les déduiroit aisément de l'11^e Théorème & des Corollaires précédens; & l'on déduit même si facilement toutes
 * 336. celles qu'on vient d'expliquer de l'11^e Théorème *, qu'il suffit de bien le retenir, comme un principe fondamental de la comparaison des rapports égaux & inégaux; & il est inutile de se charger la mémoire des comparaisons des rapports inégaux.

SECTION V.

Où l'on explique les rapports composés.

DÉFINITIONS.

1.

371. SI l'on multiplie plusieurs rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, les uns par les autres, leur produit $\frac{ace}{bdf}$ s'appelle un rapport composé de ces rapports, lesquels se nomment aussi les rapports composans, ou les rapports simples.
 Il est évident que ce seroit la même chose, si l'on disoit que le rapport du produit ace de tous les antécédens de plusieurs rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, au produit bdf de tous les consé-

quents, est composé de tous ces rapports qui en sont les rapports composans.

2.

372. Lorsque les rapports composans sont égaux, s'il y en a deux, le rapport composé de ces deux rapports égaux s'appelle un rapport *doublé* de chacun de ces rapports égaux; s'il y en a trois, le rapport composé s'appelle *triplé* de chacun de ces rapports; s'il y en a quatre, il se nomme *quadruplé* de chacun de ces rapports, &c ainsi de suite. Par exemple, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$; $\frac{ac}{bd}$ est un rapport doublé de $\frac{a}{b}$, ou de son égal $\frac{c}{d}$. $\frac{ace}{bdf}$ est triplé de $\frac{a}{b}$, ou de son égal $\frac{c}{d}$, ou de $\frac{e}{f}$. $\frac{acde}{bfgh}$ est quadruplé de $\frac{a}{b}$, ou de son égal $\frac{c}{d}$, ou de son égal $\frac{e}{f}$, ou de son égal $\frac{g}{h}$. Il en est de même des autres.

REMARQUE.

QUAND tous les rapports composans d'un rapport composé sont égaux entr'eux, on peut considérer le rapport composé, comme s'il n'étoit fait que du même rapport répété plusieurs fois; c'est à dire multiplié par lui-même plusieurs fois. Ainsi ce rapport composé peut être considéré comme un produit dont tous les multiplicateurs sont égaux entre eux.

D'où il suit que si deux ou plusieurs rapports sont composés chacun d'un même nombre de rapports, de façon que tous les rapports composans de chacun soient égaux entre eux; ces rapports composés ne sauraient être égaux, que le rapport simple dont l'un est composé ne soit égal au rapport simple dont l'autre est composé. Car il est évident que quand deux produits sont égaux, si les multiplicateurs de l'un sont tous égaux entr'eux, &c que les multiplicateurs de l'autre soient aussi égaux entr'eux, &c qu'il y ait un même nombre de multiplicateurs dans l'un & dans l'autre; il faut que le multiplicateur, par la répétition duquel l'un des produits est formé, soit égal au multiplicateur, par la répétition duquel, faite le même nombre de fois, l'autre produit égal est aussi formé.

La proposition qu'on vient d'expliquer dans cette remarque est si évidente, qu'on pourra la mettre pour la 2^e partie du 1^{er} axiome qui suivra bien-tôt.

Vu ij

3^e DEFINITION.

373. CHACUN des rapports simples égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dont un rapport $\frac{a}{b}$ est doublé, s'appelle *soudoublé* de ce rapport $\frac{a}{b}$. Chacun des rapports égaux $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, dont un rapport $\frac{a}{b}$ est triplé, s'appelle *soutriplé* de ce rapport, &c ainsi des autres. On dit, par exemple, que le rapport de a à b est soudoublé du rapport de ac à bd , &c que le rapport de a à b est soutriplé du rapport de ace à bdf .

4.

374. Deux produits homogenes qui sont en rapport doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c s'appellent *semblables*, ainsi supposant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, ac & bd sont des produits semblables, &c encore ace , bdf , &c de même $aceg$, $bdfh$.

Les deux termes de chacun des rapports simples égaux qui sont les rapports composans sont nommez *relatifs* ou *homologues*. Ainsi dans les produits semblables $aceg$, $bdfh$, a est relatif à b , c à d , e à f , &c g à h .

5.

375. Si deux produits homogenes ABC , abc sont égaux, &c que les dimensions A , B , C du premier, quoiqu'inégales entr'elles, soient pourtant égales, la premiere A de l'un à la premiere a de l'autre; la seconde B à la seconde b , &c la troisième C à la troisième c . On dit que les dimensions de l'un sont égales aux dimensions de l'autre *chacune à chacune*, ou que les multiplicateurs sont égaux chacun à chacun.

A X I O M E S.

I.

376. LORSQUE les rapports composans de deux rapports composez d'un même nombre de rapports simples, sont égaux chacun à chacun, les deux rapports composez sont égaux. Car deux produits sont égaux quand les multiplicateurs de l'un sont égaux aux multiplicateurs de l'autre chacun à chacun.

Quand les rapports ne sont composez chacun que de simples rapports tous égaux entr'eux; si deux ou plusieurs rap-

ports composez chacun d'un même nombre de rapports composans, sont égaux, le rapport simple par la répétition duquel l'un est composé est égal au rapport simple par la répétition duquel, faite le même nombre de fois, l'autre est aussi composé.

2^e A X I O M E.

377. Si deux ou plusieurs rapports sont égaux, & que l'un soit composé d'un certain nombre de rapports composans, on peut concevoir chacun des rapports égaux à ce rapport composé, comme étant aussi composé des mêmes rapports composans, ou du même nombre de rapports composans égaux aux rapports composans du premier chacun à chacun. Par exemple $\frac{6}{10} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$. Le premier $\frac{6}{10}$ est composé des trois rapports simples $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$, on peut concevoir $\frac{2}{5}$ & $\frac{4}{10}$ chacun comme étant composé des mêmes rapports, ou de trois rapports qui leur soient égaux chacun à chacun.

R E M A R Q U E.

378. Q U A N D on a dit qu'on pouvoit concevoir les rapports composez égaux, comme composez chacun des mêmes rapports composans, ou de rapports composans égaux, on n'a pas prétendu dire que chacun des rapports composans, dont est formé un rapport composé, fussent déterminés, & précisément les mêmes rapports. Car un même rapport composé, comme $\frac{1}{2}$, peut être conçu composé des trois rapports $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$. Il peut encore être conçu composé des trois rapports $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, qui ne sont pas égaux aux trois premiers. Mais quelque variété qu'on puisse concevoir dans les rapports composans d'un rapport composé; il est toujours évident que deux rapports composez égaux peuvent aussi être conçus composez d'un même nombre de rapports, de sorte que les rapports composans de l'un soient les mêmes que les composans de l'autre, ou qu'ils leur soient égaux.

C O R O L L A I R E S.

I.

379. D E U X produits homogenes ab & cd ; abc & def ; $abcd$ & $efgb$, &c. ont entre eux un rapport composé des rapports
Vu iij

qui font entre les dimensions de l'un & les dimensions de l'autre, ou entre les multiplicateurs de l'un & les multiplicateurs de l'autre. $\frac{a^2}{b^2} = * \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, $\frac{a^2 b^2}{c^2 d^2} = \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} \times \frac{b}{d} \times \frac{b}{d}$, &c.

- * 187 & 371. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h}$, &c.

2.

380. Lorsque deux produits homogenes ont quelques-unes de leurs dimensions égales, ils sont entr'eux comme leurs dimensions inégales $\frac{a^2 b^2}{c^2 d^2} = * \frac{a}{c}$; $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$, &c.

3.

381. Quand il y a entre deux grandeurs a & f plusieurs grandeurs interposées, comme dans cette suite a, b, c, d, e, f , Le rapport des deux grandeurs a & f entre lesquelles il y en a plusieurs autres d'interposées b, c, d, e , est composé de tous les rapports qui sont entre les interposées. C'est à dire dans la suite a, b, c, d, e, f . Le rapport $\frac{a}{f}$ est composé de tous les rapports $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}$.

- * 371. *Démonstration.* $* \frac{a^2 b^2}{c^2 d^2}$ est un rapport composé * de $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}, \frac{a}{c}, \frac{b}{d}$,
 * 109. $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$. Or $\frac{a^2 b^2}{c^2 d^2} = * \frac{a}{c}$. Par conséquent * $\frac{a}{c}$ est aussi composé
 * 377. de des mêmes rapports qui sont entre les grandeurs interposées. Ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE.

382. **O**N voit par le Corollaire précédent qu'on est libre de faire qu'un rapport simple $\frac{a}{b}$ puisse être conçu comme composé de tant, & pour ainsi dire, de tels rapports qu'on voudra, car supposé qu'on veuille que $\frac{a}{b}$ puisse être conçu composé de six rapports; il n'y a qu'à interposer cinq grandeurs entre a & b , & l'on aura, par exemple, la suite a, b, c, d, e, f, g , &c on pourra concevoir que $\frac{a}{b}$ est un rapport composé de ces six rapports $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{f}, \frac{f}{g}$. On pourroit même faire en sorte que tous ces rapports composans fussent donnez, & tels qu'on voudroit, si ce n'est le dernier $\frac{f}{g}$ qui se trouveroit nécessairement déterminé.

Quoique cette maniere de faire qu'un rapport simple puisse être regardé comme composé de tant de rapports composans qu'on voudra, soit arbitraire, elle ne laisse pas

d'être d'usage pour avoir la résolution de plusieurs Problèmes dans les Mathématiques.

PROBLÈME I.

383. *Avant deux ou plusieurs rapports composés, trouver le rapport qui en est composé.*

1. *Manière.* Il n'y a qu'à multiplier tous les rapports composés les uns par les autres, & le produit * sera le rapport * 371. composé qu'on demande. Ainsi le rapport composé de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ est $\frac{2}{5}$.

2. *Manière.* Pour avoir le rapport composé des deux $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, il faut faire cette proportion * $a.b::d.\frac{a}{b}$. On nommera * 341. p le quatrième terme $\frac{a}{b}$, & l'on aura $\frac{2}{3}$ pour le rapport composé de $\frac{2}{3}$ & de $\frac{3}{4}$. Car dans la suite c, d, p , le rapport $\frac{c}{d}$ * 381. est composé de $\frac{2}{3}$ & de $\frac{3}{4}$; mais par la construction $\frac{c}{d} = \frac{2}{p}$. Par conséquent $\frac{2}{p}$ est un rapport composé de $\frac{2}{3}$ & de $\frac{3}{4}$.

S'il y a trois rapports composés $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. On trouvera d'abord, comme on vient de l'enseigner, le rapport $\frac{2}{5}$ composé des deux $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. On fera ensuite cette proportion * 341. $c.f::p.\frac{cf}{p}$. On supposera $\frac{cf}{p} = q$, & l'on aura le rapport $\frac{c}{q}$ composé des rapports $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. Car dans la suite c, d, p, q , le rapport $\frac{c}{q}$ est * composé de $\frac{2}{3}$, de $\frac{d}{p} = \frac{2}{5}$, & de $\frac{p}{q} = \frac{4}{5}$. * 381.

S'il y a quatre rapports composés $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, après avoir trouvé le rapport $\frac{2}{5}$ composé des trois premiers $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, on fera cette proportion $g.b::q.\frac{bg}{b}$, & supposant $\frac{bg}{b} = r$, le rapport $\frac{g}{r}$ sera composé des quatre $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$. Car dans la suite c, d, p, q, r , le rapport $\frac{c}{r}$ * est composé des rapports * 381. $\frac{2}{3}$, $\frac{d}{p} = \frac{2}{5}$, $\frac{p}{q} = \frac{4}{5}$, & $\frac{q}{r} = \frac{5}{6}$.

REMARQUES.

I.

384. *CETTE* seconde méthode de trouver le rapport composé de tant de rapports composés donnez qu'on voudra qui se pratique en interposant, entre une grandeur donnée, & une autre qu'on trouve par des proportions réitérées, des grandeurs telles que les rapports des grandeurs interposées soient égaux aux rapports proposés chacun à chacun; cette

methode, dis-je, de trouver un rapport composé de rapports simples donnez, est celle que l'on suit ordinairement dans la Geometrie & dans les Sciences Mathematiques où l'on employe les figures de la Geometrie.

2.

385. Cette methode a ces deux commoditez, 1°. En supposant que chacun des termes des rapports composans représente une ligne droite, chaque proportion de l'operation faisant aussi trouver pour quatrième terme une ligne droite, la premiere & la dernière grandeur entre lesquelles sont interposées les grandeurs qu'on trouve, ne sont chacune qu'une ligne droite, aussi bien que chacune des interposées, & cette, premiere & dernière grandeur étant représentées chacune par une seule lettre, le rapport composé de tant de rapports composans qu'on voudra n'est exprimé que par deux lettres, l'une au numerateur, & l'autre au dénominateur, ce qui rend l'expression du rapport composé la plus simple qu'il se puisse. Par exemple, on a vû que le rapport composé $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ se reduit à $\frac{a}{f}$.

3.

386. 2°. On peut diversifier l'expression la plus simple d'un rapport composé de plusieurs rapports donnez, de differentes manieres toutes équivalentes, parmi lesquelles on a la liberté de choisir celles qui peuvent être les plus commodes pour la résolution des Problèmes.

Pour faire clairement concevoir aux Commensans la maniere de trouver ces differentes expressions simples équivalentes d'un rapport composé de plusieurs rapports, on leur fera remarquer qu'on peut prendre celle qu'on voudra des grandeurs données dans les rapports composans donnez, pour le premier terme du rapport composé qu'on cherche. Par exemple, si l'on veut qu'un des numerateurs duquel on voudra des rapports composans $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$, soit pris pour le premier terme du rapport composé qu'on cherche, & que ce soit, par exemple a , on fera ces proportions les unes après les autres. 1°. $c. d :: b. p$. 2°. $e. f :: p. q$. 3°. $g. h :: q. r$, & l'on aura $\frac{a}{r}$ pour le rapport composé qu'on cherche. Car

387. dans la suite a, b, p, q, r , le rapport $\frac{a}{r}$ est composé de $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}, \frac{b}{p} = \frac{b}{p}, \frac{p}{q} = \frac{p}{q}, \frac{q}{r} = \frac{q}{r}$.

Si l'on veut que le premier terme du rapport composé qu'on cherche soit l'un des dénominateurs des rapports composans donnez. Par exemple b , on fera par ordre ces proportions. 1^{re}, $d. c :: a. p.$ 2^e, $f. e :: p. q.$ 3^e, $b. g :: q. r.$ Et le rapport composé qu'on cherche sera $\frac{f}{d}$. Car dans la suite $r. q. p. a. b$, on aura (à cause des rapports inverses) $\frac{f}{d}$ pour le rapport composé * de $\frac{f}{p} = \frac{a}{b}$, $\frac{p}{q} = \frac{e}{g}$, $\frac{q}{r} = \frac{c}{d}$; $\frac{f}{d} = \frac{f}{p} \times \frac{p}{q} \times \frac{q}{r} = \frac{a}{b} \times \frac{e}{g} \times \frac{c}{d}$.

REMARQUE IV.

387. ON peut même prendre une grandeur telle qu'on voudra pour le premier terme ou pour le second terme du rapport composé qu'on cherche (ce qui peut servir en quelques résolutions de Problèmes, & en quelques démonstrations) par exemple, supposé qu'on prenne une grandeur arbitraire n pour le premier terme du rapport qu'on cherche, on fera par ordre ces proportions. 1^{re}, $a. b :: n. p.$ 2^e, $c. d :: p. q.$ 3^e, $e. f :: q. r.$ 4^e, $g. h :: r. s.$ Et le rapport composé qu'on cherche sera $\frac{f}{a}$. Car dans la suite $s. r. q. p. n$, on aura $\frac{f}{a}$ pour le rapport composé de $\frac{f}{p} = \frac{c}{d}$, $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$, $\frac{q}{r} = \frac{e}{g}$, $\frac{r}{s} = \frac{h}{g}$; $\frac{f}{a} = \frac{f}{p} \times \frac{p}{q} \times \frac{q}{r} \times \frac{r}{s} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} \times \frac{e}{g} \times \frac{h}{g}$.

PROBLÈME II.

388. AYANT un rapport composé $\frac{f}{a}$ de plusieurs rapports, supposé que tous les rapports composans soient donnez, excepté un seul, trouver le rapport composant qui n'est pas donné.

C'est à dire, quand le rapport $\frac{f}{a}$ n'est composé que de deux rapports, & que l'un des deux composans est donné, par exemple $\frac{f}{a}$, il faut trouver l'autre.

Quand le rapport $\frac{f}{a}$ est composé de trois rapports, & qu'on en suppose deux donnez, par exemple $\frac{f}{p}$, $\frac{p}{q}$, ou que le rapport $\frac{f}{a}$ composé des deux rapports donnez est connu, l'on cherche le troisième, & ainsi des autres.

1. Manière. Il faut diviser le rapport composé donné $\frac{f}{a}$ par le rapport donné $\frac{f}{p}$, s'il n'est composé que de deux rapports ; par le rapport composé $\frac{f}{p}$ de tous les rapports composans donnez, si $\frac{f}{a}$ est composé de plusieurs rapports, & le quotient $\frac{p}{a}$ dans le premier cas, $\frac{p}{a}$ dans le second cas, sera le rapport composant qu'il falloit trouver. Car il est évident

qu'en multipliant par le quotient qu'on vient de trouver $\frac{ad}{bm}$,

- * 107 & le rapport composant donné $\frac{a}{b}$, le produit * sera le rapport
371.

composé $\frac{a}{m}$ de ces deux rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{ad}{bm}$. C'est la même démonstration quand le rapport est composé de plusieurs rapports.

2. *Manière*. Pour trouver le second rapport composant du rapport $\frac{a}{m}$ composé de deux rapports dont le premier $\frac{a}{b}$ est

- * 341. donné, on fera cette proportion * $c. d :: a. p$, & $\frac{p}{d}$ sera le rapport composant qu'on cherche. Car dans cette suite $a, b,$

- * 381. p, m , le rapport de $\frac{a}{m}$ est composé * des deux rapports $\frac{a}{b}$ & $\frac{b}{m}$; mais par la construction $\frac{p}{d} = \frac{b}{m}$ est celui des rapports composans qui est donné. Donc $\frac{p}{d}$ est l'autre que l'on cherchoit.

- * 341. Ou bien on fera cette proportion * $d. c :: m. q$, & $\frac{c}{q}$ sera le rapport qu'on cherchoit. Car dans la suite a, q, m , le rapport

- * 381. $\frac{a}{m}$ est composé * des deux rapports $\frac{a}{q}$ & $\frac{q}{m}$, mais par la supposition $\frac{c}{q} = \frac{q}{m}$; par conséquent $\frac{c}{q}$ est le second rapport composant.

Si $\frac{a}{m}$ est composé de trois rapports, & qu'on en ait deux donnez $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, ou que l'on ait le rapport $\frac{a}{p}$ composé de ces deux là;

- * 383. 1^o pour trouver le troisième, 1^o, * on reduira les deux rap-
maniere.

- * 341. ports composans $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ au rapport $\frac{a}{p}$ qui en est composé s'ils n'y sont pas réduits. 2^o. On fera cette proportion * $c. p :: a. q$, ou celle-ci $p. c :: m. r$. Dans le 1^{er} cas $\frac{q}{p}$ est le 3^e rapport composant qu'on cherche; & dans le 2^e cas, c'est $\frac{r}{p}$. Car dans le

- 1^{er} cas on aura, à cause de la suite a, q, m , le rapport $\frac{a}{m}$ composé des rapports * $\frac{a}{q}$, $\frac{q}{m}$; mais $\frac{q}{p}$ est par la supposition

- * 381. égal au rapport $\frac{a}{p}$ composé des deux rapports composans donnez; par conséquent $\frac{q}{p}$ est le 3^e rapport composant de $\frac{a}{m}$. Dans le 2^e cas, on aura, à cause de la suite a, r, m , le rapport

- * 381. $\frac{a}{m}$ composé * $\frac{a}{r}$ & de $\frac{r}{m}$; mais $\frac{r}{p}$ est égal à $\frac{r}{m}$, c'est à dire au produit des deux rapports donnez; par conséquent $\frac{r}{p}$ est le 3^e rapport composant qu'on cherchoit.

Cela suffit pour faire connoître la maniere de trouver le seul rapport composant inconnu qu'on cherche, lorsque tous les autres rapports composans d'un rapport composé donné $\frac{a}{m}$, sont connus. Si un seul rapport composant de $\frac{a}{m}$ étoit connu, la même methode seroit découvrir le rapport composé des autres rapports simples dont $\frac{a}{m}$ est composé.

Usage des rapports composez dans le Commerce.

A V E R T I S S E M E N T.

ON trouve dans le Commerce une infinité d'exemples qui dépendent des rapports composez. On n'en mettra ici, comme en passant, que de deux sortes pour faire voir l'usage des rapports composez dans le Commerce, parceque l'un n'a en vûe, en ce Traité du calcul, que l'usage qu'il doit avoir pour apprendre à fond les Mathématiques. Les exemples de la 1^{re} sorte sont ceux où ayant tous les rapports composans d'un rapport composé, & un des deux termes d'un rapport qui lui est égal, il faut trouver l'autre terme. C'est ce qu'on nomme *la règle de trois composée*. Par exemple, 2000 livres rapportent en trois années 100 écus de rente, on demande combien 8000 livres donneront de rente en 12 années? On cherche dans cet exemple un nombre inconnu d'écus qui ait avec 100 écus un rapport égal au rapport composé des deux rapports composans le premier de 8000 liv. à 2000 liv. le second de 12 années à 3 années. Les exemples de la 2^e sorte sont ceux dans lesquels il s'agit de partager un nombre donné en un nombre déterminé de parties qui ayent entr'elles des rapports égaux à des rapports composez dont les rapports composans sont donnez. C'est ce qu'on nomme *la règle de société ou de compagnie composée*. Par exemple si trois personnes ayant fait une société, ont mis chacun une certaine somme, ce qui sera les trois sommes a , b , c ; que le premier n'ait mis a que pour un temps d , le second ait mis b pour un autre temps e , le troisième ait mis c pour un autre temps f , & qu'il y ait eu un profit P , il faut partager ce profit P en trois parties inconnues x , y , z , qui ayent entre elles des rapports $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ égaux aux rapports composez, dont le premier a pour rapports composans $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$; le second $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

La Règle de trois composée.

P R O B L È M E.

TOUS les rapports composans d'un rapport composé étant donnez, un seul terme étant aussi donné d'un rapport égal à ce rapport composé, trouver l'autre terme de ce rapport égal.

Xx ij

Règle ou Operation. Il faut apporter toute l'attention nécessaire pour bien distinguer par l'état de la question, tous les termes des rapports composans dont le rapport composé doit être formé, &c le terme seul connu du rapport qui lui est égal dont on cherche l'autre terme. Après quoi on arrangera facilement les termes de cette manière.

On supposera, pour une plus grande clarté, que le terme qu'on cherche est représenté par x , l'autre terme du même rapport par e , les antécédens donnez des rapports composans par a & c , leurs conséquens par b & d . Ainsi l'on aura $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{x}{e}$.

Le terme x qu'on cherche sera mis le dernier dans la 4^e place. On mettra dans la 2^e ou 3^e place le terme connu e , qui est l'antécédent du rapport dont le terme x qu'on cherche est le conséquent. On écrira les uns sous les autres dans la première place tous les antécédens a, c des rapports composans, &c dans la 2^e ou 3^e place tous leurs conséquens b, d , les uns sous les autres. Ensuite on multipliera tous les antécédens de la première place, &c leur produit ac sera le premier terme d'une règle de proportion simple; on prendra le produit bd de tous leurs conséquens qui sont dans la 2^e ou 3^e place, le produit bd sera le 2^e ou 3^e terme de la règle de trois simple. Le terme connu e du rapport dont on cherche l'autre terme, sera le 2^e ou 3^e terme de la règle de trois simple. Enfin on prendra le produit bde du 2^e & du 3^e terme de la règle de trois simple, qu'on divisera par le premier terme ac , &c le quotient $\frac{bde}{ac}$ sera le terme x qu'on cherche.

EXEMPLE I.

2000 liv. (a) rapportent en 3 années (c) 100 écus (e); on demande le nombre d'écus x , que donneront 8000 liv. (b) en 12 années (d).

Arrangement des termes de la règle de trois composée.

$$\begin{array}{rcl} 2000 (a) & 8000 (b) & \\ 3 (c) & 12 (d) & :: 100 (e) . x. \end{array}$$

Règle de trois simple.

6000 (ac). 96000 (bd) :: 100 (e). $x = 1600$ écus ($\frac{bde}{ac}$).
La démonstration est évidente par le calcul littéral; car

par l'état de la question $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; d'où il suit que $x = \frac{1600}{\frac{1}{4}}$. Ainsi la règle sert à découvrir le terme x que l'on cherche du rapport $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$.

REMARQUE.

ON peut réduire tous les Exemples de la règle de trois composée, à plusieurs règles des trois simples. Pour faire cette réduction on dans l'Exemple précédent, on dira. Si 2000 liv (a) rapportent en un certain temps (qui est ici celui de 3 ans) 100 écus (e); quel est le nombre inconnu y d'écus que rapporteront 8000 liv (b) dans le même temps (qui est celui de 3 ans)? L'on fera donc cette proportion * 2000 (a). 8000 (b) :: 100 (e). y — $\frac{1}{2}$ = 400. Ainsi l'on trouvera pour 4^e terme 400 écus = $\frac{1}{2}$. On dira ensuite, en 3 ans (e) une certaine somme (qui est 8000 liv.) rapporte 400 écus ($\frac{1}{2}$), en 12 ans (d), quel nombre d'écus (x) rapportera la même somme 8000 liv * 3 (e). 12 (d) :: 400 ($\frac{1}{2}$). x = $\frac{1600}{\frac{1}{2}}$ = 1600. Ainsi le terme x que l'on cherchoit est 1600 écus, comme on l'avoit trouvé dans l'Exemple. * 341.

Voici la raison pourquoi on a mis cette manière de réduire la règle de trois composée, à plusieurs simples. Il y a des cas où l'on cherche le terme x d'un rapport dont l'autre terme (e) est connu, lequel rapport est égal à un rapport composé dont tous les rapports composans sont donnez, mais il y a parmi ces rapports composans donnez des rapports inverses, & ces rapports composans inverses qui sont connus, & qui entrent dans la règle de trois composée, lui font donner le nom de règle de trois composée inverse. Dans ces cas il y a une règle pour trouver le terme inconnu qu'on cherche; mais comme elle pourroit embarrasser les Commensans, on a cru qu'il valoit mieux leur apprendre à réduire tous les Exemples des règles de trois composées, tant ceux qui ne contiennent que des rapports composans directs, que ceux qui en contiennent d'inverses, à de simples proportions: ce qui ne sçauroit jamais embarrasser; on en va mettre une Exemple.

EXEMPLE II.

100 Soldats (a) dépensent 40 écus (e) en 3 jours (e), en quel nombre (x) de jours 10000 Soldats (b) dépensieront-ils 20000 écus (d)?

Xx iij

- Sans se mettre en peine si cet Exemple contient une règle de trois composée droite ou inverse, on le réduira en proportions droites simples, en disant, 1°. 100 Soldats (*a*) dépensent 40 écus (*c*) en un certain temps (qui est dans cet Exemple 3 jours), quel nombre *y* d'écus dépensèrent 10000 Soldats (*b*) dans le même temps (de trois jours)? La première proportion simple sera donc $100(a) : 10000(b) :: 40(c) : y =$
- * 341. $y = 4000$. C'est à dire que 10000 Soldats dépenseroient dans le temps (de 3 jours) 4000 écus 2°. On dira ensuite, un certain nombre de Soldats (qui est dans cet Exemple 10000) dépensent 4000 écus (*c*) en trois jours (*e*); en quel nombre *x* de jours dépensèrent-ils 200000 écus (*d*)? Et la seconde proportion simple sera $4000(c) : 200000(d) :: 3(e) : x =$
- * 342. $x = 150$. C'est à dire, on trouve pour le 4^e terme *x* (qui est celui qu'on cherche dans la question) 150 jours.

La Règle de Compagnie composée.

PROBLÈME.

PARTAGER un nombre donné p en un nombre déterminé de parties inconnues, par exemple en trois parties x, y, z, de manière que les rapports de ces parties $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, soient égaux à des rapports composés dont les rapports composans sont donnez, par exemple, que $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, & $\frac{y}{z} = \frac{e}{f} \times \frac{g}{h}$. D'où il est clair qu'il faut aussi que $x \div y \div z = p$.

On voit par l'état de la question que $x : y :: ad . be$, & $y : z :: be . cf$. D'où l'on a les alternes $x . ad :: y . be :: z . cf$.

Pour mieux faire concevoir la manière de résoudre le Problème, on l'appliquera à un Exemple. Trois personnes ont fait une société: le premier a mis 10 pistoles (*a*) pour 2 mois (*d*), le second a mis 20 pistoles (*b*) pour 3 mois (*e*); le 3^e a mis 30 pistoles (*c*) pour quatre mois (*f*). Ils ont eu de profit 300 liv (*p*); il faut partager ce profit en trois parties que l'on cherche *x*, *y*, *z*, de manière que *x* soit à *y* en rapport composé du rapport simple qui est entre *a* & *b*, & du rapport simple qui est entre *d* & *e*; & que *y* soit à *z* en rapport composé du rapport simple qui est entre *b* & *c*, & du rapport simple qui est entre *e* & *f*.

Résolution du Problème. Il faut multiplier l'argent que chacun a mis par le temps pour lequel il l'a mis. Faire de la somme des produits $ad + be + cf$ le premier terme d'une proportion, le profit p doit être le second terme. Mettre successivement pour 3^e terme chacun des produits ad , be , cf de l'argent par le temps; enfin faire autant de règles de trois simples qu'il y a de personnes; & les quatrièmes termes que l'on trouvera seront les nombres qu'on cherche. En voici l'exemple figuré.

10 pistoles (a)	10 pistoles (b)	30 pistoles (c)
2 mois (d)	3 mois (e)	4 mois (f)
produits 20 (ad)	30 (be)	120 (cf)

$$100 (ad + be + cf) : 300 (p) :: \begin{cases} 20 (ad). & 30 (\frac{adp}{ad+be+cf}) = x \\ 30 (be). & 90 (\frac{bep}{ad+be+cf}) = y \\ 120 (cf). & 180 (\frac{cfp}{ad+be+cf}) = z \end{cases}$$

Démonstration. L'opération littérale fait voir que les parties x, y, z , qu'on trouve par la règle, ont entr'elles les rapports que renferme l'état de la question, & que leur somme $x + y + z = p$.

A V E R T I S S E M E N T.

IL est inutile de donner ici les règles que l'on trouve dans les Arithmétiques pratiques pour le Commerce. Ce Traité du calcul étant fait pour l'Analyse, qui est la science d'employer le calcul à la résolution des Problèmes des Mathématiques, & à découvrir dans ces sciences tout ce qu'on peut désirer d'en savoir; quand les Lecteurs auront appris l'Analyse, ils sauront d'eux-mêmes résoudre les questions qui peuvent se rencontrer dans le Commerce, sans avoir besoin des règles qu'on en donne dans les Arithmétiques ordinaires.

*Des rapports composez, dont tous les rapports composans
sont égaux entr'eux.*

C O R O L L A I R E IV.

389. **L**E rapport qui est entre deux grandeurs quarrées p^2 est * 372.
doublé du rapport des racines p ; le rapport qui est entre

deux 3^e puissances $\frac{a^3}{b^3}$, est triplé du rapport des racines $\frac{a}{b}$; le rapport $\frac{a^4}{b^4}$ est quadruplé du rapport $\frac{a}{b}$; &c ainsi de suite : Car $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$; $\frac{a^4}{b^4} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$, &c.

- * 121. Le rapport $\frac{a}{b}$ * est soudoublé du rapport $\frac{a^2}{b^2}$, soutriplé de $\frac{a^3}{b^3}$, souquadruplé de $\frac{a^4}{b^4}$, &c ainsi de suite. De même $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ est soudoublé du rapport $\frac{a}{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ en est soutriplé; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ en est souquadruplé, &c ainsi de suite. Ou ce qui revient au même $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ est soudoublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ en est soutriplé, &c ainsi de suite. Car il est évident que le carré de $\sqrt[n]{a}$ ou de $a^{\frac{1}{n}}$ est a , celui de $\sqrt[n]{b}$ ou de $b^{\frac{1}{n}}$ est b ; ainsi $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$; de même $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$. Il en est de même des autres.

- * 145. Les Commenceurs doivent faire attention, que $\sqrt[n]{a}$ est un signe qu'on a déterminé * à marquer la racine n^e de a ; que $\sqrt[n]{a}$ en marque la racine 3^e; & qu'en general $\sqrt[n]{a}$ marque la racine de a , dont l'exposant est un nombre entier quelconque représenté par n ; & qu'élever une racine à la puissance dont elle est la racine, n'est autre chose que de trouver cette puissance même. Par exemple, si l'on veut élever $\sqrt[4]{4}$ à la 2^e puissance, on doit nécessairement trouver la puissance même 4, dont $\sqrt[4]{4}$ exprime la racine 2^e. Si l'on veut élever $\sqrt[4]{8}$ à la troisième puissance, on trouvera nécessairement 8 pour la 3^e puissance, dont $\sqrt[4]{8}$ est la racine 3^e. En general si l'on veut élever $\sqrt[n]{a}$ à la puissance n , on doit écrire a pour la puissance n qui a $\sqrt[n]{a}$ pour sa racine.

Le rapport $\sqrt[n]{\frac{a^3}{b^3}}$ est soudoublé du rapport $\frac{a^2}{b^2}$; $\sqrt[n]{\frac{a^3}{b^3}}$ est soutriplé de $\frac{a^2}{b^2}$, &c. ou ce qui est la même chose $\frac{a^{\frac{2}{n}}}{b^{\frac{2}{n}}}$ est soudoublé de $\frac{a^2}{b^2}$, &c. $\frac{a^{\frac{2}{n}}}{b^{\frac{2}{n}}}$ est soutriplé de $\frac{a^2}{b^2}$, &c.

En general, si l'on suppose que n représente un nombre entier quelconque, ou un nombre rompu quelconque, $\frac{a^n}{b^n}$ sera l'expression generale de tout rapport composé d'autant de rapports égaux à $\frac{a}{b}$, qu'il y a d'unités dans le nombre n , quand n est un nombre entier; & de tout rapport soudoublé, soutriplé, souquadruplé du rapport $\frac{a}{b}$, & ainsi à l'infini, en supposant que n représente successivement tous les nombres rompus dont l'unité est le numérateur, enfin de tout rapport soudoublé, soutriple, souquadruplé, &c. de $\frac{a}{b}$ élevé à telle puissance qu'on voudra, en supposant que n représente un nombre rompu tel qu'on voudra, dont le numérateur est différent de l'unité aussi-bien que le dénominateur.

On peut aussi séparer les expressions de ces trois cas, de ces trois manieres. Le premier cas sera exprimé par $\frac{a^n}{b^n}$. Le 2^e cas par $\frac{a^n}{b^{\frac{n}{2}}}$. Le 3^e cas par $\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}$. Dans le 1^{er} cas, $\frac{a^n}{b^n}$ est com-

posé d'autant de rapports simples égaux à $\frac{a}{b}$, qu'il y a d'unités dans le nombre entier n . Dans le 2^e cas, $\frac{a^n}{b^{\frac{n}{2}}}$ marque

le rapport simple par la répétition duquel autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre entier quelconque n , est formé le rapport composé $\frac{a^n}{b^n}$. C'est à dire, $\frac{a^n}{b^n}$ est composé du rapport $\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}$ repeté autant de fois qu'il y a d'unités dans n .

Dans le troisieme cas, $\frac{a^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}$ est le rapport simple par la répétition duquel autant de fois qu'il y a d'unités dans un nombre entier quelconque représenté par m , est formé le rapport composé $\frac{a^m}{b^m}$; c'est à dire $\frac{a^m}{b^m}$ est composé autant de fois du rap-

port simple $\frac{a^{\frac{m}{2}}}{b^{\frac{m}{2}}}$ qu'il y a d'unités dans le nombre entier m ,

Cette 3^e expression $\frac{a^n}{b^n}$ peut aussi exprimer un rapport composé du rapport simple $\frac{a}{b}$ répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre entier quelconque n .

Ces trois expressions peuvent, comme on l'a expliqué, se réunir dans la seule expression $\frac{a^n}{b^n}$, en supposant, par rapport à la première, que n représente un nombre entier quelconque; par rapport à la 2^e, que n représente une fraction quelconque dont l'unité est le numérateur; par rapport à la 3^e, que n représente une fraction dont les deux termes sont chacun un nombre entier quelconque.

COROLLAIRE V.

390. **D**EUX produits homogènes ** semblables* ont entr'eux un
 * 374. rapport doublé du rapport simple qui est entre leurs dimensions relatives, ou entre leurs multiplicateurs relatifs, s'ils sont chacun de deux dimensions, ils ont un rapport triplé du même rapport composant s'ils sont chacun de trois dimensions, quadruplé s'ils sont de quatre dimensions, &c ainsi de suite.

* 374. Par exemple, si ab & cd sont semblables; c'est à dire, si $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{ab}{cd}$ est un rapport doublé de $\frac{a}{c}$, ou de son égal $\frac{b}{d}$. Si abc , def sont semblables, c'est à dire si $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$, $\frac{abc}{def}$ est un rapport triplé de $\frac{a}{d}$, ou de $\frac{b}{e}$, ou de $\frac{c}{f}$, &c ainsi des autres. Car par la supposition $\frac{a}{d}, \frac{ab}{de}, \frac{abc}{def}, \&c.$ sont des produits des rapports égaux $\frac{a}{d}, \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e}, \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f}, \frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}, \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f}$. Donc le premier * 371. ** est doublé, le second triplé, le troisième quadruplé &c ainsi de suite, de chacun des rapports égaux dont ils sont les produits.*

COROLLAIRE VI.

391. **D**EUX produits homogènes semblables sont entr'eux comme les puissances du même degré de leurs dimensions relatives, ou de leurs multiplicateurs relatifs.

Par exemple, si ab & cd sont semblables, $\frac{a}{d} = \frac{b}{c} = \frac{a^2}{d^2}$.
 Si abc & def sont semblables $\frac{ab}{ef} = \frac{a}{f} = \frac{b}{e} = \frac{c}{d}$, &c. ainsi
 des autres. Car par la supposition $\frac{a}{d}$ & $\frac{b}{c}$, &c. & $\frac{ab}{cd}$, &c.
 sont composez d'un même nombre de rapports égaux. Par
 conséquent * ce sont des rapports composez égaux. * 376.

COROLLAIRE VII.

392. **C**ELA est cause que quand des produits homogenes sont
 semblables, on dit ordinairement qu'ils sont entr'eux comme
 les quarréz de leurs côtez relatifs, ou de leurs dimensions re-
 latives, s'ils sont de deux dimensions; comme les cubes de
 leurs côtez relatifs, s'ils sont de trois dimensions, &c.

COROLLAIRE VIII.

393. **D**E même lorsque les deux termes a & b d'un rapport $\frac{a}{b}$
 sont en rapport soudoublé, ou soutriplé, ou souquadruplé,
 &c. de $\frac{1}{2}$, on dit que a & b sont entr'eux comme les racines
 2^{ne} , 3^{ne} , &c. de c & d ; ce qui s'exprime ainsi $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$
 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$, &c. ou bien $\frac{a}{b} = \frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$; $\frac{a}{b} = \frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, &c. & en general
 $\frac{a}{b} = \frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$, en supposant que n représente un nombre entier
 quelconque. Car par la supposition $\frac{a}{b}$ est composé d'autant
 de rapports égaux au rapport simple $\frac{a}{b}$ que le nombre n con-
 tient d'unitéz. Or $\frac{a}{b}$ est aussi composé d'autant de rapports
 égaux à $\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}} = \frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$ que * le nombre n contient d'unitéz. Il * 379.
 faut donc que le rapport simple $\frac{a}{b}$ soit égal au rapport sim-
 ple $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{1}{n}}}$; puisque le produit d'autant de rapports égaux à $\frac{a}{b}$
 qu'il y a d'unitéz dans n , est égal au produit qui vient de la

multiplication d'autant de rapports $\frac{c^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}, \frac{c^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}, \frac{c^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}$ &c. qu'il y a d'unités dans le même nombre n .

COROLLAIRE IX.

394. **L**ORSQUE deux ou plusieurs rapports sont égaux $a. b :: c. d :: e. f$, &c. les rapports formez de suite des puissances des termes du même degré, ou qui ont le même exposant, sont égaux; comme aussi les rapports formez des racines qui ont le même exposant sont égaux. C'est à dire, $a^n. b^n :: c^n. d^n$, &c. comme aussi $a^{\frac{1}{n}}. b^{\frac{1}{n}} :: c^{\frac{1}{n}}. d^{\frac{1}{n}}$, &c.

Car il est évident que les rapports des puissances sont des rapports composés du même nombre de rapports composans égaux, ainsi ils sont égaux; & que les rapports des racines sont les rapports composans dont les rapports égaux $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$ &c. sont composés, & chacun en est composé d'un même nombre; par conséquent ces rapports composans sont égaux.

COROLLAIRE X.

395. **D'**où il suit que si l'on a une progression géométrique $\div a. b. c. d. e. f$ &c. l'on aura la progression géométrique $\div a^n. b^n. c^n. d^n. e^n. f^n$ &c. & encore $\div a^{\frac{1}{n}}. b^{\frac{1}{n}}. c^{\frac{1}{n}}. d^{\frac{1}{n}}. e^{\frac{1}{n}}. f^{\frac{1}{n}}$ &c. & encore $\div a^{\frac{m}{n}}. b^{\frac{m}{n}}. c^{\frac{m}{n}}. d^{\frac{m}{n}}. e^{\frac{m}{n}}. f^{\frac{m}{n}}$ &c.

COROLLAIRE XI.

396. **L**ES produits des termes correspondans de deux proportions, sont aussi une proportion; & les produits des termes correspondans de deux ou de plusieurs progressions, sont aussi une progression. Par exemple, si $a. b :: c. d$, & $e. f :: g. h$. L'on aura $ae. bf :: cg. dh$. Car $\frac{ae}{cg} = \frac{bf}{dh}$ sont chacun composé du même nombre de rapports égaux; Et si $\div a. b. c. d. e$ &c. & $\div g. h. i. k. l$ &c. L'on aura $\div ag. bh. ci. dk. el$ &c. Car les rapports $\frac{a}{g}, \frac{b}{h}, \frac{c}{i}, \frac{d}{k}, \frac{e}{l}$ &c. sont composés chacun du même nombre de rapports égaux.

COROLLAIRE XII.

397. **E**N toute progression geometrique $\rightarrow a. b. c. d. e. f$ &c. le rapport $\frac{f}{a}$ de l'un des termes qu'on nommera p à un autre terme qu'on nommera q , est doublé du rapport $\frac{q}{p}$ qui regne dans la progression s'il y a un terme d'interposé entre p & q ; le rapport $\frac{q}{p}$ est triplé du rapport qui regne dans la progression s'il y a deux termes interposez entre p & q , il sera quadruplé, s'il y a trois termes d'interposez, &c ainsi à l'infini.

Car s'il y a un terme interposé entre p & q , le rapport $\frac{q}{p} = 2$ 381. est composé de deux rapports égaux; s'il y en a trois, il est composé de trois rapports égaux, &c. Ainsi le rapport du premier terme a au troisième c est doublé, du premier a au quatrième d est triplé, &c.

COROLLAIRE XIII.

398. **D'**où il suit qu'en prenant dans une progression le 1^{er} terme, le 3^e, le 5^e, le 7^e, &c ainsi de suite, l'on aura encore une progression; & qu'en general, les termes pris de suite, entre lesquels il y a un égal nombre de termes interposez, sont en progression: Car ce sera un même rapport qui regnera entre tous les termes.

COROLLAIRE XIV.

399. **D**ANS une progression geometrique le rapport d'un terme p à un autre terme q , entre lesquels il y a un terme interposé, est égal au rapport des quarrés de deux termes consecutifs $\frac{b^2}{a^2}$; s'il y a deux termes interposez, $\frac{q}{p}$ est égal au rapport des 3^{es} puissances $\frac{c^3}{a^3}$ de deux termes consecutifs; s'il y a trois termes d'interposez, $\frac{q}{p}$ est égal au rapport des 4^{es} puissances $\frac{d^4}{a^4}$ de deux termes consecutifs. En general si l'on suppose que n marque le nombre quelconque des termes interposez entre deux termes p & q de la progression, l'on aura $\frac{q}{p} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$.

Car $\frac{q}{p}$ est composé d'autant de rapports composans égaux qu'il y a d'unités dans le nombre des termes interposez plus un. Mais en élevant deux termes consecutifs tels qu'on vou-

- * 389. *dra*, comme a & b à la puissance $n+1$, $\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$ sera * un rapport composé du même nombre de rapports composans égaux ; par conséquent $\frac{p}{q} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$.

PROBLÈME.

400. *UN rapport $\frac{a}{b}$ étant donné, trouver le rapport qui en est doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c.*

Il n'y a qu'à élever $\frac{a}{b}$ au carré, à la 3^e puissance, à la 4^e puissance, &c. & l'on aura $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, &c. pour le

- * 389. rapport * doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c. du rapport $\frac{a}{b}$.

Autre manière, par le moyen des grandeurs interposées.

- * 346. Il faut trouver, les deux grandeurs a & b étant données pour les premiers termes d'une progression, le 3^e terme qu'on nommera x , si l'on veut un rapport doublé ; le 4^e qu'on nommera y , si l'on veut un rapport triplé ; le 5^e z , si l'on veut un rapport quadruplé, &c. Car il est évident * que $\frac{x}{a}$ sera un rapport doublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{y}{b}$ en sera triplé ; $\frac{z}{c}$ en sera quadruplé, &c.

Où bien si l'on veut, on pourra prendre b pour le premier terme, & a pour le second terme d'une progression,

- * 346. & on trouvera * le 3^e terme qu'on nommera u ; le 4^e qu'on nommera v ; le 5^e qu'on nommera s , &c. & il est évident * 397. que * dans la progression — &c. $s . t . v . a . b$, le rapport $\frac{s}{t}$ sera doublé de $\frac{a}{b}$; $\frac{v}{v}$ en sera triplé ; $\frac{s}{s}$ en sera quadruplé, &c.

PROBLÈME.

401. *UN rapport composé $\frac{a}{b}$ étant donné, trouver le rapport composant dont $\frac{a}{b}$ est doublé, ou triplé, ou quadruplé, &c.*

Il faut prendre la racine quarrée $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ de $\frac{a}{b}$, si l'on veut le

- * 389. rapport dont * $\frac{a}{b}$ est doublé ; la racine 3^e $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, si l'on veut le rapport dont $\frac{a}{b}$ est triplé ; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ si l'on veut le rapport dont

quand $\frac{p}{q}$ étant réduit au moindre rapport $\frac{r}{s}$, ce moindre rapport n'est pas un carré parfait. Ainsi si deux carrés sont entr'eux comme 3 à 2, le rapport simple $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$ dont $\frac{1}{2}$ est doublé, est incommensurable avec 1, avec $\frac{1}{2}$, &c avec tous les nombres.

Si l'on suppose $n=3$, &c que $\frac{p}{q}$ étant réduit aux moindres termes $\frac{r}{s}$, a & b soient des 3^m puissances imparfaites; $\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{bc}}$ est incommensurable avec l'unité, avec ac & bc , &c avec tous les nombres formez de la même unité. Par exemple, deux 3^m puissances sont entr'elles comme 3 à 2; le rapport $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$, dont $\frac{1}{2}$ est triplé, est une grandeur incommensurable avec l'unité, avec $\frac{1}{2}$, &c avec tous les nombres; &c ainsi des autres.

COROLLAIRE II.

403. SI on élevoit le rapport $\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{bc}}$ à la puissance dont m seroit l'exposant (m représente un nombre entier quelconque)

* 389. l'on auroit le rapport $\frac{\sqrt[3]{ac^m}}{\sqrt[3]{bc^m}} = \frac{\overline{ac}^{\frac{m}{3}}}{\overline{bc}^{\frac{m}{3}}}$ qui est composé *
à la fin.
d'autant de rapports simples égaux à $\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{bc}} = \frac{ac^{\frac{1}{3}}}{bc^{\frac{1}{3}}}$ que

l'exposant m contient d'unités.

Le Problème suivant fournira la méthode de trouver par le moyen des grandeurs interpolées, le rapport composant dont un rapport donné est doublé ou triplé, &c.

PROBLÈME.

404. TROUVER entre deux grandeurs données autant de grandeurs moyennes proportionnelles qu'on voudra.

Soient a & b les deux grandeurs données, & que x exprime le nombre des moyennes proportionnelles qu'on cherche. Il est évident qu'il suffit de trouver la première moyenne qu'on nommera x ; car x étant connue, on trouvera aisé,

ment, * par la règle de proportion, toutes les moyennes sui- * 341.
vantes.

Résolution. Il est évident que * $a^{n+1} \cdot x^{n+1} :: a \cdot b$. D'où * 329.
l'on déduit * $ax^{n+1} = a^{n+1}b$. En divisant chaque grandeur * 338.
par a , on aura $x^{n+1} = \frac{a^{n+1}b}{a} = a^{n+1-1}b = a^nb$. Ainsi

$x^{n+1} = a^nb$. En tirant la racine dont l'exposant est $n+1$
de chacune de ces grandeurs égales, on aura $x = \sqrt[n+1]{a^nb}$.

Cette expression $x = \sqrt[n+1]{a^nb}$ marque ce qu'il faut faire pour
trouver entre a & b la première de tant de moyennes propor-
tionnelles qu'on voudra.

Par exemple, si l'on veut une seule moyenne entre a & b ;
alors $n = 1$; mettant 1 à la place de n dans $x = \sqrt[n+1]{a^nb}$, on
aura $x = \sqrt{ab}$. Ce qui fait voir que la racine quarrée du pro-
duit ab de deux grandeurs est moyenne proportionnelle entre
ces deux grandeurs; car $a \cdot \sqrt{ab} :: \sqrt{ab} \cdot b$, puisque le pro-
duit des extrêmes, & celui des moyens sont la même gran-
deur ab .

Si l'on veut la première de deux moyennes entre a & b ;
alors $n = 2$. Mettant 2 à la place de n dans $x = \sqrt[n+1]{a^nb}$, on
aura $x = \sqrt[3]{a^2b}$; ce qui fait voir que la racine 3^e du produit
fait du quarré a^2 par b , est la première des deux moyennes

proportionnelles entre a & b . Car $\sqrt[3]{a^2b}$ étant élevé à la 3^e
puissance, on aura $\frac{a^3}{b}$. Or $a^3 \cdot a^2b :: a \cdot b$. Par conséquent * 109.

le rapport $\frac{a^3}{b}$ étant triplé du rapport $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2b}}$; $\frac{a}{b}$ est aussi triplé
* du même rapport. Ainsi $\sqrt[3]{a^2b}$ est la première des deux gran- * 389, 376
deurs moyennes proportionnelles interpolées entre a & b . & 377.

Si l'on veut la première de cinq moyennes proportion-
nelles entre a & b ; alors $n = 5$, & $x = \sqrt[6]{a^5b}$ deviendra
 $x = \sqrt[6]{a^5b}$. Ainsi $\sqrt[6]{a^5b}$ est la première des cinq moyennes en-
tre a & b . Pour s'en convaincre il n'y a qu'à * former la * 346;
progression, dont a & b sont les deux premiers termes,
- $a, b, \frac{a^5}{b^5}, \frac{a^4}{b^4}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a}{b}$. Si l'on multiplie ensuite les ter-
mes par la même grandeur a^5 , on aura * la progression * 71.

362 LA SCIENCE DU CALCUL, &c.

- * 395. $\div a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, b^4$. Enfin si l'on prend la racine 6^e de chaque terme * on aura la progression $\div a, \sqrt[6]{a^3b}, \sqrt[6]{a^2b^2}, \sqrt[6]{ab^3}, b$, où l'on voit que $\sqrt[6]{a^3b}$ est la première des cinq moyennes proportionnelles entre a & b .

Ces exemples suffisent pour faire voir aux Lecteurs que $x = \sqrt[n+1]{a^n b}$ leur fera trouver la première de tant de moyennes proportionnelles qu'ils voudront entre deux grandeurs a & b . Ils remarqueront seulement que quand a & b sont deux nombres, il y a plusieurs cas où la première des moyennes proportionnelles, marquée par la formule, ne pourra se trouver exactement par nombres, comme on le verra dans le 5^e Corollaire.

COROLLAIRE I

405. QUAND on a un rapport donné $\frac{a}{b}$, & qu'on le suppose composé d'autant de rapports égaux qu'en exprime $n + 1$, ($n + 1$ représente un nombre entier quelconque.) Pour trouver le rapport composé auquel tous les autres sont égaux, il est évident qu'il ne faut que chercher la première d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b qu'il y a d'unités dans n , & le rapport de a à cette première
- * 397. moyenne $\sqrt[n+1]{a^n b}$, c'est à dire $\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n b}}$ fera * le rapport composé qu'on cherche.

COROLLAIRE II

406. SUPPOSANT que n représente un nombre entier quelconque. si l'on a cette proportion $a^{n+1} : c^{n+1} :: a : b$, la grandeur c sera la première d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b , que n contient d'unités.
- Démonstration.* En nommant x la première d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b que n contient d'unités, on aura * cette proportion $a^{n+1} : x^{n+1} :: a : b$. Par
- * 399. conséquent * $\frac{a^{n+1}}{c^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{x^{n+1}}$. L'on aura donc $c^{n+1} = * x^{n+1}$.
- * 320. & $c = * x$.

en mettant successivement 1, 2, 3, 4, &c. à la place de n , on verra que si $a^2, c^2 :: a, b$, l'on aura a, c, b . Si $a^3, c^3 :: a, b$, l'on aura c pour la première de deux moyennes proportionnelles entre a & b . Si $a^4, c^4 :: a, b$, l'on aura c pour la première de trois moyennes proportionnelles entre a & b , &c ainsi de suite.

COROLLAIRE III.

407. ON a vû dans le Problème précédent * la maniere de trou- * 404.
ver la première d'autant de moyennes proportionnelles entre a & b que n contient d'unités, en supposant que a est la première grandeur, & b la dernière, & que $\sqrt[n]{a^{\frac{n-1}{n}}b}$ est la première moyenne proportionnelle qui suit a . Il est évident qu'en prenant b pour la première grandeur, & a pour la seconde, on trouvera de la même maniere que la première des moyennes proportionnelles la plus proche de b est $\sqrt[n]{a^{\frac{n-1}{n}}b}$. Ainsi * 405.
dans le 1^{er} Corollaire *, en supposant $\frac{n}{n+1}$ composé d'autant de rapports égaux que $n+1$ contient d'unités, on trouvera encore que $\sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}}b}$ est le rapport composant égal à tous les autres dont $\frac{n}{n+1}$ est composé; & dans le second Corollaire, * si * 406.
 $b^{n+1}, c^{n+1} :: b, a$; la grandeur c sera la première d'autant de moyennes proportionnelles entre b & a , que n contient d'unités; & cette même grandeur c sera la moyenne la plus proche de b . C'est pourquoi si $b^2, c^2 :: b, a$, l'on aura c, a, b . Si $b^3, c^3 :: b, a$, l'on aura c pour la première de deux moyennes proportionnelles entre b & a ; &c ainsi des autres.

COROLLAIRE IV.

408. QUAND les deux grandeurs a & b sont déterminées, & que le nombre n des moyens proportionnels entre a & b est déterminé, chacun des termes moyens est aussi déterminé, quoiqu'il ne soit pas connu. C'est à dire, il ne peut pas y avoir deux ou plusieurs grandeurs inégales pour le premier moyen, mais il n'y en a qu'une seule de possible; & de même pour le second moyen, pour le 3^e, pour le 4^e, &c.

Car on a démontré que le 1^{er} moyen étoit nécessairement

- * 404. $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$, & il est évident que le rapport de la première grandeur a (qui est déterminé) à $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$, ne seroit pas le même si l'on imaginoit pour 1^{er} moyen une grandeur inégale à $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$, ainsi le 1^{er} moyen est nécessairement déterminé. Le même raisonnement fait voir que le second moyen, le 3^e, &c. doivent être aussi chacun une grandeur déterminée.

COROLLAIRE V.

409. **E**N toute progression numérique, que l'on prenne deux termes quelconques représentés par a & b , entre lesquelles il y ait un nombre n tel qu'on voudra de moyens proportionnels, si a^nb est une puissance numérique parfaite dont l'exposant soit $n+1$, ou bien encore si ab^n est une puissance numérique parfaite dont l'exposant soit $n+1$; alors les racines $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$, comme aussi $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$ sont chacune un nombre qui est la racine exacte, savoir $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$, de la puissance numérique $a^{\frac{n+1}{2}}b$, &c. $\sqrt[n+1]{ab^n}$ de la puissance numérique ab^n ; & le rapport
- * 399. composant $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b} = \frac{a}{\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}} = \sqrt[n+1]{\frac{a}{ab^n}}$ (égal à tous ceux dont
- * 407.

$\frac{1}{2}$ est composé, & dont il y en a autant qu'il y a d'unités dans $n+1$) peut s'exprimer par nombres puisque a & $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$, comme aussi $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$ & b sont des nombres.

Mais si a^nb , comme aussi ab^n , ne sont pas chacun une puissance numérique parfaite dont l'exposant soit $n+1$; alors

- * 399. $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$ & $\sqrt[n+1]{ab^n}$ sont chacune une grandeur incommensurable. Par conséquent les deux termes du rapport composant

* 407. $\frac{a}{\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}} = \sqrt[n+1]{\frac{a}{ab^n}} = \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}$ (qui est égal à tous les rapports

* 389. $\sqrt[n+1]{a^{\frac{n+1}{2}}b}$

égaux composant dont le rapport $\frac{1}{2}$ est composé, & dont

il y en a autant qu'il y a d'unités dans $n + 1$) sont incommensurables. On suppose que le moindre rapport $= \frac{1}{2}$ n'est pas une puissance parfaite dont l'exposant est $n + 1$.

REMARQUE.

LES Commensurans doivent d'eux-mêmes se former les cas particuliers de ce 5^e Corollaire, en supposant n successivement égale à 1, 2, 3, &c. & en mettant des nombres à la place de a & de b , & ils verront que quand un carré est double ou triple d'un autre, comme aussi quand un cube est double ou triple d'un autre, &c. c'est à dire quand le rapport de ces puissances est $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, le côté de l'un des deux est incommensurable avec le côté de l'autre; car $\sqrt{2}$ est incommensurable avec $\sqrt{1} = 1$, comme aussi $\sqrt[3]{2}$ est incommensurable avec $\sqrt[3]{1} = 1$.

THEORÈME.

Sur les moyennes proportionnelles entre deux grandeurs a & b élevées à une puissance quelconque a^n , b^n .

410. ON suppose que n représente un nombre entier quelconque; & qu'on élève les grandeurs a & b à la puissance n , l'on aura a^n , b^n . Cela supposé, les produits $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4$, & ainsi de suite jusqu'à $a^{n-n}b^n$, dans lesquels la puissance a diminue d'un degré de l'un à l'autre, & les puissances de b vont en augmentant d'un degré depuis b^1 jusqu'à b^n , ces produits, dis-je, sont de suite des grandeurs moyennes proportionnelles entre a^n & b^n , & il y a autant de ces moyennes proportionnelles qu'il y a d'unités dans $n - 1$; c'est à dire $\div a^n$, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4$, & ainsi de suite jusqu'à $a^{n-n}b^n = b^n$.

Par exemple, supposant $n = 2$, on aura $\div a^2$, ab , b^2 . Supposant $n = 3$, on aura $\div a^3$, a^2b , ab^2 , b^3 . Si $n = 4$, on aura $\div a^4$, a^3b , a^2b^2 , ab^3 , b^4 . Si $n = 5$, on aura $\div a^5$, a^4b , a^3b^2 , a^2b^3 , ab^4 , b^5 , & ainsi de suite.

Démonstration. 1^o. Il est évident que le rapport de deux termes consécutifs, qui regne dans la progression, est $\frac{1}{2}$; car la puissance de a ayant une dimension de plus dans un ter-

me à gauche que dans celui qui le suit immédiatement à droite, & b ayant au contraire une dimension de moins dans le terme à gauche que dans celui qui le suit immédiatement à droite; il est clair qu'en effaçant en deux termes consécutifs les lettres communes, il ne doit rester que a pour antécédent, & que b pour conséquent du rapport de deux termes consécutifs, qui est par conséquent $\frac{a}{b}$. 2°. Les termes moyens étant les produits pris de suite des puissances de a (dont les exposans diminuent d'une unité d'un terme à l'autre depuis le premier terme a^n) & des puissances de b (dont les exposans vont en augmentant d'une unité d'un terme à l'autre depuis b^1 jusqu'au terme b^n); il est évident qu'il doit y avoir autant de termes moyens qu'il y a d'unités dans $n - 1$. Donc $\frac{a^n}{a^{n-1} b} = \frac{a^{n-1} b}{a^{n-2} b^2} = \frac{a^{n-2} b^2}{a^{n-3} b^3}$, & ainsi de suite jusqu'à $a^{n-n} b^n = b^n$; & il y aura autant de moyens qu'il y a d'unités dans $n - 1$, puisque 1 est l'exposant de b dans le premier moyen $a^{n-1} b$; & que dans le dernier moyen, b doit avoir pour exposant $n - 1$. Quand le premier terme $a = 1$, la progression sera $\frac{1}{1} \cdot b \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot \&c.$

COROLLAIRE.

411. **I**L suit de là * qu'en prenant les racines dont n est l'exposant, on aura cette progression $\sqrt[n]{a^n} = a, \sqrt[n]{a^{n-1} b}, \sqrt[n]{a^{n-2} b^2}, \sqrt[n]{a^{n-3} b^3}, \sqrt[n]{a^{n-4} b^4}, \&c.$ jusqu'à $\sqrt[n]{a^1 b^n} = \sqrt[n]{1 b^n} = b$, & qu'il y aura dans cette progression autant de moyens proportionnels entre a & b qu'il y a d'unités dans $n - 1$. Quand $a = 1$, la progression précédente devient $\sqrt[n]{1} = 1, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{b^2}, \sqrt[n]{b^3}, \sqrt[n]{b^4}, \&c.$ jusqu'à $\sqrt[n]{b^n} = b$.

De la proportion & de la progression harmonique.

AVERTISSEMENT.

412. **I**L y a une autre sorte de proportion & de progression formée des progressions géométrique & arithmétique, qui est de peu d'usage, si ce n'est dans la Musique dont elle exprime les principaux accords: on la nomme, à cause de cela, la proportion harmonique. Voici ce que c'est.

DÉFINITION.

413. **LORSQUE** trois grandeurs comme 3 . 4 . 6 sont telles que la 1^{re} 3 est à la 3^e 6, comme la différence 1 de la première à la seconde est à la différence 2 de la seconde à la troisième, on dit que ces trois grandeurs 3 . 4 . 6 font une *proportion harmonique*. Quand la proportion harmonique s'étend à plus de trois termes, on la nomme *progression harmonique*.

PROBLÈME.

414. **DEUX** termes d'une proportion harmonique étant donnez : trouver le troisième terme.

Operation. Soient les deux termes donnez représentés par a , b , &c qu'ils soient les deux premiers termes; &c que le 3^e terme, qu'on cherche, soit représenté par x . Ainsi $a . b . x$ feront une proportion harmonique.

1°. Si la proportion va en augmentant, on aura cette proportion géométrique $a . x :: b - a . x - b$. C'est à dire, la 1^{re} grandeur a est à la 3^e x ; comme la différence $b - a$ de la 2^e b à la 1^{re} a , est à la différence $x - b$ de la 3^e x à la 2^e b .

En prenant les produits des extrêmes &c des moyens, on aura $* ax - ab = bx - ax$. En ajoutant à chaque membre de cette égalité la grandeur $+ ax - bx + ab$, on trouvera $2ax - bx = ab$. Enfin en divisant chacune de ces grandeurs égales par $2a - b$, on trouvera $x = \frac{ab}{2a - b}$. Par conséquent la proportion harmonique sera $a . b . \frac{ab}{2a - b}$. Ce 3^e terme $x = \frac{ab}{2a - b}$ servira de formule pour trouver le 3^e terme d'une proportion harmonique qui va en augmentant, les deux 1^{ers} termes étant donnez; &c l'on remarquera que quand le second terme b surpasse le double $2a$ du premier terme, comme encore quand $b = 2a$; on ne peut pas trouver de troisième terme aux deux termes donnez de la proportion harmonique.

Exemple. 2 &c 3 étant donnez pour les deux premiers termes d'une progression harmonique, si l'on demande le troisième $x = \frac{ab}{2a - b}$, il faut supposer $a = 2$; $b = 3$, &c substituer ces valeurs de a &c de b dans la formule, &c l'on trou-

vera $\frac{a+b}{2} = 6$. Ainsi la proportion harmonique sera 3. 3. 6.

2°. Quand la proportion harmonique $a. b. x$ va en diminuant, on aura cette proportion géométrique $a. x :: a - b. b - x$. C'est à dire la première grandeur a est à la 3^e x ; comme l'excès $a - b$ de la 1^{re} a sur la 2^e b , est à l'excès $b - x$ de la 2^e b sur la 3^e x .

En prenant le produit des extrêmes & celui des moyens, * 338. on aura $* ab - ax = ax - bx$. En ajoutant $+ ax$ à chacune de ces grandeurs égales, il viendra $ab = 2ax - bx$. En divisant par $2a - b$ chacune de ces grandeurs égales, on trouvera $x = \frac{ab}{2a-b}$, comme dans le 1^{er} cas, & la proportion harmonique sera $a. b. \frac{ab}{2a-b}$. Si les deux premiers termes sont $a = 6$; $b = 3$; l'on trouvera que le 3^e terme $x = \frac{ab}{2a-b} = \frac{6 \times 3}{6-3} = 2$, & la proportion harmonique sera 6. 3. 2.

3°. Si le terme x que l'on cherche est le terme moyen entre les deux termes donnez a & b ; la proportion harmonique sera $a. x. b$; & si elle va en augmentant, l'on aura cette proportion géométrique $a. b :: x - a. b - x$. Par conséquent $ab - ax = bx - ab$. En ajoutant à chaque membre la grandeur $+ ax + ab$, on trouvera $2ab = bx + ax$. Divisant chaque membre par $a + b$, on aura $\frac{2ab}{a+b} = x$. La proportion harmonique sera donc $a. \frac{2ab}{a+b}. b$. Et en réduisant tous les termes au même dénominateur, & prenant les seuls numérateurs; on aura encore la proportion harmonique $a^2 + ab. 2ab. ab + b^2$.

Si la proportion harmonique va en diminuant, on aura cette proportion géométrique. $a. b :: a - x. x - b$. D'où l'on déduira l'égalité $ax - ab = ab - bx$. En ajoutant à chaque membre $+ bx + ab$, on trouvera $ax + bx = 2ab$. En divisant chaque membre par $a + b$, on aura $x = \frac{2ab}{a+b}$; & la proportion harmonique sera, comme ci-dessus, $a. \frac{2ab}{a+b}. b$. Et en réduisant tous les termes au même dénominateur; en prenant les seuls numérateurs, on aura encore la proportion harmonique $a^2 + ab. 2ab. ab + b^2$ comme ci-dessus.

Les deux termes 1 & 2 d'une proportion harmonique étant donnez : pour trouver un moyen proportionnel harmonique, il faut se servir de la formule $\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}$; & l'on trouvera $\frac{2ab}{a+b}$.

$\frac{2 \times 3}{1 \times 4} = \frac{3}{2}$. La progression harmonique sera 1. $\frac{3}{2}$. 2. Si l'on veut réduire les trois termes à un même dénominateur, & prendre les seuls numérateurs, on aura encore la progression harmonique 3. 4. 6.

Les deux termes 2 & 3 étant donnez, pour trouver un moyen proportionnel harmonique, il faut substituer dans $\frac{a+b}{2}$ les valeurs de $a = 2$, $b = 3$, & l'on aura $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, & la proportion harmonique sera 2. $\frac{5}{2}$. 3; & multipliant tous les termes par 2, on aura encore la progression harmonique 10. 12. 15.

On peut aussi déduire de la proportion harmonique $a . b . \frac{a+b}{2}$ du 1^{er} & 2^e article, en multipliant tous les termes par $2a - b$, cette autre proportion harmonique, $2a^2 - ab . 2ab - b^2 . ab$.

Application de la formule $a . b . \frac{ab}{2a-b}$ d'une progression harmonique dont les deux premiers termes a & b sont donnez, & où l'on cherche le 3^e terme représenté par $\frac{ab}{2a-b}$, à un exemple dont on déduira une formule qui servira à trouver tant de termes qu'on voudra d'une progression harmonique, deux termes de cette progression étant donnez.

SOIENT $\frac{a}{i+j-2}$. $\frac{b}{i+j-2}$ les deux premiers termes donnez d'une proportion harmonique, pour trouver le 3^e qu'on nommera x ; il faut supposer $\frac{a}{i+j-2} = a$, $\frac{b}{i+j-2} = b$, & substituer ces valeurs de a & de b dans la formule $x = \frac{ab}{2a-b}$; après avoir fait le calcul, on trouvera que le troisième terme est $\frac{ab}{i+j-2}$, & que la proportion harmonique est $\frac{a}{i+j-2} . \frac{b}{i+j-2} . \frac{ab}{i+j-2}$.

COROLLAIRE I.

414. Si l'on suppose $g = f + d$, la proportion harmonique précédente sera $\frac{f}{i} . \frac{g}{i+j-2} . \frac{fg}{i+j-2}$. Mais par l'exemple précédent $\frac{f}{i} . \frac{g}{i+j-2} . \frac{fg}{i+j-2}$ sont une proportion harmonique, par conséquent en supposant $b = g + d$, les trois termes $\frac{f}{i+j-2} . \frac{g}{i+j-2} . \frac{fg}{i+j-2}$ seront encore une proportion harmonique; & l'on voit clairement qu'en supposant de suite $i = b + d$, $k = i + d$, $l = k + d$, &c. on continuera de trouver de nouveaux ter-

mes à l'infini. D'où il est évident que $\frac{c}{1+d}, \frac{c}{1+2d}, \frac{c}{1+3d}, \dots$ font une progression harmonique. C'est à dire si l'on forme une suite infinie de fractions, & que le numérateur de chacune soit une même grandeur quelconque représentée par c , & que les dénominateurs soient de suite les termes positifs d'une progression arithmétique quelconque représentée par $1+d, 1+2d, 1+3d, 1+4d, \dots$ la suite formée de ces fractions sera une progression harmonique.

D'où l'on voit la raison pourquoi on nomme la suite $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ une progression harmonique.

COROLLAIRE II.

415. **L**E Corollaire précédent fournit le moyen, quand on a deux grandeurs quelconques, données représentées par a & b , de faire une progression harmonique qui ait la 1^{re} grandeur a pour premier terme, & la 2^e b pour dernier terme, & qui ait tant de termes qu'on voudra. C'est à dire, il donne le moyen de trouver entre les grandeurs données a & b tant de termes moyens qu'on voudra d'une progression harmonique.

Car il n'y a qu'à prendre, 1^o, une grandeur arbitraire qui ait pour diviseurs exacts les grandeurs données a & b . (Cette grandeur peut être représentée par abc ; car $\frac{abc}{c} = bc$, & $\frac{abc}{b} = ac$.) Par ce moyen on pourra réduire les grandeurs a & b en deux fractions qui leur seront équivalentes, & l'on aura $\frac{abc}{bc} = a$, $\frac{abc}{ac} = b$.

2^o. Il ne s'agit plus que de former une progression arithmétique d'autant de termes qu'on en veut donner à la progression harmonique, & que le premier terme de la progression arithmétique soit le diviseur bc , & le dernier terme soit le diviseur ac ; ce que l'on enseignera dans la suite.

3^o. Et de faire une suite de fractions qui aient toutes pour numérateur la grandeur abc qu'on a supposée, & qui aient pour dénominateurs les termes de la progression arithmétique que l'on a formée pris de suite. Cette suite de fractions (dont la 1^{re} est égale à a , & la dernière à b ,) sera la progression harmonique qu'il fallloit former.

Par exemple, si l'on propose de former une progression harmonique de quatre termes, dont le premier terme soit $3 = a$, & le 4^e soit $12 = b$. 1°. Il faut prendre un nombre comme $24 = abc$ qui ait 3 & 12 pour diviseurs exacts : (il est évident que $c = \frac{24}{3}$; car $abc = 3 \times 12 \times \frac{24}{3} = 24$.) & 16^e divise par ce moyen 3 & 12 aux fractions équivalentes $\frac{16}{3} = \frac{2^4}{3^1} = 3 = a$, $\frac{16}{12} = \frac{2^4}{3^1 \times 2^2} = 12 = b$.

2°. Il faut former une progression arithmétique de 4 termes, dont le 1^{er} soit le diviseur 8, & le 4^e soit le diviseur 2. On verra dans les articles 497 & 499 le moyen de former cette progression qui est $-8, 6, 4, 2$.

3°. Il faut écrire $\frac{2^4}{3^1} = 3$, $\frac{2^4}{3^2} = 4$, $\frac{2^4}{3^3} = 6$, $\frac{2^4}{3^4} = 12$. C'est la progression harmonique qu'il falloit former. Car il est évident par le 1^{er} Corollaire * que ces quatre termes, dont le 1^{er} & le dernier sont les grandeurs données 3 & 12, font une progression harmonique. 414.

DÉFINITION.

416. **T**ROIS grandeurs comme 3. 5. 6 font une proportion contr'harmonique, lorsque la 3^e 6 est à la 1^{re} 3; comme la différence 2 de la 1^{re} 3 à la 2^e 5 est à la différence 1 de la 2^e 5 à la 3^e 6. C'est à dire, on dit que les trois grandeurs 3. 5. 6 font une proportion contr'harmonique, parceque $6. 3 :: 5 - 3. 6 - 5$. Et si la proportion contr'harmonique s'étend à plus de trois termes, on la nomme une progression contr'harmonique.

Mais comme elle n'est pas d'usage dans les Mathématiques, il suffit d'en avoir donné une idée, & il est inutile de s'y arrêter davantage.

SECTION VI.

Où l'on explique le calcul des incommensurables simples, ou qui n'ont qu'un signe radical.

Supposons que l'on a démontrés dans les Livres précédens.

1.

^{417.}
^{309.} **L**A racine d'une puissance numérique imparfaite (laquelle puissance numérique est un nombre entier ou une fraction) * est une grandeur incommensurable. Par exemple, la racine 2^e de 3 est une grandeur incommensurable; la racine 3^e de $\frac{1}{2}$ est une grandeur incommensurable, &c ainsi des autres.

Cela est cause qu'on exprime les grandeurs incommensurables par le *signe radical* $\sqrt{}$, en écrivant au dessus du signe l'exposant qui marque si c'est une racine 2^e, 3^e, &c. Par exemple $\sqrt[2]{3}$ exprime la racine 2^e de 3; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ marque la racine 3^e de $\frac{1}{2}$; $\sqrt[5]{x}$ marque la racine 5^e de la puissance imparfaite x . Quand on veut marquer une incommensurable d'une manière générale, on se sert d'une lettre pour l'exposant du signe radical. Par exemple $\sqrt[a]{x}$ marque la racine quelconque de la puissance x . Quand il n'y a point d'exposant sur le signe $\sqrt{}$, on y sous entend l'exposant 2. Ainsi \sqrt{x} est la même chose que $\sqrt[2]{x}$. On exprime * encore les incommensurables comme des puissances, sans se servir du signe radical $\sqrt{}$, en écrivant au haut de la grandeur vers la droite la fraction qui en est l'exposant. Ainsi $3^{\frac{1}{2}}$ est la même chose que $\sqrt[2]{3}$. De même $a^{\frac{1}{3}}$ est la même que $\sqrt[3]{a}$. En general $a^{\frac{1}{n}}$ est la même chose que $\sqrt[n]{a}$; &c $a^{\frac{m}{n}}$ est la même chose que $\sqrt[n]{a^m}$.

2.

^{418.}
^{100.} La racine, dont l'exposant est un nombre pair, d'une grandeur négative, comme $\sqrt{-ab}$, $\sqrt{-a^2b}$, &c * qui est une grandeur impossible qu'on nomme (à cause de cela) *grandeur imaginaire*, est aussi regardée comme une grandeur incommensurable.

3.

419. Il y a enfin parmi les grandeurs littérales des puissances parfaites & imparfaites; par exemple a^3 est une 3^e puissance parfaite, dont la racine 3^e est a ; mais a^2b étant considérée comme une puissance 3^e, est une puissance imparfaite; car il n'y a pas de grandeur littérale dont le carré étant multiplié par cette grandeur même donne pour produit a^2b .

Les racines des puissances littérales imparfaites sont aussi regardées comme des grandeurs incommensurables. Par exemple $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[7]{a^3}$, &c. sont des incommensurables; & en general $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a^{m-1}b}$ sont des incommensurables.

4.

420. Pour élever une incommensurable comme $\sqrt[n]{ab}$ à la puissance dont l'exposant est celui du signe $\sqrt[n]{}$, il ne faut qu'effacer $\sqrt[n]{}$, & la grandeur qui étoit précédée du signe $\sqrt[n]{}$, sans autre changement, sera la puissance qu'on demande. Ainsi pour élever $\sqrt[n]{ab}$ à la 2^e puissance, il ne faut qu'écrire ab , de même la 3^e puissance de $\sqrt[n]{a}$ est a . La 2^e puissance de $\sqrt[n]{-ab}$ est $-ab$; la puissance n de $\sqrt[n]{a}$ est a , la puissance n de $\sqrt[n]{a^{m-1}b}$ est $a^{m-1}b$; & ainsi des autres. Cela est évident de soi-même.

5.

421. Lorsque la grandeur littérale précédée du signe radical est élevée à une puissance qui a le même exposant que la racine, la grandeur incommensurable est égale à la grandeur littérale qui demeure en effaçant tant le signe radical que l'exposant de la puissance littérale. C'est à dire $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$; en general $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{a^{m-1}b^n} = a^{m-1}b$. Cela est évident de soi-même.

REMARQUE.

APRÈS avoir donné des expressions aux grandeurs incommensurables, on les a réduites au calcul; c'est à dire, on a trouvé le moyen de faire les mêmes opérations sur les incommensurables que l'on fait sur les grandeurs commensurables entières & rompuës, savoir l'addition, la soustra-

Etun, la multiplication, &c. & même de les faire entrer dans le calcul des grandeurs commensurables, en ajoutant, soustrayant, multipliant & divisant les grandeurs commensurables & incommensurables mêlées les unes avec les autres; C'est ce qu'on va expliquer.

Le calcul des grandeurs incommensurables.

DEFINITIONS.

1.

422. **DANS** les grandeurs incommensurables on dit que la grandeur devant laquelle est le signe radical, est sous le signe. Ainsi dans $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, \sqrt{a} , $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$, &c. les grandeurs 3, 2, a, $a^2 + ab + b^2$ sont sous le signe.

Quand la grandeur qui est sous le signe est complexe, on tire une ligne depuis le signe radical qui couvre toute la grandeur complexe qui est sous le signe. Ainsi dans $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$ la grandeur complexe $a^2 + ab + b^2$ que couvre la ligne, est sous le signe $\sqrt{}$.

2.

423. Pour ajouter des grandeurs incommensurables tant entières qu'avec des commensurables, on les joint ensemble sans changer leurs signes $+$ ou $-$, en écrivant les commensurables les premières à gauche; & pour les retrancher les unes des autres, on change le signe de celles qu'on doit retrancher, & ensuite on les joint avec leur signe changé aux grandeurs dont on les veut retrancher. Ainsi pour ajouter \sqrt{ab} à a, on écrit $a + \sqrt{ab}$. Pour ajouter \sqrt{a} à \sqrt{b} , on écrit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Pour ôter \sqrt{b} de \sqrt{a} , on écrit $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Pour retrancher de $+a$ l'incommensurable \sqrt{b} , on écrit $a - \sqrt{b}$. Il en est de même des autres.

3.

424. Pour multiplier une grandeur incommensurable par une grandeur commensurable, on écrit la grandeur commensurable la première, & on lui joint l'incommensurable, observant * la règle des signes $+$ & $-$.

* 9f.

Pour multiplier a par \sqrt{ab} , ou \sqrt{ab} par a, on écrit $a\sqrt{ab}$.

Pour multiplier $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$ par $a + b$, on écrit $a + b \sqrt{a^2 + ab + b^2}$. On tire une ligne sur la grandeur complexe $a + b$ pour marquer que cette grandeur complexe est multipliée par l'incommensurable.

De même — $a\sqrt{ax}$ est produit de $+\sqrt{ax}$ par — a , ou de $+\sqrt{ax}$ par — a , $+\sqrt{ax}$ est le produit de — \sqrt{ax} par — a , $+\sqrt{ax}$ est aussi le produit de $+\sqrt{ax}$ multiplié par $+\sqrt{ax}$.

4.

425. Dans un produit d'une incommensurable par une commensurable, comme dans $a\sqrt{ax}$, on dit que la grandeur a est hors du signe, & que la grandeur ax est sous le signe.

Quand il y a une grandeur complexe sous le signe, on l'ordonne par rapport à une lettre comme dans les produits : s'il y a une inconnue, c'est cette lettre inconnue qu'on prend pour ordonner la grandeur complexe, & ordinairement on écrit les termes qui contiennent les plus hautes puissances de l'inconnue les plus à droite de cette manière $ax\sqrt{ab} - ax + cx^2 + ex^3$.

5.

426. Pour diviser une grandeur commensurable par une incommensurable, ou une incommensurable par une commensurable, on écrit celle qui est le dividende sur une ligne, & celle qui est le diviseur au dessous, & cette fraction est le quotient auquel on donne le signe $+$ ou $-$, suivant la règle * 139. des signes de la division.

Par exemple pour diviser $+\sqrt{ab}$ par — a , on écrit pour quotient — \sqrt{ab} . Le quotient de — \sqrt{ab} par $+\sqrt{ab}$ est — $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$; on l'écrit encore de cette sorte — $\frac{1}{1}\sqrt{ab}$, parceque — $\sqrt{ab} = -1\sqrt{ab}$. Pour diviser — $ax\sqrt{a} + bx$ par — b , on écrit pour quotient $+\frac{ax\sqrt{a} + bx}{b}$, ou bien $+\frac{a}{b}\sqrt{a} + bx$.

REMARQUE.

ON a mis ce premier calcul des incommensurables en définitions, parcequ'il ne consiste qu'en des signes arbitraires qu'on a déterminés à ce calcul, & il est pourtant d'un très

grand usage dans les Mathématiques. Il n'est pas nécessaire d'avertir qu'on marque aussi dans les incommensurables, comme dans les autres grandeurs, la multiplication par le signe \times , comme $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$, & la division de deux incommensurables, en les écrivant en fraction, le dividende sur une ligne, & le diviseur au dessous $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

La multiplication des incommensurables lorsque chacun des multiplicateurs ne contient qu'un seul signe radical, & que l'exposant de chaque signe radical est le même.

PROBLÈME I.

427. **MULTIPLIER** deux ou plusieurs incommensurables, dont chacune n'a qu'un seul signe radical, lequel signe a dans chacune le même exposant.

Règle ou opération. Il faut prendre le produit des grandeurs qui sont sous chaque signe radical, & écrire au devant le signe radical avec le même exposant, & ce sera le produit qu'on cherche. On observera la règle * des signes + & - de la multiplication.

EXEMPLES.

POUR multiplier $+\sqrt{a}$ par $+\sqrt{b}$, on écrira pour produit $+\sqrt{ab}$.

Pour multiplier $-\sqrt{a-b}$ par $+\sqrt{a+b}$, on écrira pour produit $-\sqrt{a^2-b^2}$.

Pour multiplier $+\sqrt{a^3}$ par $-\sqrt{a}$, on écrira pour produit $-\sqrt{a^4} = -a^2$.

428. Pour multiplier $\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{\frac{2}{3}}$, il faut prendre le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{3}$ qui est $\frac{1}{3}$, & écrire $\sqrt{\frac{1}{3}}$ au devant, & le produit qu'on cherche est $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Pour multiplier $+\sqrt{a}$, $-\sqrt{b}$, $-\sqrt{c}$ les uns par les autres, il faut écrire pour produit $+\sqrt{abc}$.

Démonstration du Problème \sqrt{a} & \sqrt{b} peuvent représenter les incommensurables qu'il faut multiplier l'une par l'autre ;
72. on va démontrer que leur produit est \sqrt{ab} . Car * 1. $a :: b$.
 ab .

ab. Donc $\sqrt[n]{1} = 1$. $\sqrt[n]{a} :: \sqrt[n]{b}$. $\sqrt[n]{ab}$. Ainsi $\sqrt[n]{ab}$ est le produit de $\sqrt[n]{a}$ par $\sqrt[n]{b}$. Ce qu'il falloit démontrer. * 360. * 72.

COROLLAIRE I.

428. ON multiplie aussi une incommensurable par une grandeur commensurable à la manière des incommensurables, en élevant la dernière à la puissance dont l'exposant est celui du signe de l'incommensurable; ce qui donne une expression incommensurable à la grandeur commensurable sans en changer la valeur. Par exemple, pour multiplier $\sqrt[n]{a}$ par b , on change b en $\sqrt[n]{b^n} = b$, puis on forme le produit $\sqrt[n]{ab^n} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n} = * b \sqrt[n]{a}$. * 421.

La démonstration est la même. Car $1. b^n :: a. ab^n$. Donc $\sqrt[n]{1} = 1$. $\sqrt[n]{b^n} = b :: \sqrt[n]{a}$. $\sqrt[n]{ab^n} = * b \sqrt[n]{a}$. * Ce qu'il falloit, &c. * 421. * 72.

Pour multiplier $\sqrt[n]{a}$ par b , on changera b en $\sqrt[n]{b^n} = * b$, * 421.
& on formera ensuite le produit $\sqrt[n]{ab^n} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n} = * b \sqrt[n]{a}$. * 421.
Car $1. b^n :: a. ab^n$. Donc $\sqrt[n]{1} = 1$. $\sqrt[n]{b^n} = b :: \sqrt[n]{a}$. $\sqrt[n]{ab^n} = * b \sqrt[n]{a}$. * 360. * 421.

COROLLAIRE II.

Qui contient la Méthode de réduire une incommensurable à l'expression la plus simple.

429. D'où l'on voit, 1°. que quand la grandeur qui est sous le signe $\sqrt[n]{ab^n}$ est un produit ab^n formé de deux multiplicateurs, dont l'un est une puissance parfaite b^n qui a pour exposant n , c'est à dire l'exposant du signe radical, & dont l'autre multiplicateur a est une puissance imparfaite; on peut changer cette expression en cette autre $b \sqrt[n]{a}$, en laissant sous le signe $\sqrt[n]{}$ la seule puissance imparfaite a , & écrivant au-devant du signe $\sqrt[n]{}$ la racine b de la puissance parfaite b^n . Car $\sqrt[n]{ab^n} = * \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{a} = * b \sqrt[n]{a}$. * 427. * 421.

Cette operation contient une division & une multiplication. Pour le voir clairement on remarquera, 1°. que $\sqrt[n]{ab^n} = 1 \sqrt[n]{ab^n} = 1 \sqrt[n]{a b^n}$. 2°. Que pour réduire $1 \sqrt[n]{ab^n}$ à $b \sqrt[n]{a}$, on divise la grandeur $1 \sqrt[n]{ab^n} = 1 \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n}$ par $\sqrt[n]{b^n}$; ce qui donne

$$\frac{1 \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b^n}}{1 \sqrt[n]{b^n}} = * \frac{1 \sqrt[n]{a}}{1} = 1 \sqrt[n]{a}; \text{ \& qu'ainsi cette division se fait } * 109.$$

en effaçant simplement la grandeur b^n dans $1\sqrt[n]{ab^n}$. 3° Mais comme il faut que la grandeur à laquelle on réduit $1\sqrt[n]{ab^n}$ lui soit égale, & qu'elle ait précisément la même valeur que $1\sqrt[n]{ab^n}$; il faut la multiplier par la même grandeur $\sqrt[n]{b^n}$ par laquelle on l'a divisée, cela se fait en écrivant b audevant de $\sqrt[n]{a}$, de cette manière $b\sqrt[n]{a}$; car $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$. On peut encore remarquer que $1\sqrt[n]{ab^n}$ a deux parties multipliées l'une par l'autre, l'une sous le signe qui est $\sqrt[n]{ab^n}$, l'autre hors du signe qui est ici l'unité seule 1. En réduisant $1\sqrt[n]{ab^n}$ à $b\sqrt[n]{a}$, on divise la partie qui est sous le signe par $\sqrt[n]{b^n}$ ce qui se fait en effaçant b^n & écrivant $1\sqrt[n]{a}$; & on multiplie en même temps l'autre partie (1) qui est hors du signe, par la même grandeur $\sqrt[n]{b^n} = b$; ce qui se fait en écrivant b audevant du signe, & $1\sqrt[n]{ab^n}$ est réduite à $b\sqrt[n]{a}$ qui est égale à $1\sqrt[n]{ab^n}$.

Cette manière de retirer hors du signe dans $\sqrt[n]{ab^n}$ la grandeur commensurable $b = \sqrt[n]{b^n}$ pour former l'expression $b\sqrt[n]{a}$, s'appelle *réduire une incommensurable à sa plus simple expression*. On dit aussi que c'est *retirer hors du signe une grandeur b^n qui est sous le signe*.

COROLLAIRE III.

430. 2°. QUAND une incommensurable contient une commensurable hors du signe comme $b\sqrt[n]{a}$, on peut sans en changer la valeur, faire passer la grandeur commensurable b sous le signe, en élevant b à la puissance n dont l'exposant est celui du signe, & multipliant ensuite la grandeur a qui est sous le signe par cette puissance b^n ; & l'on aura $b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ab^n}$.

Application de ces Corollaires à des Exemples.

P OUR réduire $\sqrt{18}$ à sa plus simple expression, on divisera 18 par 9 qui est le plus grand carré qui divise exactement 18, & on écrira 3 racine 2° de 9 devant le signe radical, & 2 qui est le quotient de 18 divisé par 9 sous le signe radical, & l'expression la plus simple de $\sqrt{18}$ sera $3\sqrt{2}$.

On réduira de même $\sqrt[3]{54}$ à son expression la plus simple $3\sqrt[3]{2}$, en divisant 54 par la plus grande 3° puissance parfaite 27

qui soit un diviseur de 54, & écrivant le quotient 2 de 54 divisé par 27 sous le signe, & la racine 3^e de 3 de 27 hors du signe.

On réduira $\sqrt[3]{\frac{54}{27}}$ à sa plus simple expression $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{4}}$, en réduisant le numérateur $\sqrt[3]{54}$ à sa plus simple expression $3\sqrt[3]{2}$, & de même le dénominateur à sa plus simple expression $2\sqrt[3]{4}$, & écrivant ensuite ces plus simples expressions en fraction $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{4}}$, ou bien $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{4}}$; & à cause de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ on peut encore écrire $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

On réduira $\sqrt[3]{a^3 - a^2b}$ à la plus simple expression $a\sqrt[3]{a - b}$, en divisant la grandeur complexe $a^3 - a^2b$ par a^3 qui est la plus grande 3^e puissance parfaite qui en soit un diviseur, & écrivant le quotient $a - b$ sous le signe, & la racine 3^e a de a^3 hors du signe.

On réduira $\sqrt[3]{x^6 - 5ax^3 + 9a^2x^2 - 7a^3x + 2a^4x}$ à sa plus simple expression $x - a\sqrt[3]{x^3 - 2ax^2}$, en divisant la grandeur complexe qui est sous le signe par $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ qui est la plus grande 3^e puissance parfaite qui la divise exactement, & écrivant le quotient $x^3 - 2ax^2$ sous le signe, & $x - a$ qui est la racine 3^e de $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ hors du signe avec une ligne qui couvre $x - a$, pour marquer que l'incommensurable est multiplié par la grandeur complexe entière $x - a$.

Pour réduire la grandeur incommensurable $\sqrt[3]{x^3 + \frac{4mp}{p^2}}$ à son expression la plus simple $\frac{2}{p}\sqrt[3]{x^3 + 4mp}$, 1°. on réduira tous les termes de la grandeur qui est sous le signe à un même dénominateur, & l'on aura $\sqrt[3]{\frac{x^3p^2 + 4mp}{p^2}}$, 2°. On réduira le numérateur à son expression la plus simple $x\sqrt[3]{x^3 + 4mp}$, & le dénominateur $\sqrt[3]{p^2}$ à son expression la plus simple p ; & l'on aura $\frac{x\sqrt[3]{x^3 + 4mp}}{p}$, ou bien $\frac{2}{p}\sqrt[3]{x^3 + 4mp}$.

Pour réduire $\sqrt[3]{\frac{a^3m^2}{p^2x^2} + \frac{4mp^2}{p^2}}$ à sa plus simple expression $\frac{4m}{p}\sqrt[3]{x^3 + 4mp}$, 1°. on réduira les termes de la grandeur qui est sous le signe au même dénominateur, & l'on aura $\sqrt[3]{\frac{a^3m^2 + 4mp^2x^2}{p^2}}$, 2°. On réduira le numérateur à sa plus simple

expression $am\sqrt{a^2 + 4mp}$, & le dénominateur $\sqrt{p^2x^2}$ à px , & l'on aura $\frac{am}{p}\sqrt{a^2 + 4mp}$.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir la manière de réduire une incommensurable à la plus simple expression, quand la grandeur qui est sous le signe a pour diviseur une puissance parfaite dont l'exposant est le même que celui du signe radical; car quand il n'y a pas de tel diviseur, on ne peut pas le réduire à une plus simple expression, du moins sans une préparation qu'on donnera dans la suite, par laquelle on met sous le signe un diviseur qui est une puissance parfaite du degré de l'exposant du signe radical, sans changer la valeur de l'incommensurable.

Pour réduire sous le signe dans $3\sqrt{2}$, la grandeur 3, il faut élever 3 à la 2^e puissance, & multiplier par cette puissance 9 la grandeur 2 qui est sous le signe, & écrire le produit 18 sous le signe, & l'on aura $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

On réduira de même $3\sqrt{2}$ à $\sqrt{54}$, en écrivant sous le signe le produit 54 de 18 (qui est la 3^e puissance de 3) par 2.

On réduira de même $a^2\sqrt{a^2 - b^2}$ à $\sqrt{a^4 - a^2b^2}$. Il en est de même des autres.

COROLLAIRE IV.

431. **P**OUR multiplier deux ou plusieurs incommensurables qui ont toutes, ou quelques-unes, une grandeur commensurable hors du signe, & qui ont le même exposant du signe radical, comme $a\sqrt{b}$ par $a\sqrt{c}$; il faut écrire le produit des commensurables hors du signe, & celui des incommensurables sous le signe. Ainsi le produit de $a\sqrt{b} \times a\sqrt{c}$ est $a^2\sqrt{bc}$.

On peut aussi, si l'on veut, réduire dans chaque multiplicateur la grandeur commensurable sous le signe, & faire ensuite la multiplication. Par exemple on réduira $a\sqrt{b}$ à $\sqrt{a^2b}$, & $a\sqrt{c}$ à $\sqrt{a^2c}$, & l'on formera ensuite le produit $\sqrt{a^2bc}$, qui se réduit à $a^2\sqrt{bc}$.

⁷² * 360.
* 72. *Démonstration.* * 1. $a^2b :: a^2c. a^2bc$. Donc $a^2\sqrt{1} = 1$.
 $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b} :: \sqrt{a^2c} = a\sqrt{c}. \sqrt{a^2bc} = a^2\sqrt{bc}$. Ainsi *
 $a^2\sqrt{bc}$ & $\sqrt{a^2bc}$ sont chacune le produit de $a\sqrt{b}$ par $a\sqrt{c}$.

De même $6\sqrt{10}$ est le produit de $2\sqrt{5}$ par $3\sqrt{2}$.

COROLLAIRE V.

432. UNE grandeur commensurable a peut se réduire en un produit qui aura pour multiplicateurs la racine de cette grandeur répétée autant de fois que l'exposant du signe radical contiendra d'unités. Ainsi $a = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a}$, $a = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a}$, $a = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a}$. Il en est de même des autres. Cela est évident par la formation des puissances. * ^{* 143.}

REMARQUE.

433. CETTE réduction d'une grandeur commensurable en un produit équivalent exprimé par la racine de cette grandeur, est d'usage en plusieurs calculs. L'on a, par exemple,

$\frac{a+1 \times \sqrt[n]{c+1}}{\sqrt[n]{a+1} \times \sqrt[n]{b+1}}$. En changeant $a+1$ en $\sqrt[n]{a+1} \times \sqrt[n]{a+1}$, on réduit cette fraction à $\frac{\sqrt[n]{a+1} \times \sqrt[n]{a+1} \times \sqrt[n]{c+1}}{\sqrt[n]{a+1} \times \sqrt[n]{b+1}}$, laquelle en effaçant les grandeurs communes au numérateur & au dénominateur, se réduit à $\frac{\sqrt[n]{a+1} \times \sqrt[n]{c+1}}{\sqrt[n]{b+1}}$.

COROLLAIRE VI.

Où l'on explique la multiplication des racines impossibles ou imaginaires.

434. QUAND une grandeur négative (c'est à dire précédée du signe $-$) est regardée comme une puissance dont l'exposant est un nombre pair, par exemple une 2^e puissance, une 4^e puissance, une 6^e puissance, &c. sa racine lineaire est une grandeur impossible * qu'on nomme imaginaire. Ainsi $\sqrt{-2}$, ^{* 100.} $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-2}$, &c. sont des racines imaginaires.

Le calcul de ces racines imaginaires sert dans la résolution de beaucoup de Problèmes. Voici ce qu'il faut sur tout obser-

435. ver dans ce calcul 1°. Une racine imaginaire étant élevée à la puissance dont l'exposant est le même que l'exposant du signe radical, rétablit la grandeur réelle dont elle étoit la racine. Ainsi $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-a^2} = -a$, $\sqrt{-a}$ étant élevée à la 4^e puissance, donne la grandeur réelle négative $-a$. Il en est de même des autres.

436. 2°. Il y a deux signes \pm ou $-$ dans chaque imaginaire ; l'un, qui est sous le signe radical, est toujours $-$; l'autre, qui est au devant du signe radical, est ou \pm ou $-$.

Quand on multiplie une grandeur imaginaire par une grandeur réelle, comme $-\sqrt{-}3$ par ± 2 , ou par $\pm\sqrt{2}$, il ne faut avoir égard qu'au signe qui est au devant du signe

- * 95. radical, & suivre la règle * des signes \pm & $-$ de la multiplication. Ainsi $\pm 2 \times -\sqrt{-}3 = -2\sqrt{-}3$. De même $\pm\sqrt{2} \times -\sqrt{-}3 = -\sqrt{2} \times \sqrt{-}3$, ou simplement $-\sqrt{2} \sqrt{-}3$.

Mais quand on multiplie une imaginaire par elle-même,

- * 435. & que cette multiplication * rétablit la grandeur réelle négative, (comme quand on multiplie $\pm\sqrt{-}3$ par $-\sqrt{-}3$, ce qui rétablit la grandeur réelle -3) il faut avoir égard, à deux signes ; celui qui précède immédiatement la grandeur réelle -3 rétablie * est toujours $-$; l'autre, qui précède ce signe négatif $-$, vient de la multiplication des signes qui précèdent les signes radicaux dans les imaginaires.
- * 95. res qu'on a multipliées : ce second signe suit * la règle des signes de la multiplication. Ainsi ce signe est \pm quand les signes qui précèdent les signes radicaux sont tous deux \pm , ou tous deux $-$, & ce signe est $-$ quand l'un des signes qui précèdent les signes radicaux est \pm & l'autre $-$.

D'où l'on voit que dans ce cas où la multiplication rétablit la grandeur réelle négative ; cette grandeur réelle rétablie est d'abord précédée de deux signes ; celui qui la touche est $-$, & l'autre est \pm ou $-$, selon * la règle des

- * 95. signes \pm & $-$. Ainsi $\pm\sqrt{-}3$ par $-\sqrt{-}3 = - - 3$, $\pm\sqrt{-}3$ par $\pm\sqrt{-}3 = \pm - 3$, enfin $-\sqrt{-}3$ par $-\sqrt{-}3 = + - 3$.
- * 30 & 31. Mais $- - 3 = * + 3$, & $\pm - 3 = - 3$. C'est ce qui donne cette règle particulière à la multiplication des imaginaires, dont le signe radical a pour exposant 2, parceque ce sont presque les seules imaginaires qui se trouvent dans l'usage ordinaire, & on peut aisément étendre la règle aux autres imaginaires.

Règle pour les signes dans la multiplication des imaginaires qui ont $\sqrt{-1}$.

437. QUAND on multiplie deux imaginaires, qui ont la même grandeur négative sous $\sqrt{-1}$, l'une par l'autre; la grandeur réelle qui en vient est précédée du signe $+$ quand les signes qui précèdent $\sqrt{-1}$ sont différens, l'un $+$ & l'autre $-$. Mais quand les signes qui précèdent $\sqrt{-1}$ sont tous deux $+$ ou tous deux $-$, la grandeur réelle qui vient de la multiplication est précédée du signe $-$. Par exemple $+\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -a$, $-\sqrt{-1} \times +\sqrt{-1} = -a$, $+\sqrt{-1} \times +\sqrt{-1} = -a$, $-\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -a$.

Ces choses supposées, la multiplication des racines imaginaires se fait comme celles des autres racines, en observant ce qui est de particulier aux imaginaires.

Exemples de la multiplication des racines imaginaires.

438. POUR multiplier $+\sqrt{-1} \times b$ par $+\sqrt{-1} \times c$, on trouvera d'abord $+\sqrt{-1} \times b \times c$, qu'on réduira à $-abc$.

On trouvera de même que $-\sqrt{-1} \times b \times c \times \sqrt{-1} = +abc$, & que $+\sqrt{-1} \times b \times c \times \sqrt{-1} = -abc$, & que $-\sqrt{-1} \times b \times c \times \sqrt{-1} = +abc$.

Le produit de -3 par $\sqrt{-1} \times 6 = -3\sqrt{-1} \times 6$.

Pour multiplier $-\sqrt{-1} \times b$ par $+\sqrt{-1} \times a$; il faut écrire $-\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times b$, ou bien pour éviter la confusion, $-\sqrt{-1} \times a \times \sqrt{-1} \times b$.

R E M A R Q U E.

439. DANS la multiplication d'une racine imaginaire $\sqrt{-1} \times b$ par une racine réelle $\sqrt{-1} \times a$, il vaut mieux, ce semble, écrire pour le produit $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times b$, que $\sqrt{-1} \times ab$, afin de distinguer toujours dans le calcul la racine imaginaire $\sqrt{-1} \times b$ de la racine réelle $\sqrt{-1} \times a$ par laquelle elle est multipliée.

La raison de cette distinction est que la multiplication des imaginaires ne rétablit la grandeur réelle négative dont la racine est imaginaire, que dans le seul cas où la racine imaginaire est élevée à la puissance dont l'exposant est le même

que l'exposant du signe radical ; par exemple, la multiplication de $\sqrt{-b}$ ne rétablira la grandeur réelle $-b$ qu'en élevant $\sqrt{-b}$ à la 2^e puissance, ce qui arrive en multipliant $\sqrt{-b}$ par $\sqrt{-b}$. Le produit $\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$ est alors égal à $-b$. Mais si en multipliant $\sqrt{-b}$ par \sqrt{b} , on écrivoit aussi pour produit $\sqrt{-b}$; dans ce cas $\sqrt{-b}$ ne seroit pas la grandeur réelle négative $-b$ dont $\sqrt{-b}$ est la racine imaginaire ; (&c si l'on retiroit la racine b hors du signe, il faudroit laisser sous le signe $\sqrt{}$ l'imaginaire $\sqrt{-1}$, de cette manière $b\sqrt{-1} = \sqrt{-b^2}$, pour exprimer que dans la multiplication d'une imaginaire $\sqrt{-b}$ par une réelle \sqrt{b} , le produit $\sqrt{-b}$ ou $b\sqrt{-1}$ contient toujours une racine imaginaire.)

Pour éviter cette confusion de deux expressions semblables de deux choses si différentes, il me semble qu'il vaut mieux écrire $\sqrt{b} \times \sqrt{-b}$, que $\sqrt{-b^2}$.

Quand on multiplie aussi une imaginaire par une imaginaire différente, comme $\sqrt{-a}$ par $\sqrt{-b}$, il faut de même écrire pour le produit $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$, afin de distinguer toujours chacune des imaginaires différentes dans le produit.

On peut aussi remarquer que quand la grandeur qui est précédée du signe $-$ sous le signe $\sqrt{}$, est un carré parfait comme dans $\sqrt{-b^2}$, qui ne vient pas du produit $\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$, duquel naîtroit la grandeur réelle $-b$, mais qui vient de ce qu'on a tiré la racine 2^e du carré négatif $-b^2$ en écrivant $\sqrt{-b^2}$; il paroît mieux de conserver cette expression qui distingue la grandeur imaginaire, que de retirer hors du signe $\sqrt{}$, la racine de ce carré parfait, de cette manière $b\sqrt{-1}$. Et si l'on se servoit dans la pratique de cette expression $b\sqrt{-1}$, au lieu de $\sqrt{-b^2}$, il faudroit prendre garde de ne la pas confondre avec les grandeurs réelles.

La Division des incommensurables, lorsque le dividende & le diviseur ne contiennent chacun qu'un signe radical, & que l'exposant de chaque signe radical est le même.

PROBLÈME II

440. *FAIRE la division de deux grandeurs incommensurables, ou dont au moins l'une est incommensurable, lorsque chaque incommensurable n'a qu'un signe radical, & que l'exposant de chaque signe radical est le même.*

Règle ou Operation. Il faut diviser la grandeur qui est sous le signe dans le dividende par la grandeur qui est sous le signe dans le diviseur, & écrire le signe radical avec le même exposant devant le quotient, & ce sera le quotient qu'on cherche. On suivra * la règle des signes + & - de la division. 132

E X E M P L E S.

POUR diviser $\sqrt{a^2b}$ par \sqrt{ab} , on divisera a^2b par ab , ce qui donnera le quotient a , on écrira le signe $\sqrt{}$ devant le quotient, & l'on aura \sqrt{a} pour le quotient.

Pour diviser $\sqrt{b^3}$ par \sqrt{bc} , on écrira pour quotient $-\sqrt{\frac{b}{c}}$, ou, si l'on veut, $-\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$.

Pour diviser $-\sqrt{a}$ par $-\sqrt{b}$, on écrira pour quotient $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Pour diviser $-\sqrt{a}$ par \sqrt{b} , on écrira pour quotient $-\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Pour diviser $\sqrt{a^2 - b^2}$ par $\sqrt{a - b}$, on divisera $a^2 - b^2$ par $a - b$, & on écrira pour quotient $\sqrt{a + b}$.

Pour diviser \sqrt{b} par \sqrt{b} , il faut écrire pour quotient $\sqrt{1} = 1$.

On divisera de même $\sqrt{12}$ par $-\sqrt{4}$, en écrivant pour quotient $-\sqrt{3}$.

On trouvera de même que le quotient de $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ par $\sqrt{\frac{1}{2}}$, est $-\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$, en réduisant * $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ à la plus simple expression.

Pour trouver le quotient de $\sqrt[n]{a^p}$ divisé par $\sqrt[n]{\frac{a^p}{b^p}}$, il faut diviser a^p par $\frac{a^p}{b^p}$, ce qui donnera $\frac{a^p b^p}{a^p}$, & écrire $\sqrt[n]{\frac{a^p b^p}{a^p}}$

- * 153. qu'on pourra aussi écrire de cette sorte $\sqrt[n]{a^{p-p} b^p}^1$.
 & 149. *Démonstration.* En prenant $\sqrt[n]{a}$ pour représenter le dividende, & $\sqrt[n]{b}$ pour représenter le diviseur, il faut démontrer que $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ est le quotient de $\sqrt[n]{a}$ divisée par $\sqrt[n]{b}$, ou bien
 * 106. que $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot 1$.
 * 106 & * $a \cdot b :: \frac{a}{b} \cdot 1$. Donc $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{1} = 1$. *Ce qu'il*
 * 111. *fallait démontrer.*
 * 360 &

394.

COROLLAIRE I.

441. **P**OUR diviser a/b par c/d il faut diviser, 1^o, la grandeur qui est hors du signe dans le dividende par la grandeur qui est hors du signe dans le diviseur, & diviser, 2^o, par le Problème précédent les grandeurs qui sont sous le signe: écrire le premier quotient au devant du signe, & le second sous le signe, & l'on aura $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ pour le quotient qu'on cherche; ou bien on réduira sous le signe dans le dividende & dans le diviseur les grandeurs qui sont hors du signe, on en fera ensuite la division par le Problème précédent, & on abrègera le quotient en retirant hors du signe les grandeurs qu'on en peut retirer.

Par exemple, on réduira a/b à $\sqrt[n]{a^p b}$, & c/d à $\sqrt[n]{c^q d}$; ensuite on formera le quotient $\sqrt[n]{\frac{a^p b}{c^q d}}$ qu'on réduira à $\sqrt[n]{\frac{a^p}{c^q}}$.

- * 106 & *Démonstration.* $\sqrt[n]{a^p b} \cdot \sqrt[n]{c^q d} :: \sqrt[n]{\frac{a^p b}{c^q d}} \cdot 1$. Donc $\sqrt[n]{a^p b} = \sqrt[n]{\frac{a^p b}{c^q d}}$.
 * 111.
 * 394. $\sqrt[n]{c^q d} = c/d :: \sqrt[n]{\frac{a^p b}{c^q d}} = \sqrt[n]{\frac{a^p}{c^q}} \cdot \sqrt[n]{1} = 1$. * *Ce qu'il fallait*
 * 429.
 * 106. *démontrer.*

COROLLAIRE II.

442. **P**OUR faire la division quand il n'y a que l'une des deux grandeurs données qui soit incommensurable, il faut * réduire la grandeur commensurable, sans en changer la valeur, à une expression incommensurable qui ait l'exposant du signe de l'incommensurable donnée, & faire ensuite la division.

Par exemple, pour diviser a par $\sqrt[3]{a}$, on réduira a à $\sqrt[3]{a^3}$, & ensuite on divisera $\sqrt[3]{a^3}$ par $\sqrt[3]{a}$, & on trouvera le quotient $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3} = a$.

On trouvera de même le quotient de 2 divisé par $\sqrt[3]{2}$, en changeant 2 en $\sqrt[3]{8}$; & faisant ensuite la division, on aura $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3}$ pour le quotient.

Pour diviser 3 par $\sqrt[3]{2}$, on changera 3 en $\sqrt[3]{9}$, & on trouvera ensuite $\sqrt[3]{9}$ pour le quotient qu'on cherche.

De même pour diviser $\sqrt[3]{32}$ par 2, on changera 2 en $\sqrt[3]{8}$, & on trouvera ensuite le quotient $\sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{8}}$.

REMARQUE.

443. ON peut aussi faire la division sans changer l'expression de la grandeur commensurable, en écrivant en fraction la grandeur commensurable & la grandeur incommensurable; c'est à dire en écrivant en fraction le dividende & le diviseur.

Par exemple, on divisera a par $\sqrt[3]{a}$, en écrivant $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$; on divisera $\sqrt[3]{a}$ par a , en écrivant $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a}$.

De même le quotient de $3\sqrt[3]{2}$ par 2, sera $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

COROLLAIRE III.

Où l'on explique la division des racines imaginaires.

444. QUAND le dividende & le diviseur contiennent la même grandeur imaginaire; comme aussi quand l'un des deux contient une imaginaire, & l'autre contient la grandeur négative réelle, dont la première est la racine imaginaire; la division se fait de la même manière que celle des incommensurables qu'on vient d'expliquer, en remarquant seulement que le quotient qui vient d'une imaginaire divisée par elle-même, sans avoir égard au signe qui précède le signe $\sqrt{-1}$, est l'unité positive. Par exemple $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = +1$; $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-3}} = +1$; Car il est évident que $\sqrt{-1}$ est contenue une fois dans elle-même $\sqrt{-1}$, ce qui se marque par l'unité positive.

Ccc ij

Pour diviser $\sqrt[4]{-3}$ par $-\sqrt[4]{-3}$, le quotient doit être $\frac{\sqrt[4]{-3}}{-\sqrt[4]{-3}} = -1$.

De même $\frac{a\sqrt[4]{-p}}{b\sqrt[4]{-p}} = \frac{a}{b}$.

Comme aussi pour diviser $-\sqrt[4]{p}$ par $\sqrt[4]{-p}$, il faut changer $-\sqrt[4]{p}$ en $\sqrt[4]{-p} \times \sqrt[4]{-p}$, & ensuite former le quotient $\frac{\sqrt[4]{-p} \times \sqrt[4]{-p}}{\sqrt[4]{-p}} = \sqrt[4]{-p}$.

De même pour diviser $\sqrt[4]{-p}$ par $-\sqrt[4]{p}$, il faut changer $-\sqrt[4]{p}$ en $\sqrt[4]{-p} \times \sqrt[4]{-p}$, & former ensuite le quotient $\frac{1}{\sqrt[4]{-p}} = \frac{\sqrt[4]{-p}}{\sqrt[4]{-p} \times \sqrt[4]{-p}}$.

On trouvera de la même manière que le quotient de $-\sqrt[4]{p} = \sqrt[4]{-p} \times \sqrt[4]{-p}$ par $a\sqrt[4]{-p}$, est $\frac{1}{a}\sqrt[4]{-p}$; que celui de $a\sqrt[4]{-p}$ par $-\sqrt[4]{p} (= \sqrt[4]{-p} \times \sqrt[4]{-p})$ est $\sqrt[4]{-p}$.

Mais quand le dividende contient une imaginaire & le diviseur en contient une autre différente; comme aussi quand il n'y a que l'un des deux qui contienne une imaginaire, & que l'autre contient une grandeur réelle communurable (différente de la grandeur réelle négative dont le premier contient la racine imaginaire,) la division se fait en écrivant simplement pour quotient le dividende & le diviseur en fraction.

Par exemple, pour diviser $\sqrt[4]{-a}$ par $\sqrt[4]{-3}$, il faut écrire pour quotient $\frac{\sqrt[4]{-a}}{\sqrt[4]{-3}}$. De même le quotient de a divisée par $\sqrt[4]{-p}$ est $\frac{a}{\sqrt[4]{-p}}$. Le quotient de $\sqrt[4]{a}$ divisée par $\sqrt[4]{-p}$, est $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{-p}}$. Le quotient de $\sqrt[4]{-p}$ par $\sqrt[4]{a}$, est $\frac{\sqrt[4]{-p}}{\sqrt[4]{a}}$. Il en est de même des autres.

PROBLÈME IV.

Où l'on enseigne à connoître les cas dans lesquels les incommensurables sont commensurables entr'elles.

445. *TROUVER* les cas où deux incommensurables dont le signe radical a le même exposant, sont commensurables entr'elles; c'est à dire les cas où le rapport d'une incommensurable à une autre incommensurable est égal au rapport d'un nombre à un autre nombre.

1. *Manière.* Il faut réduire * l'une & l'autre incommensurable à leur plus simple expression; & si, après la réduction, il se trouve dans l'une & l'autre incommensurable la même grandeur sous le signe radical, elles sont commensurables entr'elles. * 429.

E X E M P L E S.

ON connoitra que $\sqrt[3]{32}$ & $\sqrt[3]{18}$ sont commensurables entr'elles; car $\sqrt[3]{32} = 4\sqrt[3]{2}$, & $\sqrt[3]{18} = 3\sqrt[3]{2}$; mais $4\sqrt[3]{2} : 3\sqrt[3]{2} :: 4 : 3$. Par conséquent $\sqrt[3]{32}$ & $\sqrt[3]{18}$ ont entr'elles le même rapport que les nombres 4 & 3. * 75 & 109.

De même $\sqrt[5]{375}$ & $\sqrt[5]{24}$ sont commensurables, parceque $\sqrt[5]{375} = 5\sqrt[5]{3}$, & $\sqrt[5]{24} = 2\sqrt[5]{3}$, & $\frac{5\sqrt[5]{3}}{2\sqrt[5]{3}} = * \frac{5}{2}$. * 75. & 109.

En general toutes les incommensurables représentées par $\sqrt[n]{a^m b}$ & par $\sqrt[n]{b^m c}$ sont commensurables entr'elles, parceque $\sqrt[n]{a^m b} = a\sqrt[n]{b}$, & $\sqrt[n]{b^m c} = b\sqrt[n]{c}$; & $\frac{a\sqrt[n]{b}}{b\sqrt[n]{c}} = * \frac{a}{b}$. * 75 & 109.

Cela convient aux imaginaires quand les grandeurs qui sont sous le signe radical sont les mêmes. Par exemple, $3\sqrt{-1} - 2\sqrt{-1} :: 3 : 2$.

Cette methode est évidente.

2. *Manière.* On supposera les deux incommensurables représentées par $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$, & que l'exposant des deux signes radicaux soit un même nombre entier quelconque représenté par n . Il faudra élever celle des deux grandeurs qu'on voudra, qui est sous l'un des deux mêmes signes radicaux, à la puissance $n - 1$, & l'on aura a^{n-1} ou b^{n-1} , il faudra ensuite multiplier cette puissance par la grandeur qui est

Ccc ij

sous l'autre signe radical, & l'on aura $a^{n-1}b$, ou ab^{n-1} . Il faudra voir après cela si ce produit $a^{n-1}b$, ou bien ab^{n-1} , est une puissance parfaite qui ait pour exposant n ; c'est à dire il faudra en extraire la racine dont l'exposant est n ; & si l'on trouve la racine exacte, c'est à dire, si $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$, ou bien $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$, représentent chacune une racine exacte; les deux incommensurables représentées par $\sqrt[n]{a}$ & par $\sqrt[n]{b}$ seront

- * 409. commensurables entr'elles, & leur rapport $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ sera égal à *

$$\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}, \text{ ou bien à } \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}b}}{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}.$$

Par exemple, pour voir si $\sqrt[3]{32}$ & $\sqrt[3]{18}$ sont commensurables, j'éleve 32 à la puissance dont l'exposant est 2 — 1 = 1, c'est à dire, 32 est la puissance même, je multiplie 32 par 18, & je trouve le produit 576; j'en tire la racine quatrième, & je trouve la racine exacte 24. Cela me fait connaître que $\sqrt[3]{32}$ & $\sqrt[3]{18}$ sont commensurables, & que leur rapport est égal à $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$.

Pour connaître si $\sqrt[3]{375}$ & $\sqrt[3]{24}$ sont commensurables, j'éleve 24 à la puissance 3 — 1 = 2, & je multiplie cette puissance qui est 576 par 375; j'extrait la racine 3^e du produit 216000, & je trouve que cette racine est exactement 60, j'en conclus que $\sqrt[3]{375}$ & $\sqrt[3]{24}$ sont commensurables, & que leur rapport $\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{24}} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$.

Ou bien j'éleve 375 à la puissance 3 — 1 = 2; je multiplie cette puissance qui est 140625 par 24; j'extrait la racine 3^e du produit 3375000; & trouvant que cette racine est exactement 150, j'en conclus que $\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{24}} = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}$.

- Démonstration de la seconde manière.* On supposera que * 389. $\sqrt[n]{a}$ & $\sqrt[n]{b}$ représentent les deux incommensurables. $\frac{a}{b}$ * est composé d'autant de rapports égaux à $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ que n contient d'unités.

- En concevant entre a & b autant de moyens proportion-
* 405 & nels qu'il y a d'unités dans n — 1, $\frac{a}{b}$ * est aussi composé d'au-
407.

tant de rapports égaux à $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$ ou à $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$ qu'il y a d'uni-

tez dans n . Par conséquent $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}b}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$. Mais

quand $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$, comme aussi $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$, est une puissance parfaite dont l'exposant est n ; le rapport $\sqrt[n]{a^{n-1}b}$, comme aussi $\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$ est évidemment un rapport de deux grandeurs com-

menfurables. Par conséquent dans ce cas $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ est un rapport communurable.

3. *Manière*. Il faut écrire en fraction les deux grandeurs qui sont sous les signes radicaux, &c réduire * cette fraction ^{* 169.} aux moindres termes; par exemple, supposant que les deux incommensurables soient représentées par $\sqrt[n]{a^n b}$, &c $\sqrt[n]{bc^n}$, on écrira $\frac{a^n b}{bc^n}$, qu'on réduira au moindre rapport $\frac{a^n}{c^n}$. Si le nu-

merateur &c le dénominateur du moindre rapport $\frac{a^n}{c^n}$ sont chacun une puissance parfaite dont l'exposant soit n , le rapport des deux incommensurables sera communurable; car

$$\frac{a^n b}{bc^n} = \frac{a^n}{c^n}; \text{ donc } \frac{\sqrt[n]{a^n b}}{\sqrt[n]{bc^n}} = * \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = * \frac{a}{b}. \quad \begin{matrix} * 360. \\ * 421. \end{matrix}$$

Par exemple, on verra que $\sqrt[3]{32}$ &c $\sqrt[3]{18}$ sont communurables; parceque $\frac{1}{3}$ étant réduite aux moindres termes $\frac{1}{3}$, les deux termes sont chacun une 2^e puissance parfaite.

$$\text{Ainsi } \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2}{3}.$$

PROBLÈME IV.

446. *ELEVER une incommensurable représentée en général par $\sqrt[n]{a}$ à telle puissance qu'on voudra.*

Règle ou Operation. Il n'y a qu'à multiplier * l'incommen- ^{* 427.} surable $\sqrt[n]{a}$ une fois par elle-même, 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c ainsi de suite, &c l'on aura de suite toutes les puissances * ^{* 143.} $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a^2}$, $\sqrt[n]{a^3}$, $\sqrt[n]{a^4}$, &c.

termes de la progression $\sqrt[n]{}$ dont l'exposant du signe $\sqrt[n]{}$ est 1, font parmi les termes de chacune des autres progressions.

Tous les termes de la progression, dont le signe radical a pour exposant 2, se trouvent parmi les termes de la progression $\sqrt{}$, de la progression $\sqrt[4]{}$, de la progression $\sqrt[8]{}$, de la progression $\sqrt[16]{}$, &c.

Tous les termes de la progression $\sqrt[3]{}$, se trouvent dans chacune des progressions dont les signes radicaux sont $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[6]{}$, $\sqrt[9]{}$, &c. Il en est de même des autres progressions.

Démonstration. 1^o Il est évident que les termes de la progression $\sqrt[6]{}$ se trouvent dans chacune des autres représentées par la progression générale $\sqrt[n]{}$; car il est clair que, par exemple, $\sqrt[6]{a^6} = a$, $\sqrt[6]{a^{12}} = a^2$, &c ainsi des autres; de même dans la progression $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, $\sqrt[3]{a^9} = a^3$; &c ainsi des autres; & en général $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, $\sqrt[n]{a^{3n}} = a^3$, &c.

De même tous les termes de la progression $\sqrt[6]{}$ se trouvent d'une manière équivalente dans la progression $\sqrt[3]{}$ où 6 est multiple de 3, &c dans toutes les autres où l'exposant du signe est multiple de 3. Car, par exemple, le terme $\sqrt[3]{a}$ étant le moyen proportionnel dans la progression $\sqrt[3]{}$, entre 1 & a , il est clair que quelque expression que puisse avoir le moyen proportionnel entre 1 & a , ce sera toujours une grandeur égale à $\sqrt[3]{a}$; & dans la progression $\sqrt[6]{}$, il est évident que $\sqrt[6]{a^2}$ est un moyen proportionnel entre 1 & $\sqrt[6]{a^6} = a$; puisque $\sqrt[6]{1} = 1$, $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[6]{a^4}$; ainsi $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$.

Tous les termes de la progression $\sqrt[6]{}$ se trouvent aussi d'une manière équivalente dans la progression $\sqrt[2]{}$ où 6 est multiple de 3. Par exemple, $\sqrt[6]{a}$ étant le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[6]{a^6} = a$ dans la progression $\sqrt[6]{}$, quelque expression que puisse avoir le 1^{er} des deux moyens proportionnels entre 1 & a , ce sera toujours une grandeur égale à $\sqrt[6]{a}$. Or il est évident que dans la progression $\sqrt[2]{}$, le terme $\sqrt[2]{a}$ peut être regardé comme le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[2]{a^2} = a$, puisque $\sqrt[2]{1} = 1$, $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[2]{a^2}$. Par conséquent $\sqrt[6]{a} = \sqrt[2]{a}$.

Ces exemples suffisent pour faire appercevoir clairement

aux lecteurs la vérité de ce raisonnement. Dans une progression dont l'exposant du signe est un nombre multiple de l'exposant du signe d'une autre progression, on peut distinguer tout autant de moyens proportionnels entre 1 & a , & entre toutes les puissances de a prises de suite, dans la première que dans la seconde.

Par exemple, dans la progression $\sqrt[4]{}$, on peut distinguer tout autant de moyens proportionnels entre les termes 1 & a , entre a & a^2 , entre a^2 & a^3 , & ainsi de suite, qu'il y en a entre 1 & a , & a^2 & a^3 , &c. dans la progression $\sqrt[3]{}$; comme aussi on peut distinguer tout autant de moyens proportionnels dans la progression $\sqrt[4]{}$ entre 1 & a , a & a^2 , a^2 & a^3 , &c. qu'il y en a dans la progression $\sqrt[3]{}$, entre 1 & a , a & a^2 , a^2 & a^3 , &c. Car il est évident qu'en prenant dans la progression $\sqrt[4]{}$ le 1^{er} terme, le 4^e, le 7^e terme, le 10^e terme, & ainsi de suite, en laissant deux termes interposés, on aura la progression $\sqrt[3]{}$: $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, &c. dans laquelle il y a un moyen proportionnel entre 1 & a , entre a & a^2 , entre a^2 & a^3 , &c. comme il y a un moyen proportionnel entre 1 & a , entre a & a^2 , &c. dans la progression $\sqrt[3]{}$ qui est $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{a} = a$, $\sqrt[3]{a^2} = a^2$, &c. En comparant de même la progression $\sqrt[4]{}$ avec la progression $\sqrt[5]{}$, on verra qu'en prenant le 1^{er} terme, le 3^e, le 5^e, & ainsi de suite, en laissant un terme interpolé, on aura la progression $\sqrt[3]{}$: $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[3]{a^6} = a^2$, &c. dans laquelle il y a deux moyens proportionnels entre 1 & a , entre a & a^2 , entre a^2 & a^3 , &c. comme il y a deux moyens proportionnels entre 1 & a , entre a & a^2 , entre a^2 & a^3 , &c. dans la progression $\sqrt[5]{}$ qui est $\sqrt[5]{1} = 1$, $\sqrt[5]{a} = a$, $\sqrt[5]{a^2} = a^2$, &c.

Or les grandeurs 1, a , a^2 , &c. étant égales dans les deux progressions que l'on compare, les deux moyens proportionnels de l'une, * sont nécessairement égaux aux moyens correspondans de l'autre.

Par conséquent lorsque l'exposant du signe d'une progression est multiple de l'exposant du signe d'une autre progres-

tion, tous les termes de cette dernière se trouvent d'une manière équivalente parmi les termes de la première. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE IV. ET PROBLÈME V.

450. *QUAND on a une incommensurable comme $\sqrt{12}$; en trouver une expression équivalente, 1^o, avec une signe radical dont l'exposant soit multiple de l'exposant 6 de l'incommensurable donnée, par exemple, avec le signe $\sqrt[12]{}$ avec un signe dont l'exposant soit une a/12 ou son sous multiple de l'exposant du signe donné $\sqrt{}$, par exemple, avec le signe $\sqrt[12]{}$.*

Règle ou Operation pour le premier cas. Il faut diviser l'exposant du signe que l'on demande par l'exposant du signe donné (dans l'exemple, 12 par 6;) le quotient (qui est 2 dans cet exemple) sera l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la grandeur qui est sous le signe donné. C'est à dire, il faut élever la grandeur qui est sous le signe donné à la puissance dont le quotient est l'exposant; écrire au devant le signe radical avec l'exposant qu'on demande, & l'on aura l'expression équivalente qu'on cherchoit. Dans notre exemple il faut élever a^6 à la puissance dont l'exposant fait le quotient 2, & écrire le signe $\sqrt[12]{}$ au devant de cette puissance a^{12} , & l'on aura $\sqrt[12]{a^{12}} = \sqrt{a^6}$. Car comme dans $\sqrt[12]{1} = 1$, $\sqrt[12]{a^{12}} = a$, la grandeur $\sqrt[12]{a^{12}}$ est moyenne proportionnelle entre 1 & a , de même dans $\sqrt[12]{1} = 1$, $\sqrt[12]{a^{12}} = a$, $\sqrt[12]{a^{12}}$ est moyenne proportionnelle entre 1 & a .

Règle en operation pour le second cas. Il faut diviser l'exposant du signe de la grandeur donnée par l'exposant du signe qu'on demande qui en est sous multiple (dans notre exemple, 6 par 2.) Prendre la racine de la grandeur donnée qui est sous le signe donné; en prendre, dis-je, la racine dont l'exposant est le quotient qu'on vient de trouver, (dans notre exemple il faut prendre la racine troisième de a^6 , qui est a ,) & écrire cette racine sous le signe radical qu'on demande, & ce sera l'expression équivalente qu'on cherchoit. Ainsi dans notre exemple on aura $\sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{a^6}$. Car comme $\sqrt[12]{a^6}$ est moyenne proportionnelle entre 1 & a dans $\sqrt[12]{1} = 1$, $\sqrt[12]{a^6} = a$, de même $\sqrt[12]{a}$ est moyenne proportionnelle entre 1 & a dans $\sqrt[12]{1} = 1$, $\sqrt[12]{a} = a$.

DEFINITION.

CETTE réduction d'une expression incommensurable à une autre équivalente qui ait un autre exposant du signe radical, s'appelle la *réduction d'une incommensurable à un signe donné*.

REMARQUE.

451. Si dans le premier cas on vouloit réduire une incommensurable comme $\sqrt[6]{a}$ à un signe donné dont l'exposant ne fût pas multiple de l'exposant 6 de l'incommensurable, comme si on vouloit réduire $\sqrt[6]{a}$ à $\sqrt[3]{}$; on ne le pourroit pas sans introduire un nouveau signe radical. De même on ne sauroit dans le 2^e cas (sans introduire un nouveau signe radical) réduire une incommensurable donnée comme $\sqrt[6]{a}$ à un signe dont l'exposant ne seroit pas sous-multiple de l'exposant de l'incommensurable, par ex. au signe $\sqrt[3]{}$. On ne sauroit pas non plus réduire une incommensurable donnée comme $\sqrt[6]{a}$ à un signe dont l'exposant seroit sous-multiple de l'exposant de l'incommensurable donnée, par exemple, au signe $\sqrt[3]{}$, lorsque l'exposant 3 de la puissance a qui est sous $\sqrt[6]{}$, ne peut pas se diviser exactement par le quotient 2 de l'exposant 6 de $\sqrt[6]{}$, divisé par 3 exposant de $\sqrt[3]{}$, ainsi on ne peut pas réduire $\sqrt[6]{a}$ au sign. $\sqrt[3]{}$; mais on pourroit réduire $\sqrt[6]{a}$ au signe $\sqrt[3]{}$, parceque le quotient 2 de 6, exposant de $\sqrt[6]{}$, divisé par 3, exposant de $\sqrt[3]{}$, divisant exactement 4 exposant de a , on peut extraire la racine 2^e exacte de a qui est a^2 , & l'on auroit $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$.

COROLLAIRE V. ET PROBLÈME VL

452. **RÉDUIRE** deux incommensurables qui ont différents signes radicaux à avoir le même signe radical (c'est à dire à avoir le même exposant de leur signe radical) sans en changer la valeur.

1. Cas. Quand l'exposant du signe de l'une des deux incommensurables contient exactement l'exposant du signe de l'autre, il ne faut rien changer dans la première, mais
 453. seulement réduire la dernière au signe de la première par le Problème précédent.

Par exemple, pour réduire $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[6]{a^2}$ à un même signe, il faut élever la grandeur a de $\sqrt[3]{a}$ à la puissance 3 dont l'exposant 3 est le quotient de l'exposant 6 de $\sqrt[6]{a^2}$, divisé par 2, exposant de $\sqrt[3]{a}$, & écrire au devant de cette puissance a^3 le signe $\sqrt[3]{a}$, & l'on aura $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a}$; & les incommensurables $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[6]{a^2}$ seront réduites à un même signe.

De même, pour réduire $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$, j'éleve la grandeur 2 de $\sqrt[3]{2}$ à la 2^e puissance marquée par le quotient 2 de 6 exposant de $\sqrt[6]{20}$, divisé par 3 exposant de $\sqrt[3]{2}$, & j'écris devant 4, qui est la 2^e puissance de 2, le signe $\sqrt[3]{a}$, & je trouve $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2}$. Ainsi $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[6]{20}$ sont réduites au même signe.

On réduira de même $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[n]{a^m}$ au même signe, en changeant seulement $\sqrt[m]{a^n}$ en son équivalente $\sqrt[n]{a^{mn}}$.

Remarque sur ce premier cas.

LORSQU'IL arrive que la grandeur qui est sous le signe le plus élevé, est une puissance parfaite qui a pour exposant le quotient de l'exposant du plus grand signe radical divisé par l'exposant du moindre, il faut extraire cette racine qui sera exacte, & écrire au devant le moindre signe radical; & dans ce cas l'incommensurable du plus grand signe radical sera réduite au moindre signe radical.

Par exemple, s'il faut réduire $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[6]{a^2}$ au même signe, il ne faut rien changer dans $\sqrt[3]{a}$, mais réduire $\sqrt[6]{a^2}$ au signe $\sqrt[3]{a}$, en tirant la racine 2^e de a^2 qui est a , (parceque 6 divisé par 3 donne 2 pour quotient;) & l'on aura $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}$; & $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[6]{a^2}$ seront réduites au même signe $\sqrt[3]{a}$.

Si l'on avoit $\sqrt[m]{a}$ & $\sqrt[n]{b^m}$ à réduire au même signe, il faudroit simplement réduire $\sqrt[n]{b^m}$ à son équivalente $\sqrt[m]{b}$. * 454

Si l'on avoit encore $\sqrt[m]{a^n}$ & $\sqrt[n]{a^m}$, il faudroit réduire $\sqrt[m]{a^n}$ à son équivalente $\sqrt[n]{a^m}$.

2. *Cas du 6^e Problème.* Si les exposans des signes radicaux sont premiers, il faut les multiplier l'un par l'autre, & leur pro-

- duit sera l'exposant du signe radical auquel il faut réduire chaque incommensurable par * le Problème 5°.

Par exemple, pour réduire $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[4]{3}$ à un même signe, il faut prendre le produit $2 \times 3 = 6$, élever $\sqrt[3]{2}$ & $\sqrt[4]{3}$ chacune au signe 6; savoir $\sqrt[3]{2}$, en élevant 2 à la puissance 3^e qui est 8 (parceque 6 exposant de $\sqrt[3]{}$ divisé par 2 exposant de $\sqrt[3]{}$, donne 3 pour quotient) & $\sqrt[4]{3}$, en élevant 3 à la 2^e puissance qui est 9 (parceque 6 exposant de $\sqrt[4]{}$ divisé par 3 exposant de $\sqrt[4]{}$, donne 2 pour quotient.) Enfin il faut écrire $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{9}$ qui seront équivalentes à $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$.

On réduira de même $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[4]{b}$ au même signe $\sqrt[6]{}$, en écrivant $\sqrt[6]{a^8} = \sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[6]{b^9} = \sqrt[4]{b}$.

On réduira de même $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[4]{b}$ au même signe, en réduisant $\sqrt[3]{a}$ à son équivalente $\sqrt[6]{a^8}$, & $\sqrt[4]{b}$ à son équivalente $\sqrt[6]{b^9}$.

3. Cas Lorsque les exposans des deux signes radicaux ne sont pas premiers entr'eux, il faut chercher * le moindre nombre dont ils sont des diviseurs exacts, & ce nombre sera l'exposant du signe radical auquel il faut réduire les deux incommensurables proposées.

- Par exemple, pour réduire au même signe les incommensurables $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[4]{b}$, il faut chercher le moindre nombre 12 qui a pour diviseurs 4 & 6. Il faut ensuite réduire * $\sqrt[3]{a}$ & $\sqrt[4]{b}$ chacune au signe $\sqrt[12]{}$; & l'on trouvera $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[12]{b^6} = \sqrt[4]{b}$.

- Ce Problème n'a pas besoin de démonstration étant une suite évidente du précédent *.

REMARQUES.

I.

453. CETTE réduction des incommensurables à un même signe est nécessaire pour opérer sur les incommensurables; car on ne peut les ajouter les unes aux autres, les soustraire les unes des autres, les multiplier & les diviser les unes par les autres qu'après les avoir réduites à un même signe. Elle sert aussi à connoître de deux incommensurables qui ont différens signes, celle qui est plus grande que l'autre, ce qui est

quelquefois nécessaire. Car étant réduites au même signe, & s'il y a des grandeurs hors du signe, ces grandeurs étant mises sous le signe, on voit aisément * quelle est la plus grande.

2.

454. Quand deux incommensurables de différens signes sont réduites chacune à leur plus simple expression, & qu'elles ont quelque grandeur commensurable hors du signe; il faut en les réduisant au même signe ne rien changer dans les grandeurs qui sont hors du signe.

Par exemple, pour réduire $3\sqrt{2}$ & $4\sqrt{5}$ au même signe $\sqrt{}$, il faut écrire $3\sqrt{8} = 3\sqrt{2}$, & $4\sqrt{25} = 4\sqrt{5}$. De même pour réduire $a\sqrt{b}$ & $c\sqrt{d}$ au même signe $\sqrt{}$, il faut écrire $a\sqrt{b} = a\sqrt{b}$ & $c\sqrt{d} = c\sqrt{d}$. Car il est évident que $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ & $c\sqrt{d} = \sqrt{c^2d}$, & de même que $c\sqrt{d} = \sqrt{c^2d} = \sqrt{c^2d} = \sqrt{c^2d}$.

COROLLAIRE VI. ET PROBLÈME VII.

455. **EXTRAIRE** la racine quelconque, dont l'exposant est un nombre donné, d'une incommensurable. Par exemple, extraire la racine 2^e de \sqrt{a}

Règle ou Operation. Il faut multiplier l'exposant du signe radical de l'incommensurable proposée par l'exposant de la racine qu'on cherche, le produit sera l'exposant du signe radical de la racine qu'on cherche, sous lequel il faudra écrire la grandeur proposée sans autre signe radical, & ce sera la racine qu'on demande.

Par exemple, pour trouver la racine 2^e de \sqrt{a} , je prens le produit 6 de 2 par 3, & j'écris $\sqrt[6]{a}$ pour la racine 2^e de \sqrt{a} .

Pour extraire la racine 3^e de $\sqrt{10}$, il faut prendre le produit $3 \times 5 = 15$, & écrire $\sqrt[15]{10}$ pour la racine 3^e de $\sqrt{10}$.

De même pour trouver la racine n de \sqrt{a} , il faut prendre le produit np & écrire $\sqrt[np]{a}$ pour la racine n de \sqrt{a} .

REMARQUE.

456. **LORSQUE** l'incommensurable dont on cherche la racine contient sous le signe une puissance parfaite dont l'exposant

est celui de la racine qu'on cherche, comme si on vouloit extraire la racine 3^e de $\sqrt[3]{a^3}$; dans ce cas il faut seulement extraire la racine qu'on demande de la puissance qui est sous le signe, & étirer cette racine sous le même signe radical sans changer son exposant, & ce sera la racine qu'on cherche. Ainsi la racine 3^e de $\sqrt[3]{a^3}$ est $\sqrt[3]{a}$, puisque $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}$

*446. = $\sqrt[3]{a^3}$. De même la racine n de $\sqrt[n]{a^n}$ est $\sqrt[n]{a}$.

Démonstration du problème. La racine d'une puissance tant commensurable qu'incommensurable, est le premier d'autant de moyens proportionnels entre l'unité & cette puissance, qu'il y a d'unités moins une dans l'exposant de la racine. Ainsi dans la progression $\div 1 . a . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . \&c.$ qui peut représenter les puissances d'une grandeur a commensurable ou incommensurable prises de suite depuis l'unité, puisque ces puissances se forment de la même manière en multipliant continuellement la grandeur a par elle-même; dans cette progression, dis-je, la racine 2^e a de a^2 est le moyen proportionnel entre 1 & a^2 . La racine 3^e a de a^3 est le premier des deux moyens proportionnels entre 1 & a^3 ; & ainsi de suite.

Or le Problème fait découvrir pour la racine qu'on cherche, le premier d'autant de moyens proportionnels entre 1 & la puissance incommensurable proposée qu'il y a d'unités moins une dans l'exposant de la racine qu'on cherche, qui est le même que celui de la puissance proposée. (Quand on cherche la racine 2^e, 3^e, 4^e, 5^e &c. d'une grandeur commensurable ou incommensurable, on considère cette grandeur comme une puissance 1^e, 3^e, 4^e, 5^e, &c. de la racine qu'on cherche.) Car en cherchant, par exemple, la racine 3^e de $\sqrt[3]{a}$, on trouve par le Problème $\sqrt[3]{a}$; & il est évident

*450. que dans $\div \sqrt[3]{a} = 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a}$. Le terme $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a}$, & que $\sqrt[3]{a}$ est le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[3]{a}$ qui est la puissance 3^e de $\sqrt[3]{a}$. De même, dans le

*456. cas * de la remarque, la racine 3^e de $\sqrt[3]{a^3}$ qu'on trouve être $\sqrt[3]{a}$, est le premier de deux moyens proportionnels entre 1 & $\sqrt[3]{a}$, comme on le voit clairement dans la progression $\div \sqrt[3]{a} = 1 . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{a}$. Il est évident que cela convient à tous les autres exemples.

Le Problème fait donc découvrir la racine que l'on cherche. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE VII.

457. IL suit du Problème précédent que quand une incommensurable est précédée de plusieurs signes radicaux comme $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$, on peut les réduire à un seul signe radical, en prenant le produit des exposans de tous les signes radicaux, & écrivant ce produit sur ce signe radical. Ainsi $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$, $= \sqrt[3]{a}$. De même $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}^{-1} = \sqrt[12]{a^{-1}}$. Si l'on avoit $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2}}$, on pourroit la réduire à $\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$. Si l'on avoit cette expression $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^2}}$, on la réduiroit d'abord à $\sqrt[12]{a^5}$, (* en faisant passer * dans $\sqrt[4]{a^2}$, a qui est hors du signe $\sqrt[3]{}$ sous ce signe $\sqrt[3]{}$,) & en faisant ensuite passer a^5 sous le signe $\sqrt[3]{}$, on auroit $\sqrt[3]{a^5}$, qu'on réduiroit enfin au seul signe $\sqrt[3]{a^5}$ qu'on pourroit encore réduire * à la plus simple expression $a\sqrt[3]{a^2}$.

En general on réduira $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{b^2}\sqrt[5]{c^3}}$ au seul signe $\sqrt[60]{a^{15}b^{30}c^{36}}$.

REMARQUE.

458. LE calcul des grandeurs étant le moyen le plus simple & le plus facile de découvrir tout ce qu'on peut désirer de sçavoir dans les Mathématiques; on doit prendre garde, afin que ce moyen soit aussi très sur, de ne pas employer des expressions de grandeurs qui soient équivoques. C'est pourquoi il est bon de faire ici remarquer aux Commenceans que quand il y a plusieurs signes radicaux joints ensemble, comme le font des multiplicateurs dans un produit; cette expression peut marquer deux choses, 1^{re}, quand ils sont joints de cette maniere $\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[5]{c}$, cela marque une multiplication, c'est à dire, cela marque que les trois incommensurables $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[5]{c}$, sont multipliées les unes par les autres. Dans ce cas, pour réduire ce produit qui contient trois signes radicaux à un seul signe radical, il faut se servir de la methode de l'art. 452. On réduira par cette methode $\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[5]{c}$ à $\sqrt[60]{a^{15}b^{30}c^{36}}$, & le

Ecc

402 LA SCIENCE DU CALCUL, &c.
 produit $\sqrt[n]{a/b/c}$ sera déjà réduit à $\sqrt[n]{a^m b^m c}$, qu'on réduira
 enfin à $\sqrt[n]{a^{mn} b^{mn} c^{mn}}$.

2°. Quand les signes radicaux sont joints de façon qu'il
 y a des lignes droites tirées du haut des signes radicaux les
 plus à gauche, lesquelles lignes couvrent toutes les gran-
 deurs qui sont le plus à droite; cela marque non une multi-
 plication comme dans l'expression précédente, mais une
 extraction de racines, comme on le voit dans cette expres-
 sion $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}\sqrt[p]{c}}$; c'est à dire, cette expression marque l'ex-
 traction de la racine, dont l'exposant est m , de la grandeur
 $a\sqrt[m]{b}\sqrt[p]{c}$; & cette dernière expression exprime le produit de
 la grandeur a par la racine n de la grandeur $b\sqrt[p]{c}$.

Pour réduire cette expression qui contient trois signes ra-
 dicaux à un seul signe radical, on pourra commencer par la
 grandeur la plus à droite $b\sqrt[p]{c}$, & on fera passer b sous le
 * 430. signe $\sqrt[p]{c}$, * ce qui donnera $\sqrt[p]{b^p c}$, & l'on aura déjà $a\sqrt[n]{b\sqrt[p]{c}}$
 * 430. = * $a\sqrt[n]{\sqrt[p]{b^p c}}$ = * $a\sqrt[n]{b^{p/n} c^{p/n}}$. On fera ensuite passer * a
 * 430. sous le signe $\sqrt[n]{}$, & l'on aura $a\sqrt[n]{b^{p/n} c^{p/n}}$ = $\sqrt[n]{a^{n/p} b^{p/n} c^{p/n}}$, &
 * 430. $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}\sqrt[p]{c}}$ = $\sqrt[n]{a^{mn} b^{mn} c^{mn}}$ = * $\sqrt[n]{a^{mn} b^{mn} c^{mn}}$.

Enfin, quand plusieurs signes radicaux sont joints, & qu'il
 n'y a de grandeur que sous le signe radical le plus vers la
 droite, comme dans cette expression $\sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}$, cela ne mar-
 que qu'une extraction de racines, & cette expression signifie
 la racine 2° de la racine 3° de la racine 4° de la grandeur a , &
 en la réduira à $\sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{a}$ par le Problème de l'art 455.
 Dans ce cas, il n'y auroit aucune équivoque quand on ne ti-
 reroit pas des lignes des signes radicaux les plus à gauche sur
 ceux qui sont plus à droite.

PROBLÈME VIII.

459. *AVANT* une expression qui contient une incommensurable,
 la changer en différentes expressions toutes équivalentes, c'est
 à dire, qui auront la même valeur.

Les différentes expressions équivalentes d'une même grandeur qui contient une incommensurable, sont de grand usage dans l'Analyse & dans la résolution des Problèmes des Mathématiques. Voici les principales méthodes de trouver ces différentes expressions équivalentes.

La 1^{re} manière est celle de * réduire une incommensurable * 419.
à sa plus simple expression. On prépare par là les incommensurables à être plus facilement ajoutées les unes aux autres, & à être retranchées les unes des autres. Car étant ainsi réduites; on ajoute ensemble ou on retranche les unes des autres celles qui sont commensurables entr'elles, comme si c'étoient des grandeurs commensurables; car $a\sqrt{b}$ & $2a\sqrt{b}$ ajoutées ensemble font $3a\sqrt{b}$, & $a\sqrt{b}$ étant retranchée de $2a\sqrt{b}$, la différence est $a\sqrt{b}$. Quand elles sont incommensurables on les ajoute en les joignant simplement avec leurs signes + ou —, & on les retranche les unes des autres, en joignant celles qui doivent être retranchées par des signes opposés à celles dont elles doivent être retranchées.

La 2^e manière est celle de réduire * sous le signe les gran- * 430.
deurs qui sont hors du signe: ce changement est d'usage en plusieurs rencontres.

La 3^e manière est celle de donner à une incommensurable un signe radical * dont l'exposant soit multiple ou sous-mul- * 450.
tiple de celui qu'elle a. Cette manière sert à préparer les incommensurables au calcul, en réduisant au même signe celles qui doivent entrer dans un même calcul.

On a déjà expliqué les manières précédentes, en voici d'autres utiles.

460. La 4^e manière consiste à multiplier ou à diviser le numérateur & le dénominateur de l'expression qui contient une incommensurable par l'incommensurable même, ou par une autre grandeur; ce qui est cause * que la grandeur conserve * 71 &
toujours la même valeur sous différentes expressions. 109.

EXEMPLES.

POUR réduire $\frac{2a}{b\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$ à d'autres expressions équivalentes, on la changera d'abord en * $\frac{2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}}{b\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$. Ensuite on divisera * 412.
le numérateur & le dénominateur par $\sqrt[3]{a}$, & l'on aura
Ecc ij

$\frac{2\sqrt[3]{a}}{b\sqrt[3]{\frac{1}{b}}}$, & en faisant la division marquée par $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\frac{1}{b}}}$, on trouve le quotient $\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[3]{1}}$, ce qui donnera $\frac{2\sqrt[3]{ac}}{b\sqrt[3]{1}} = \frac{2\sqrt[3]{ac}}{b}$, parce que $\sqrt[3]{1} = 1$, & $1b = b$.

Pour réduire $ax\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}}$ à une expression équivalente dans laquelle le seul dénominateur contienne une incommensurable, il faut multiplier le numérateur & le dénominateur par $\sqrt[3]{x+a}$, & l'on aura $\frac{ax \times \sqrt[3]{x+a}}{\sqrt[3]{x-a} \times \sqrt[3]{x+a}} = ax\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}}$.

Si l'on veut que l'incommensurable soit au numérateur, il faut multiplier par $\sqrt[3]{x-a}$, & l'on aura $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \sqrt[3]{x-a}$.

Si l'on avoit $\frac{2ax - x^2}{\sqrt[3]{2ax - x^2}}$, on pourroit la rendre plus simple en divisant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt[3]{2ax - x^2}$, & l'on auroit $\sqrt[3]{2ax - x^2} = \frac{2ax - x^2}{\sqrt[3]{2ax - x^2}}$; car

$$\begin{aligned} \bullet 451. \frac{2ax - x^2}{\sqrt[3]{2ax - x^2}} &= * \frac{\sqrt[3]{2ax - x^2} \times \sqrt[3]{2ax - x^2}}{\sqrt[3]{2ax - x^2}} = * \sqrt[3]{2ax - x^2} \\ \bullet 109. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si l'on avoit } \frac{\sqrt[3]{2ax - x^2}}{2ax - x^2}; \text{ on trouveroit } \sqrt[3]{2ax - x^2} &= \\ \frac{\sqrt[3]{2ax - x^2}}{2ax - x^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x-a}}{\sqrt[3]{x-a}} \end{aligned}$$

Si l'on a $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x-a}}$ à réduire à une expression qui soit plus simple; il n'y a qu'à effacer le diviseur $\sqrt[3]{a}$ du numérateur & du dénominateur qui sont chacun une fraction, &

$$\bullet 109. \text{ l'on aura l'expression équivalente } * \frac{\sqrt[3]{x+a}}{\sqrt[3]{x-a}}.$$

REMARQUE.

ON voit clairement par les exemples précédens comment on peut faire passer une incommensurable du numérateur au dénominateur, ou du dénominateur au numérateur, sans changer la valeur de l'expression. Les Commensurans doivent

faire attention que toute grandeur entiere peut être regardée comme une fraction dont le dénominateur est l'unité, & que quand la grandeur est entiere comme $x\sqrt{x^2 - a^2}$, pour faire passer l'incommensurable au dénominateur, il faut concevoir $x\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{1}$, & multiplier le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{x^2 - a^2}$, & l'on aura $\frac{x^2 - a^2 x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = x\sqrt{x^2 - a^2}$.

Cette maniere de réduire une grandeur qui contient une incommensurable à des expressions équivalentes, en multipliant ou divisant le numérateur & le dénominateur par une même grandeur ou par des grandeurs égales, sert aussi à faire en sorte qu'il se trouve sous le signe quelque grandeur commensurable qu'on puisse tirer hors du signe, ce qui peut faire changer l'expression en beaucoup de formes qui peuvent être utiles dans l'analyse, ce que l'on va faire voir par des exemples simples & généraux.

On ne sauroit tirer aucune grandeur commensurable hors du signe dans $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ supposé qu'on ait besoin de rendre le numérateur commensurable, il n'y a qu'à multiplier le numérateur & le dénominateur par $\sqrt[n]{a^{n-1}}$, & l'on aura $\sqrt[n]{\frac{a^{n-1} \cdot a}{a^{n-1} \cdot b}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{n-1}b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

Si c'est le dénominateur qu'on veuille rendre commensurable, il faut multiplier par $\sqrt[n]{b^{n-1}}$, & l'on aura $\sqrt[n]{\frac{a^{n-1} \cdot a}{b^{n-1} \cdot b}} = \sqrt[n]{\frac{a^{n-1}}{b^n}}$.

On peut même tirer hors du signe d'une incommensurable telle grandeur qu'on voudra, & qui soit au numérateur ou au dénominateur, quoique l'incommensurable n'ait pour dénominateur ou pour numérateur que l'unité. Par exemple, si l'on veut tirer hors du signe de l'incommensurable $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ la grandeur donnée b , & qu'elle soit au numérateur ou au dénominateur, il faut multiplier le numérateur & le dénominateur par $\sqrt[n]{b^n}$, & l'on aura $\frac{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b^n}}{\sqrt[n]{b^n}} = b\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \sqrt[n]{\frac{ab^n}{b^n}}$.

Ecc ij

On voudroit que $\sqrt[3]{2}$ eût hors du signe $\frac{1}{2}$ ou 2, il faut multiplier le numérateur & le dénominateur par $\sqrt[3]{4}$, & l'on aura $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

REMARQUE.

LES exemples qu'on a donnez de la 4^e maniere suffisent pour faire voir comment on peut changer l'expression d'une incommensurable en une infinité d'autres équivalentes en multipliant son numérateur & son dénominateur par une même grandeur.

Voici une 5^e maniere de trouver des expressions équivalentes d'une même incommensurable qui a une grandeur sous le signe & une grandeur hors du signe; (quand il n'y a pas de grandeur hors du signe, l'unité peut toujours être regardée comme la grandeur hors du signe, $\sqrt[3]{4} = 1\sqrt[3]{4}$.) Cette 5^e maniere n'est que la quatrième exprimée d'une autre façon, & elle est d'usage dans le calcul des puissances par les exposans, (qu'on rendra general dans la suite,) pour donner différentes formes à une grandeur dont une partie est hors du signe, & l'autre sous le signe, sans en changer la valeur.

361. Cette 5^e maniere consiste à multiplier la grandeur qui est hors du signe, & à diviser en même temps la grandeur qui est sous le signe par une même grandeur; ou bien à diviser la grandeur qui est hors du signe, & à multiplier en même temps celle qui est sous le signe, par une même grandeur. Il est évident que cela n'en doit point changer la valeur, & que par cette operation on multiplie le numérateur & le dénominateur par une même grandeur; car $a \times \frac{1}{2} = ac \times \frac{c}{2}$, comme aussi $\frac{1}{2} \times b = \frac{c}{2} \times bc$.

EXEMPLES.

- E**N multipliant dans $x^4 \sqrt[3]{ax^2}$, x^4 par x^2 , & en divisant en même temps $\sqrt[3]{ax^2}$ par x^2 réduite à $\sqrt[3]{x^6} = x^2$, on changera $x^4 \sqrt[3]{ax^2}$ en $x^{4+2} \frac{\sqrt[3]{ax^2}}{\sqrt[3]{x^6}} = x^6 \sqrt[3]{ax^2}$ qui est équivalente à $x^4 \sqrt[3]{ax^2}$.

En multipliant dans $x^4 \times \frac{x}{\sqrt[3]{ax^2}}$, x^4 par x^2 , en divisant

$\frac{1}{\sqrt[3]{ax^3}}$ par $\sqrt[3]{x^3} = x$ on la changera en $x^{4+3} \times \frac{\sqrt[3]{ax^3}}{\sqrt[3]{x^3}} = x^7 \times$

$\frac{1}{\sqrt[3]{ax^3} \times \sqrt[3]{x^4}} = x^6 \times \frac{1}{\sqrt[3]{ax^7}}$ qui est équivalente à $x^6 \times \frac{1}{\sqrt[3]{ax^3}}$.

En divisant dans $\frac{1}{3ax^3+4x^4} \times \sqrt[3]{ax^3+x^2}$, ce qui est hors du signe par x ; & multipliant en même temps par $\sqrt[3]{x^3} = x$, ce qui est sous le signe, on la changera en $\frac{1}{3ax^2+4x^3} \times \sqrt[3]{ax+x^3} \times \sqrt[3]{x^3} = \frac{1}{3ax^2+4x^3} \times \sqrt[3]{ax^3+x^2}$.

D'où l'on voit qu'en general on peut faire les changemens suivans dans toutes les incommensurables qui peuvent être représentées par $gx^n = \sqrt[3]{ax + bx^n + cx^n}$ &c. sans en changer la valeur 1°. On peut multiplier gx^n par x élevée à telle puissance qu'on voudra, comme par x^3 , & diviser en même temps la partie qui est sous le signe par $\sqrt[3]{x^3} = x$, & l'on aura $gx^{n+3} \times \frac{\sqrt[3]{ax + bx^n + cx^n}}{\sqrt[3]{x^3}}$ &c. qui deviendra, en

* 149. faisant la division par le moyen des exposans, $*gx^{n+3} \times \frac{\sqrt[3]{ax^{n+3} + bx^{n+3} + cx^{n+3}}}{\sqrt[3]{x^{n+3}}} = &c.$

& qu'on pourra aussi écrire de cette manière $*gx^{n+3} \times$ * 153.

440. $\frac{ax^{n+3} + bx^{n+3} + cx^{n+3}}{ax^{n+3} + bx^{n+3} + cx^{n+3}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^{n+3}}} &c.$

Si l'on veut représenter l'exposant rompu $\frac{1}{p}$ par une lettre r , en supposant $r = \frac{1}{p}$, on trouvera en multipliant chacune de ces grandeurs égales par p , $pr = 1$, & en divisant chaque membre de cette dernière égalité par r , on aura $p = \frac{1}{r}$. En substituant dans l'expression précédente r à la place de $\frac{1}{p}$, & $\frac{1}{r}$ à la place de p , elle deviendra, sans changer de valeur,

$gx^{n+1} \times \frac{ax^{n-\frac{1}{p}} + bx^{n-\frac{1}{p}} + cx^{n-\frac{1}{p}}}{\sqrt[3]{x^{n-\frac{1}{p}}}} &c.$

On peut aussi diviser gx^n par x^3 , & multiplier ce qui est sous le signe par $\sqrt[3]{x^3} = x$, & l'on aura $gx^{n-3} \times \sqrt[3]{ax + bx^3 + cx^3} \times \sqrt[3]{x^3}$ qui deviendra, en faisant la multiplication par le moyen des exposans, $*gx^{n-3} \times \sqrt[3]{ax^3 + bx^{3+3} + cx^{3+3}} = &c.$ * 148 &c.

qu'on pourra aussi écrire de cette manière $gx^{n-3} \times$

$\frac{ax^{3+n-3} + bx^{3+n-3} + cx^{3+n-3}}{\sqrt[3]{x^{3+n-3}}} &c.$ En supposant comme ci-

dessus $r = \frac{1}{p}$, d'où l'on déduira $p = \frac{1}{r}$; & en substituant dans l'expression précédente r à la place de $\frac{1}{p}$; & $\frac{1}{p}$ à la place de p ; elle deviendra, sans changer de valeur,

$$gx^{n-1} \times ax^{1+\frac{1}{p}} + bx^{n+\frac{1}{p}} + cx^{n+\frac{1}{p}} + \&c.$$

2°. On peut faire en sorte que, dans la grandeur complexe qui est sous le signe, le premier terme ax demeure sans x , c'est à dire, devienne simplement a ; ou que le dernier terme cx^n devienne sans x^n ou soit simplement c .

Pour faire que a demeure seule sans x , il faut diviser ce qui est sous le signe par $\sqrt[p]{x}$, & multiplier en même temps ce qui est hors du signe par $\sqrt[p]{x}$, & l'on aura $gx^n \times \sqrt[p]{x} \times$

$$^{*149} \& \frac{\sqrt[p]{ax + bx^{n+1} + cx^{n+1}}}{\sqrt[p]{x}} = ^{*}gx^n \sqrt[p]{x} \times \sqrt[p]{a + bx^{n-1} + cx^{n-1}} \text{ qui devien-}$$

440.

dra (en se servant de l'expression des exposans au lieu des signes)
 $gx^{n+\frac{1}{p}} \times a + bx^{n-1+\frac{1}{p}} + cx^{n-1+\frac{1}{p}} + \&c.$ (en supposant $r = \frac{1}{p}$)
 $gx^{n+\frac{1}{p}} \times a + bx^{n-1+\frac{1}{p}} + cx^{n-1+\frac{1}{p}} + \&c.$ où l'on voit que le terme a sous le signe, n'a plus x , & cependant l'expression est équivalente à $gx^n \sqrt[p]{ax + bx^{n+1} + cx^{n+1}}$.

Pour faire en sorte que ce soit le terme cx^n sous le signe, qui devienne c sans x^n , il faut diviser la grandeur qui est sous le signe par $\sqrt[p]{x^n}$, & multiplier en même temps par $\sqrt[p]{x^n}$ celle qui est hors du signe, & l'on trouvera $gx^n \times \sqrt[p]{x^n} \times$

$$^{*149} \& \frac{\sqrt[p]{ax + bx^{n+1} + cx^{n+1}}}{\sqrt[p]{x^n}} = ^{*}gx^n \sqrt[p]{x^n} \times \sqrt[p]{ax^{-1-n} + bx^{n-1-n} + cx^{n-n}}$$

440.

$^{*153} =$ (* en se servant de l'expression des exposans sans les signes radicaux) $gx^{n+\frac{n}{p}} \times c + bx^{-n+\frac{n}{p}} + ax^{-1-n+\frac{n}{p}} + \&c.$ (en supposant $r = \frac{1}{p}$) $gx^{n+\frac{n}{p}} \times c + bx^{-n+\frac{n}{p}} + ax^{-1-n+\frac{n}{p}} + \&c.$ le terme cx^n est devenu c sans x^n , & cette expression est équivalente à la proposée.

DEFINITION.

DÉFINITION.

462. UNE suite de plusieurs grandeurs incommensurables dont les signes radicaux ont le même exposant jointes par les signes $+$ & $-$, comme $a + \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d}$, &c. sera nommée *une suite d'incommensurables*: on la distingue par termes, chaque incommensurable fait un terme; quand il y a une ou plusieurs grandeurs commensurables, comme dans $a + f - \sqrt{b} + \sqrt{c}$, toutes les commensurables $a + f$ ne font qu'un seul terme; & s'il y avoit des grandeurs incommensurables qui fussent commensurables entr'elles, elles ne feroient aussi qu'un seul terme; ainsi la suite $a + f - \sqrt{b} + \sqrt{a^2b}$ ne contient que deux termes, $a + f$ n'en faisant qu'un, & $-\sqrt{b} + a\sqrt{b}$ n'en faisant aussi qu'un seul qui est $a - 1 \times \sqrt{b}$.

Quand une de ces suites a deux termes, on l'appelle *un binôme*; si elle en a trois, *un trinôme*, &c.

On donne ici à ces sommes d'incommensurables le nom de *suites* pour les distinguer des *incommensurables complexes*, comme $\sqrt{a + bx^2 + cx^3} + \&c.$ parceque le calcul de ces dernières est le même que le calcul des incommensurables incomplexes \sqrt{a} , \sqrt{b} , &c. qu'on a expliqué jusqu'ici.

On fera pourtant distinguer de deux sortes d'incommensurables complexes. Les unes, comme $\sqrt{a + bx + dx^2}$, ne contiennent sous le signe que des grandeurs commensurables, les autres ont sous le même signe parmi leurs termes des incommensurables, comme $\sqrt{a + \sqrt{a} + b}$. Le calcul de ces dernières a du rapport avec le calcul des *suites d'incommensurables* qu'on va expliquer; c'est pourquoi on a différé jusqu'ici d'en donner des exemples.

SECTION VII.

Où l'on explique le calcul des suites d'incommensurables.

L'Addition & la Soustraction.

PROBLÈME I.

463. *AJOUTER une suite d'incommensurables à une autre, ou la retrancher d'une autre. On suppose que tous les signes radicaux dans l'une & l'autre ont le même exposant.*

Règle ou Operation. On les écrira d'abord l'une sous l'autre, observant quand il y a des termes incommensurables dans l'une & l'autre, qui sont commensurables entr'eux, de les écrire les uns sous les autres, * les ayant réduits auparavant à la plus simple expression. On ajoutera ensuite les termes commensurables entr'eux comme si c'étoient des grandeurs commensurables, & on joindra tous les autres les uns aux autres avec leur signe, & l'on aura leur somme.

La soustraction se fera en ôtant les termes de la suite à retrancher, des termes de l'autre suite qui leur sont commensurables quand il y en a, comme dans la soustraction des grandeurs commensurables, & on ôtera les autres termes en les joignant par des signes + & — opposés aux leur, aux termes de la suite dont on doit faire la soustraction.

EXEMPLES.

ADDITION.

$$a + 2\sqrt{ab} + 3\sqrt{ac}$$

$$b - \sqrt{ab} + 5\sqrt{ac}$$

Somme $a+b + \sqrt{ab} + 8\sqrt{ac}$.

SOUSTRACTION.

$$a + 2\sqrt{ab} + 3\sqrt{ac}$$

$$b - \sqrt{ab} + 5\sqrt{ac}$$

Difference $a-b + 3\sqrt{ab} - 2\sqrt{ac}$

ADDITION.

$$3a + 5b \times x\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + 3\sqrt{a-y}$$

$$+ 2b \times \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 2\sqrt{a+y}$$

Somme $3a + 7b \times x\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + 3\sqrt{a-y} - 2\sqrt{a+y}$

SOUSTRACTION.

$$\begin{array}{r} 3a + 3bx \sqrt[3]{a+bx} + 3\sqrt[3]{a-bx} \\ + 2bx \sqrt[3]{\frac{a-bx}{a+bx}} - 2\sqrt[3]{a+bx} \end{array}$$

$$\text{Différence } 3a + 3bx \sqrt[3]{\frac{a-bx}{a+bx}} + 3\sqrt[3]{a-bx} + 2\sqrt[3]{a+bx}.$$

Pour les incommensurables complexes qui ont sous leurs signes d'autres incommensurables.

464. **P**OUR faire voir clairement que ces sortes d'incommensurables complexes peuvent quelquefois se réduire à une plus simple expression, on fera remarquer que quand on veut multiplier $\sqrt[3]{a+bx}$ par x , (on trouve d'abord $x\sqrt[3]{a+bx}$) & l'on fait passer le multiplicateur x réduit à $\sqrt[3]{x^3}$ sous le signe de $\sqrt[3]{a+bx}$, * en multipliant $a+bx$ par x^3 , & l'on trouve * 428. $\sqrt[3]{ax^3+bx^{3+1}}$. On multiplie de même $\sqrt[3]{a+bx}$ par x^2 (ce qui donne d'abord $x^2\sqrt[3]{a+bx}$) & l'on fait passer x^2 réduit à $\sqrt[3]{x^6}$ sous le signe, en multipliant $a+bx$ par x^6 , & on trouve $\sqrt[3]{ax^6+bx^{6+1}}$.

Cet exemple $\sqrt[3]{ax^3+bx^6}$ (qui représente en general toutes les incommensurables complexes semblables) fait voir évidemment que quand une grandeur x^n , qui multiplie tous les termes de la grandeur complexe qui est sous le signe radical, est elle-même une puissance parfaite dont l'exposant n est celui du signe sous lequel est la grandeur complexe, on peut alors faire passer hors du signe la racine x de cette puissance parfaite x^n , & l'on a $\sqrt[3]{ax^3+bx^6}$ réduite à la plus simple expression $x\sqrt[3]{a+bx}$.

Cela montre que pour réduire $\sqrt[3]{a^3b+c^3d}$ à la plus simple expression, il faut écrire $a\sqrt[3]{b}+c\sqrt[3]{d}$.

Pour réduire $\sqrt[3]{b^3c+d^3d}$ à la plus simple expression, il faut d'abord réduire $\sqrt[3]{b^3c^3d}$ à la plus simple expression b^3c^3d , & l'on a $\sqrt[3]{b^3c^3+d^3d}$, qu'on réduit ensuite à la plus simple expression $b\sqrt[3]{c}+d\sqrt[3]{d}$.

De même pour réduire $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{32}$ à sa plus simple expression, il faut commencer par réduire $\sqrt[3]{32}$ à $4\sqrt[3]{2}$, & l'on a $\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{2}$ qu'on réduit enfin à $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$.

Il suit de là que si deux incommensurables complexes de cette sorte, étant réduites à leur plus simple expression, contiennent sous le signe les mêmes grandeurs; elles seront commensurables entr'elles. Car il est visible * que $3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$ est à $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$ comme 3 à 2; puisque 3 & 2 sont multipliés par la grandeur $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$.

REMARQUES.

I.

465. Il est évident que ce qu'on vient d'expliquer par rapport aux incommensurables complexes $x\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{bx}$ convient aussi aux incommensurables complexes $x\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{bx}$ qui ont des termes incommensurables dont le signe radical a un exposant p différent de l'exposant n du signe radical principal $\sqrt[n]{}$ sous lequel sont tous les termes.

2.

466. On réduit ces incommensurables complexes, quand elles ont des signes différens, à un même signe, * comme les autres incommensurables; par exemple, pour réduire $\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{cd}$ & $\sqrt[n]{a} - a\sqrt[n]{bc}$ à un même signe $\sqrt[n]{}$, on élèvera $b + \sqrt[n]{cd}$ à la troisième puissance, & $a^3 - a\sqrt[n]{bc}$ à la 2^e; & l'on aura $\sqrt[n]{b^3 + 3b\sqrt[n]{cd} + 3\sqrt[n]{cd}^2 + \sqrt[n]{cd}^3}$, & $\sqrt[n]{a^3 - 3a^2\sqrt[n]{bc} + a^3\sqrt[n]{bc}^2}$ qui sont équivalentes aux proposées, & si l'on veut que les signes radicaux des termes qui sont sous le signe principal $\sqrt[n]{}$ aient aussi le signe $\sqrt[n]{}$, on changera $\sqrt[n]{cd}$ * en son équivalente $\sqrt[n]{cd^3}$, $\sqrt[n]{bc}$ en son équivalente $\sqrt[n]{b^3c^2}$, & enfin $\sqrt[n]{b^3c^2}$ en son équivalente $\sqrt[n]{b^3c^2}$, & on écrira ces nouveaux termes dans les grandeurs complexes proposées à la place des termes auxquels ils sont équivalans.

467. Pour ajouter ou soustraire ces sortes d'incommensurables complexes, il faut réduire à leur plus simple expression celles qui peuvent y être réduites, & les réduire aussi à avoir

un même signe : on fera ensuite l'addition ou la soustraction comme dans le Problème précédent.

E X E M P L E.

ADDITION.

$$\begin{array}{r} ab \div 3a\sqrt{b} \div c\sqrt{d} \\ 2ab \div a\sqrt{b} \div c\sqrt{d} \\ \hline \end{array}$$

Somme $3ab \div 2a\sqrt{b} \div c\sqrt{d}$.

SOUSTRACTION.

$$\begin{array}{r} ab \div 3a\sqrt{b} \div c\sqrt{d} \\ 2ab \div a\sqrt{b} \div c\sqrt{d} \\ \hline \end{array}$$

Différence $ab \div 4a\sqrt{b} \div c\sqrt{d}$.*La Multiplication.*

P R O B L È M E II.

468. **MULTIPLIER** une suite d'incommensurables par une autre. On suppose que les signes radicaux de l'une & de l'autre suite ont tous le même exposant.

Règle ou Operation. Il faut multiplier successivement tous les termes d'une suite par chacun des termes de l'autre, observant * la règle des signes \div & $-$, de la multiplication ; ajouter tous les produits dans une somme : ce sera le produit qu'on cherche. S'il se trouvoit dans l'une des suites ou dans les deux, plusieurs termes commensurables entr'eux, il faudroit réduire tous ces termes d'une même suite en un seul, les réduisant d'abord à leur plus simple expression, & les ajoutant ensuite en un seul terme. Il faut de même réduire en un seul terme tous les termes, du produit qu'on trouvera, qui seront commensurables entr'eux.

E X E M P L E S.

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} \div \sqrt{b} \\ \sqrt{a} \div \sqrt{b} \\ \hline a \div \sqrt{ab} \\ \div \sqrt{ab} \div b \\ \hline \text{Produit } a \div b \div 2\sqrt{ab} \end{array} \quad \begin{array}{r} a \div b \div 2\sqrt{ab} \\ \sqrt{a} \div \sqrt{b} \\ \hline a\sqrt{a} \div b\sqrt{a} \div 2a\sqrt{b} \\ \div a\sqrt{b} \div b\sqrt{b} \div 2b\sqrt{a} \\ \hline \text{Produit } a \div 3b \times \sqrt{a} \div 3a \div b \times \sqrt{b} \div 3^{\circ} \text{ puis. de } \sqrt{a} \div \sqrt{b} \\ \text{Fff üj}$$

$$a^2 \rightarrow 3a\sqrt{\frac{a^2}{3}} - 4b\sqrt{c}$$

$$1 - 2a\sqrt{\frac{a^2}{3}} \rightarrow 5b\sqrt{b}$$

$$a^2 \rightarrow 3a\sqrt{\frac{a^2}{3}} - 4b\sqrt{c}$$

$$- 2a^2\sqrt{\frac{a^2}{3}} - 6a^2\sqrt{\frac{a^2}{3}} \rightarrow 8ab\sqrt{\frac{a^2}{3}}$$

$$\rightarrow 5a^2b\sqrt{b} \rightarrow 15ab\sqrt{a^2} - 20b^2\sqrt{bc}$$

$$\text{Prod. } a^2 \rightarrow 3a - 2a^2 \times \sqrt{\frac{a^2}{3}} - 4b\sqrt{c} - 6a^2\sqrt{\frac{a^2}{3}} \rightarrow 8ab\sqrt{\frac{a^2}{3}} \rightarrow 5a^2b\sqrt{b} \rightarrow 15ab\sqrt{a^2} - 20b^2\sqrt{bc}$$

Exemple où il y a des grandeurs imaginaires.

$$\text{multiplié } x^2 \rightarrow x\sqrt{-k} - k - j$$

$$- x\sqrt{-k} - k \rightarrow j\sqrt{-k}$$

$$\rightarrow j\sqrt{-k} - k$$

$$- \sqrt{-k} - k \times \sqrt{-k} - k$$

$$\text{multiplicateur } x \rightarrow j \rightarrow \sqrt{-k} - k$$

$$x^2 \rightarrow x^2\sqrt{-k} - k - jx$$

$$- x^2\sqrt{-k} - k \rightarrow jx\sqrt{-k} - k^2$$

$$\rightarrow jx\sqrt{-k} - k$$

$$- x\sqrt{-k} - k^2 \times \sqrt{-k} - k$$

$$\rightarrow jx^2 \rightarrow jx\sqrt{-k} - k^2 \rightarrow j^2$$

$$\rightarrow jx\sqrt{-k} - k^2 \rightarrow j^2\sqrt{-k} - k$$

$$\rightarrow j^2\sqrt{-k} - k$$

$$\rightarrow j^2\sqrt{-k} - k$$

$$\rightarrow j^2\sqrt{-k} - k^2 \times \sqrt{-k} - k$$

$$\rightarrow x^2\sqrt{-k} - k \rightarrow x\sqrt{-k} - k^2 \times \sqrt{-k} - k \rightarrow j^2\sqrt{-k} - k$$

$$\rightarrow kx \rightarrow j^2\sqrt{-k} - k^2 \times \sqrt{-k} - k$$

$$\rightarrow j^2$$

$$\rightarrow k\sqrt{-k} - k$$

$$\text{produit } x^2 \rightarrow x^2\sqrt{-k} - k^2 - jx$$

$$\rightarrow j^2$$

$$\rightarrow jx^2 \rightarrow 2jx\sqrt{-k} - k^2$$

$$\rightarrow j^2\sqrt{-k} - k$$

$$\rightarrow kx$$

$$\rightarrow j^2$$

$$\rightarrow k\sqrt{-k} - k$$

Si on multiplie ce produit par $x - j - \sqrt{-k}$, on trouvera le produit $x^2 - 2j^2$

$$\left. \begin{array}{l} + k^2 \\ + l^2 \end{array} \right\} \times x^2 - 2jl \left\} \times x \begin{array}{l} + j^2 \\ + j^2 k^2 \\ + j^2 l^2 \\ + k l^2 \end{array}$$

Exemple sur les incommensurables complexes qui ont des incommensurables parmi leurs termes.

469. Si l'on avoit $a\sqrt{a} + b$ à multiplier par $b\sqrt{a} + d$, il est évident * que le produit seroit $ab\sqrt{ac} + bc + ad + bd$. D'où * 431.

l'on voit que dans les incommensurables complexes il faut multiplier, 1°. ce qui est hors du signe dans le multiplié par ce qui est hors du signe dans le multiplicateur, (ce qui donne ab ;) 2°. ce qui est sous le signe par ce qui est sous le signe; & écrire pour le produit total $ab\sqrt{ac} + bc + ad + bd$. Cela suffit pour faire concevoir la multiplication des incommensurables complexes qui ont des incommensurables parmi leurs termes : il faut seulement observer, 1°, qu'on multiplie à part les grandeurs commensurables qui sont hors du signe principal dans le multiplié & dans le multiplicateur; & dans le produit total on les écrit au devant du signe principal comme l'on le voit dans les exemples.

2°. Que dans les multiplications partielles on ne fait point d'attention au signe principal du multiplié & du multiplicateur (qui doit y avoir le même exposant,) & l'on multiplie les grandeurs qui sont sous le signe principal du multiplié par les grandeurs qui sont sous le signe principal du multiplicateur, comme s'il n'y avoit point de signe principal dans l'un & dans l'autre; mais on a soin de remettre le signe principal dans le produit total.

3°. Que quand tous les termes de la grandeur complexe, qui est sous le signe principal, sont incommensurables, comme dans $a\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b}$, le signe du terme le plus à gauche $\sqrt[3]{a^2}$ n'influe point sur le terme suivant, quand il n'y a pas de ligne tirée de ce signe pour couvrir le terme suivant à droite. Il en est de même dans $b\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$. Ainsi pour faire

les multiplications partiales de la 1^{re} par la 2^e, on multiplie d'abord $\sqrt[n]{a^{m-1}} + \sqrt[n]{b}$ par $\sqrt[n]{a}$, & ensuite par $\sqrt[n]{c}$. Après avoir pris la somme de ces produits, on écrit au devant le signe principal, on tire une ligne qui couvre le produit total, & on écrit au devant du signe principal le produit ab des commensurables.

4^o. Enfin, quand on a formé le produit total, on le réduit * à la plus simple expression, quand cela se peut, comme on le voit dans le 4^e exemple.

E X E M P L E S.

I.

$$\begin{array}{r}
 a\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{bc} \\
 a\sqrt[n]{c} - \sqrt[n]{bc} \\
 \hline
 a^2 \left\{ \begin{array}{l} ac + \sqrt[n]{bc} \\ - a\sqrt[n]{bc} - bc \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Produit } a^2\sqrt[n]{ac} - bc - a + c \times \sqrt[n]{bc}
 \end{array}$$

E X E M P L E II.

$$\begin{array}{r}
 a\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b^{n-1}} \\
 b\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{b} \\
 \hline
 ab \left\{ \begin{array}{l} a^2 + a^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}} \\ - a\sqrt[n]{b} - b \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Produit } ab\sqrt[n]{a^2} - b + a^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}} - a\sqrt[n]{b}
 \end{array}$$

E X E M P L E III.

$$\begin{array}{r}
 a\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^{n-1}}} + \sqrt[n]{b} \\
 b\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} + \sqrt[n]{c} \\
 \hline
 ab \left\{ \begin{array}{l} a + \sqrt[n]{ab} \\ + \sqrt[n]{a^{n-1}c} + \sqrt[n]{bc} \end{array} \right. \\
 \hline
 \text{Produit } ab\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{ab} + \sqrt[n]{a^{n-1}c} + \sqrt[n]{bc}
 \end{array}$$

E X E M P L E

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2b} \\
 \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{a^2d} \\
 \hline
 \sqrt[3]{a^2c} + \sqrt[3]{a^2bc} \\
 + \sqrt[3]{a^2d} + \sqrt[3]{a^2bd} \\
 \hline
 \text{Produit } \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{ad} + \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{bd} \\
 = a \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ad} + \sqrt[3]{bd}
 \end{array}$$

EXEMPLE V.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} \\
 \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} \\
 \hline
 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} \\
 + \frac{1}{2}q \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} + \frac{1}{2}q^2 - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} \\
 \hline
 \text{Produit } \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} + q \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}
 \end{array}$$

EXEMPLE VI.

Si on multiplie la grandeur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$ par elle-même, on trouvera le même produit que dans le 3^e Exemple, avec cette seule différence qu'il y aura le signe — devant le terme incommensurable $q \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$.

EXEMPLE VII.

Si on multiplie $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$, qu'on nommera a ; par $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$, qu'on nommera b ; on trouvera que le produit ab sera $\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{3}p$; parceque toutes les autres grandeurs du produit se détruiront par des signes opposés + &c —, &c qu'il ne restera sous le signe $\sqrt[3]{}$ que la grandeur $\sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}$.

Ggg

EXEMPLE VIII.

$$\begin{array}{l}
 \text{A } x' + x \sqrt{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}} + \sqrt{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}} \\
 + x \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}} + 2 \sqrt{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}} \times \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}} \\
 + \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}} \\
 \text{B } x - \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}} - \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}} \\
 \dots \dots \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{A } x' + ax - p \\
 + bx + a^2 \\
 + 2ab \\
 + b^2
 \end{array}$$

$$\text{B } x - a - b$$

$$\begin{array}{l}
 \text{C } x' - px + ap \\
 + bp \\
 - a^2 \\
 - 3a^2b \\
 - 3ab^2 \\
 - b^3
 \end{array}$$

$$\text{C } x' - px + q$$

Si l'on proposoit de multiplier la grandeur A par la grandeur B, on pourroit, pour abréger le calcul, supposer $a = \sqrt{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}}$, &c $b = \sqrt{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{2}p}}$, & l'on changeroit par ce moyen le multiplié A en A, & le multiplicateur B en B: faisant la multiplication de A par B, on trouveroit le produit C; & substituant dans le dernier terme de C, les valeurs de $-a^2$, de $-b^2$, de $-3a^2b$, de $-3ab^2$, on le réduiroit à la seule grandeur $+q$, & le produit C deviendroient $C x' - px + q$.

Car, 1°. il est évident que $a^2 = \sqrt{\frac{1}{4}q} - \sqrt{\frac{1}{4}q^2} - \frac{1}{4}p^2$, & que $b^2 = \sqrt{\frac{1}{4}q} + \sqrt{\frac{1}{4}q^2} - \frac{1}{4}p^2$; ainsi $a^2 - b^2 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2} - \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}p^2 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2} = -\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q = 0$. 2°. Par le 7^e exemple $ab = \frac{1}{4}p$; d'où l'on déduit $3a \times ab = 3a^2b = ap$, & $3ab \times b = 3bp$; ainsi $ap - 3a^2b = 0$, $bp - 3ab^2 = 0$ & $a^2 - b^2 = -\frac{1}{2}q$.

REMARQUE.

Il est bon de remarquer les avantages que l'on tire pour la facilité du calcul, de la manière d'abréger des expressions fort composées par d'autres plus simples, & même par une seule lettre, quand cela se peut, comme dans le 8^e exemple.

PROBLÈME III.

470. *AYANT une fraction dont le dénominateur est une suite d'incommensurables de tant de termes qu'on voudra, & dont le numérateur est une grandeur quelconque (on supposera ici, pour tourner toute l'attention des Commensurans à ce qu'il y a de principal dans le Problème, que le numérateur est l'unité) la changer en une autre fraction équivalente dont le dénominateur soit une grandeur commensurable; c'est à dire ôter toutes les incommensurables du dénominateur; & trouver les formules propres à dériver ainsi le dénominateur d'une fraction de toutes les incommensurables qu'il peut contenir, sans changer la valeur de la fraction. On supposera que tous les signes radicaux du dénominateur ont 2 pour exposant.*

Remarques pour la résolution du Problème.

PAR exemple, $\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} + \sqrt{f} + \sqrt{g} + \sqrt{h} + \sqrt{i} + \sqrt{j} + \sqrt{k} + \sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{o} + \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} + \sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$ peut représenter une des fractions de ce Problème; il s'agit de dériver le dénominateur de cette fraction de toutes les incommensurables qu'il contient, sans changer la valeur de la fraction.

On remarquera, 1°. qu'en multipliant les deux termes d'une fraction par un même multiplicateur, on n'en change point la valeur. 2°. qu'en multipliant une incommensurable

table par elle-même, de façon qu'on élève la grandeur qui est sous le signe à la puissance dont l'exposant est celui du signe, on la rend commensurable; par exemple, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$. $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a\sqrt{a}$; & ainsi des autres. 3°. que dans la multiplication d'une grandeur complexe comme $a + b + c + \&c.$, par la même grandeur, si l'on change seulement dans le multiplicateur le signe $+$ ou $-$ d'un ou de deux ou de plusieurs termes, il arrive par là que l'on trouve des produits particuliers qui se détruisent par des signes opposés $+$ & $-$, & qu'il y a dans le produit total moins de termes qu'il n'y en auroit, si l'on n'avoit pas changé le signe $+$ ou $-$ de quelques-uns des termes. Ainsi $a + b \times a - b = a^2 - b^2$. 4°. qu'entfin, en prenant pour les exemples des fractions qui aient pour dénominateurs des suites d'incommensurables littérales, lesquels dénominateurs aient d'abord deux termes, puis trois, après quatre, & ainsi de suite; on trouvera par le Problème des multiplicateurs en lettres propres à délivrer d'incommensurables les dénominateurs des fractions qui auroient deux termes, trois termes, quatre termes d'incommensurables, & ainsi de suite; & que ces multiplicateurs exprimez par des lettres seront autant de formules pour délivrer d'incommensurables les dénominateurs des fractions particulières qui auront deux termes, trois termes, & ainsi de suite.

Résolution du Problème. Règle ou Operation. 1°. Pour faciliter le calcul il faut représenter les incommensurables du dénominateur chacune par une lettre sans signe radical; par ex. \sqrt{a} , \sqrt{b} , $\sqrt{a+b}$, $\sqrt{a-b}$, & ainsi de suite, représenteront les fractions dont le dénominateur a deux, trois, quatre, cinq incommensurables, &c.

2°. Il faut opérer par ordre, premierement, sur la fraction de deux incommensurables, puis sur celle de trois, après sur celle de quatre, & ainsi de suite; & chercher pour chacune le multiplicateur par lequel multipliant les deux termes de la fraction il vienne un produit du dénominateur où il n'y ait plus d'incommensurables.

3°. Pour trouver ce multiplicateur il faut multiplier le seul dénominateur tel qu'il est par le dénominateur même, après

avoir changé le signe $+$ ou $-$ de l'un de ses termes, quand il n'en a que deux ou trois; on change les signes $+$ ou $-$ de deux de ses termes, quand il a quatre ou cinq termes, & ainsi des autres. Cette première opération suffit quand le dénominateur n'a que deux termes, mais quand le dénominateur en a un grand nombre, il faut abréger le produit qu'on vient de trouver, en exprimant par une seule lettre (élevée à la puissance du degré des dimensions des termes du produit) tous les termes commensurables du produit. Regardant ce produit comme s'il étoit le dénominateur qu'on doit délivrer d'incommensurables, il faut le multiplier par lui-même après avoir changé le signe $+$ ou $-$ de quelques-uns des termes du multiplicateur, ce qui donnera un nouveau produit qu'on abrégera comme le précédent, & qu'on multipliera de même par lui-même après avoir changé le signe $+$ ou $-$ de quelques-uns des termes du multiplicateur. Continuant ainsi d'opérer, on arrivera enfin à un produit qui n'aura plus que des grandeurs commensurables.

4°. On séparera du dernier produit commensurable le dénominateur incommensurable de la fraction donnée; & ce qui demeurera après cette séparation sera le multiplicateur qu'on cherchoit, par lequel multipliant les deux termes de la fraction donnée, on ôtera les incommensurables de son dénominateur. Ce multiplicateur sera une formule qui représentera le multiplicateur pour toutes les fractions particulières dont le dénominateur aura le même nombre d'incommensurables que la proposée. Cela s'éclaircira par les exemples suivans.

EXEMPLES.

1.

POUR ôter les incommensurables du dénominateur de la fraction $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

1°. On supposera $\sqrt{3} = a$, $\sqrt{2} = b$, & l'on aura $\frac{1}{a+b}$ qui représentera toutes les fractions dont le dénominateur a deux incommensurables.

Ggg iiij

2°. Il faut multiplier $a \div b$ par $a - b$, & l'on aura le produit $a^2 - b^2$ où il n'y a plus d'incommensurables.

Ainsi $a - b$ est la formule qui représente le multiplicateur qu'il faut prendre pour ôter les incommensurables du dénominateur des fractions représentées par $\frac{1}{a+b}$. Elle fait voir, par exemple, que pour ôter les incommensurables de $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, il faut multiplier les deux termes par $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, & l'on aura la fraction $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2 = 1}$ équivalente à la proposée.

2.

Pour ôter les incommensurables du dénominateur des fractions représentées par $\frac{1}{a+b+c}$; il faut multiplier $a \div b \div c$ par $a \div b - c$, & l'on aura $a^2 \div 2ab \div b^2 - c^2$. Il faut supposer (pour abréger) les commensurables $a \div b - c^2 = d^2$. Et le produit sera $d^2 \div 2ab$. Il faut le multiplier par $d^2 - 2ab$, & l'on aura le produit $d^4 - 4a^2b^2$ où il n'y a plus d'incommensurables. En remettant dans ce produit la valeur de d^2 , on aura $a^4 \div b^4 \div c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$. On séparera de ce dernier produit le dénominateur $a \div b \div c$, ce qui se peut faire en prenant dans la suite des opérations le produit $a \div b - c \times a \div b - c^2 - 2ab = a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 - ac^2 \div 2abc \div b^3 - b^2c - bc^2 \div c^3$ ou bien en divisant le dernier produit qui n'a plus d'incommensurables $a^4 \div b^4$ &c. par $a \div b \div c$, & le quotient $a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 - ac^2 \div 2abc \div b^3 - b^2c - bc^2 \div c^3$ fera la formule du multiplicateur dont il faut se servir pour ôter les incommensurables du dénominateur des fractions représentées par $\frac{1}{a+b+c}$, & le dénominateur délivré d'incommensurables sera représenté par $a^3 \div b^3 \div c^3$.

3.

Pour trouver le multiplicateur qui doit servir à ôter les incommensurables du dénominateur de $\frac{1}{a+b+c+d}$, il faut multiplier le dénominateur par $a \div b - c - d$; & suppo-

fant $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = e^2$, le produit sera $e^2 + 2ab - 2cd$; il faut le multiplier par $-e^2 + 2ab - 2cd$, & supposant dans le produit les grandeurs commensurables $-e^2 + 4a^2b^2 + 4c^2d^2 = f^2$, le produit sera $f^2 - 8abcd$. Il faut le multiplier par $f^2 + 8abcd$, & l'on aura enfin le produit $f^4 - 64a^2b^2c^2d^2$, dans lequel il n'y a plus d'incommensurables. Il ne faut plus que substituer dans ce produit la valeur de f^2 , substituer dans ce qui en viendra la valeur des puissances de e , après ces substitutions séparer $a + b + c + d$ de ce produit, & l'on aura le multiplicateur qu'on cherchoit.

4.

On trouvera de même le multiplicateur qui doit servir à ôter les cinq incommensurables du dénominateur de $\frac{a+b+c+d+e}{a+b+c-d-e}$, en multipliant d'abord ce dénominateur par $a+b+c-d-e$, ce qui donnera $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - e^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 2de$. Ce produit (en supposant $f^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 - e^2$ qui sont commensurables) deviendra $f^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 2de$. On le multipliera par $-f^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2de$, & l'on trouvera (en supposant les grandeurs commensurables $-f^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - 4d^2e^2 = -g^2$) le produit $-g^2 + 4f^2de + 8abc \times a + b + c$.

On remarquera ici qu'en joignant à ce produit celui-ci $-8abc \times a + b + c + d + e$, le produit deviendra $-g^2 + 4f^2de - 8abc \times d + e$ qui n'a plus que quatre termes dont trois sont incommensurables. Cela fait voir que pour arriver à un produit qui n'ait que quatre termes, il faut faire ainsi les multiplications : il faut multiplier le dénominateur proposé $a + b + c + d + e$ par $a + b + c - d - e \times -f^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2de$, y joindre $a + b + c + d + e \times -8abc$, & l'on arrivera au produit $-g^2 + 4f^2de - 8abc \times d + e$ qui est égal au produit $-g^2 + 4f^2de + 8abc \times a + b + c - 8abc \times a + b + c + d + e$.

Pour continuer, il faut multiplier $-g^2 + 4f^2de - 8abc \times d + e$ par $-g^2 + 4f^2de + 8abc \times d + e$, & l'on trouvera

$g^2 + 16f^2 d^2 e^2 - 64a^2 b^2 c^2 \times d^2 + e^2 - 2 \times 48f^2 \times de - 64a^2 b^2 c^2 \times 2de$. On supposera les grandeurs commensurables $g^2 + 16f^2 d^2 e^2 - 64a^2 b^2 c^2 \times d^2 + e^2 = b^2$, & $- 2 \times 48f^2 \times de - 64a^2 b^2 c^2 \times 2de$ pouvant se réduire à $+ g^2 f^2 + 16a^2 b^2 c^2 \times 8de$, on supposera (pour abréger le calcul) les grandeurs commensurables $+ g^2 f^2 + 16a^2 b^2 c^2 = l^2$, & le produit qu'on veut de trouver sera $h^2 = 8l^2 de$ qui n'a plus que deux termes, dont un seul est incommensurable.

Enfin on multipliera $b^2 = 8l^2 de$ par $b^2 + 8l^2 de$, & l'on aura le produit $b^4 = 64l^2 d^2 e^2$ qui n'a plus d'incommensurables.

On séparera de ce produit le dénominateur $a + b + c + d + e$, en substituant les valeurs des puissances de f , de g , de b , & de l dans la suite des opérations que voici marquées. $a + b + c + d + e \times a + b + c + d + e \times - f^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2de - 8abc \times a + b + c + d + e$ plus tout le produit précédent multiplié par $- g^2 + 4f^2 de + 8abc \times d + e$; plus tout le produit qui précède multiplié par $b^2 + 8l^2 de$; & après les substitutions on ne commencera la suite de produits que par $a + b + c + d + e \times - f^2 + 2ab$ &c. & l'on aura le multiplicateur qu'on cherche.

REMARQUES.

I.

ON a donné le signe $+$ à tous les termes du dénominateur qui contient une suite d'incommensurables, mais il est évident que la méthode est la même quand les signes sont $-$, ou mêlez de $+$ & de $-$, & qu'on peut représenter tous les dénominateurs, qui ont une suite d'incommensurables, par $a + b + c + d + e$ &c. en supposant que les signes $+$ représentent les signes $+$ ou $-$ des dénominateurs particuliers; par exemple, $a + b + c$ peut représenter $\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$, en supposant que $+ b$ représente $-\sqrt{3}$, & $+ c = -\sqrt{2}$. Il faut seulement prendre garde dans les produits aux signes $+$ ou $-$ que doivent avoir les termes des produits par rapport à la supposition que $+ b + c$ représentent $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

2.

On peut continuer d'appliquer la méthode aux dénominateurs qui ont plus de cinq termes ; mais dans la pratique cela est assez inutile ; car ces cas là n'arrivent presque jamais.

On verra , vers la fin du Problème suivant l'usage de ce 3^e Problème pour la division des suites d'incommensurables.

3.

471. On pourroit étendre la méthode du 3^e Problème à ôter les incommensurables des fractions dont le dénominateur est une suite de termes incommensurables , lesquels ont tous le signe $\sqrt{}$, ou $\sqrt[3]{}$, ou $\sqrt[4]{}$, &c.

Mais cela ne pouvant gueres être d'usage que dans l'analyse où ces cas là n'arrivent encore que très rarement , & l'analyse elle-même fournissant des méthodes plus aisées que celles qu'on pourroit mettre ici , il suffira de donner la méthode pour déshvrer d'incommensurables les dénominateurs des fractions , qui n'ont chacun que deux termes incommensurables avec le signe $\sqrt{}$, ou $\sqrt[3]{}$, ou $\sqrt[4]{}$, &c.

Par exemple , pour trouver le multiplicateur qui doit servir à ôter les incommensurables de $\frac{1}{a \pm b}$, en supposant que a & b représentent des incommensurables avec le signe $\sqrt{}$; il faut multiplier $a \pm b$ par le multiplicateur $a - b$, non pas pris linéaire , mais élevé à la 2^e puissance ; c'est à dire , il faut multiplier $a \pm b$ par $a^2 - 2ab \pm b^2$, & l'on aura le produit $a^3 - a^2b - ab^2 \pm b^3$.

On remarquera que si on ajoutoit le produit de $a \pm b$ par $\pm ab$, on auroit $a^3 - a^2b - ab^2 \pm b^3 \pm a^2b \pm ab^2 = a^3 \pm b^3$ qui ne contient plus d'incommensurables.

Cela fait voir que pour ôter les incommensurables du dénominateur de $\frac{1}{a \pm b}$, il faut se servir du multiplicateur $a^2 - ab \pm b^2$, & que ce multiplicateur est la formule que l'on cherchoit . Par exemple , pour ôter les incommensurables du dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}$, il faut supposer $a = \sqrt{3}$, & $b = \sqrt{2}$, & l'on aura $a^2 - ab \pm b^2 = \sqrt{9} - \sqrt{6} \pm \sqrt{4}$ Il

Hhh

faut multiplier les deux termes de $\frac{x}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}$ par $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6}$
 $+ \sqrt[3]{4}$, & l'on aura $\frac{x}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}{3 + 2 - 5}$.

Pour trouver le multiplicateur qui doit servir à ôter les incommensurables du dénominateur de $\frac{x}{a+b}$, en supposant que a & b représentent deux incommensurables avec le signe $\sqrt[3]{}$, il faut multiplier $a+b$ par le multiplicateur $a-b$ élevé à la 3^e puissance; c'est à dire, par $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, & l'on trouvera le produit $a^4 - 2a^2b + 2ab^2 - b^4$.

On remarquera que lui ajoutant le produit $\overline{a+b} \times + 2a^2b - 2ab^2 = + 2a^2b + 2a^2b^3 - 2a^2b^2 - 2ab^3$, on aura le produit $a^4 - b^4$ où il n'y a plus d'incommensurables. Ce qui fait voir que le multiplicateur ou la formule qu'on cherche est $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$.

On trouvera de même que $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$; $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$; & ainsi de suite, sont les formules des multiplicateurs qui doivent servir à délivrer d'incommensurables le dénominateur de $\frac{x}{a+b}$, en supposant que $a+b$ représente successivement deux incommensurables avec le signe $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, &c.

4.

472. Quand les formules sont trouvées, on peut, pour mieux représenter les incommensurables, mettre les signes radicaux dans la fraction générale qui représente toutes les fractions particulières dont les dénominateurs ont une suite d'incommensurables, & marquer aussi les signes radicaux devant les termes des formules. Par exemple, $\frac{x}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ représentera toutes les fractions dont le dénominateur est de deux termes incommensurables avec le signe $\sqrt[3]{}$, & $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ représentera la formule qui doit servir à ôter les incommensurables du dénominateur de ces fractions: il en est de même des autres.

La démonstration du 3^e Problème est évidente par les opérations mêmes que l'on a faites pour le résoudre, & par les remarques qui servent de préparation à la résolution.

La division des suites d'incommensurables.

PROBLÈME IV.

473. **DIVISER** une suite d'incommensurables soit par une grandeur commensurable, soit par une autre suite d'incommensurables : les exposans des signes radicaux doivent être les mêmes dans le dividende & dans le diviseur.

Règle ou Operation. Il faut faire la division comme celle des grandeurs littérales complexes, observant * la règle des * 139. signes + & — de la division, & * les règles de la divi- * 440. sion des incommensurables qui n'ont qu'un signe radical, comme on le verra dans les exemples suivans.

EXEMPLES.

I.

Où le diviseur est commensurable.

$$\text{Dividende } \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{50} \left(\frac{2 = \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{15}} \text{ diviseur.} \right. \\ \left. \text{Quotient.} \right)$$

Le même Exemple où les incommensurables sont réduites à leur plus simple expression.

$$2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{2} = -3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{3} \left(\frac{2 \text{ diviseur.}}{-\frac{1}{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} \text{ quot.}} \right)$$

EXEMPLE II.

Où le diviseur n'a qu'un seul terme, lequel est incommensurable.

$$3\sqrt[3]{15} - 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{35} \left(\frac{2\sqrt[3]{5}}{\frac{1}{3}\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{\frac{17}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{7}} \right)$$

EXEMPLE III.

$$a\sqrt[3]{ab} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{bc} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{cd} \left(\frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{c} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{d}} \right) \\ \text{Hhh ij}$$

Dans les Exemples suivans le diviseur est une suite d'incommensurables.

EXEMPLE IV.

$$4\sqrt[3]{12} - 16\sqrt[3]{30} + 6\sqrt[3]{18} - 6\sqrt[3]{14} + 24\sqrt[3]{35} - 9\sqrt[3]{21} \left(\frac{2\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[3]{7}} \right)$$

EXEMPLE V.

$$\begin{array}{l} a\sqrt[3]{a} + 3a\sqrt[3]{b} + 3b\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} \\ + 2a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{a} \end{array} \left\} \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{a + 2\sqrt[3]{ab} + b} \right.$$

Quand le dividende & le diviseur contiennent des grandeurs incommensurables littérales, il faut ordonner l'un & l'autre par rapport à une même lettre, écrivant pour premier terme celui qui contient la plus haute puissance de cette lettre, pour second terme celui qui contient la puissance immédiatement moindre, &c ainsi de suite : comme on le voit dans ce 5^e Exemple.

Ensuite on dira le quotient de $a\sqrt[3]{a}$ divisé par $\sqrt[3]{a}$ est a ; il faut écrire a au quotient ; écrire 0 sous $a\sqrt[3]{a}$ dans le dividende ; multiplier $+ \sqrt[3]{b}$ par le quotient a ; retrancher le produit $a\sqrt[3]{b}$ de $+ 3a\sqrt[3]{b}$, &c écrire au dessous le reste $+ 2a\sqrt[3]{b}$, qu'il faut réduire à $+ 2\sqrt[3]{a^2b}$ afin de continuer la division.

On dira ensuite le quotient de $+ 2a\sqrt[3]{b} = + 2\sqrt[3]{a^2b}$ divisé par $\sqrt[3]{a}$ est $+ 2\sqrt[3]{ab}$, il faut écrire $+ 2\sqrt[3]{ab}$ au quotient, marquer 0 au dividende sous $+ 2a\sqrt[3]{b}$, multiplier $+ \sqrt[3]{b}$ par $+ 2\sqrt[3]{ab}$, retrancher le produit $+ 2b\sqrt[3]{a}$ de $3b\sqrt[3]{a}$, &c écrire le reste $+ b\sqrt[3]{a}$.

Enfin on dira le quotient de $+ b\sqrt[3]{a}$ divisé par $\sqrt[3]{a}$ est $+ b$; il faut écrire $+ b$ au quotient, marquer 0 au dividende sous $+ b\sqrt[3]{a}$, multiplier $+ \sqrt[3]{b}$ par $+ b$, retrancher le produit $+ b\sqrt[3]{b}$ de $+ b\sqrt[3]{b}$ dans le dividende ; &c comme il ne reste rien, le quotient $a + 2\sqrt[3]{ab} + b$ est exact.

Voci l'exemple de la division du même dividende par $a + 2\sqrt[3]{ab} + b$.

E X E M P L E II.

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{l} x^2 \div jx^2 \\ \text{divi-} \\ \text{dende.} \end{array} & \begin{array}{l} -j^2x \\ \div \\ \div x^2 \sqrt{-k^2} \div 2jx \sqrt{-k^2} \div j^2 \sqrt{-k^2} \\ \div \\ \div l^2x \\ \div \\ \div l^2 \sqrt{-k^2} \end{array} & \left. \begin{array}{l} -j^2 \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div \\ \div l^2 \sqrt{-k^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 \div x \sqrt{-k^2} - j^2 \text{ diviseur.} \\ -x \sqrt{-l^2} \div j \sqrt{-k^2} \\ \div j \sqrt{-l^2} \\ - \sqrt{-k^2} \times \sqrt{-l^2} \\ \hline x \div j \div \sqrt{-l^2} \text{ quotient.} \end{array} \\
 \div x^2 \sqrt{-l^2} \div jx \sqrt{-k^2} & \div j^2 \sqrt{-l^2} & \\
 \div jx \sqrt{-l^2} & \div j \sqrt{-k^2} \times \sqrt{-l^2} & \\
 \div x \sqrt{-k^2} \times \sqrt{-l^2} & &
 \end{array}$$

E X E M P L E III.

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{l} x^2 \div x \sqrt{-k^2} - j^2 \\ \text{divi-} \\ \text{dende.} \end{array} & \begin{array}{l} -x \sqrt{-l^2} \div j \sqrt{-k^2} \\ \div j \sqrt{-l^2} \\ \div \sqrt{-k^2} \times \sqrt{-l^2} \end{array} & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x - j \div \sqrt{-k^2} \text{ diviseur.} \\ x \div j - \sqrt{-l^2} \text{ quotient.} \end{array} \\
 \div jx & &
 \end{array}$$

La Division des incommensurables complexes qui ont des incommensurables parmi leurs termes.

477. **P**OUR diviser une incommensurable complexe $ab\sqrt{ac} \div ad \div be \div bd$

* 441. par une autre $a\sqrt{a} \div b$; il est évident * qu'il faut diviser, 1^o, la grandeur ab qui est hors du signe par a qui est hors du signe, ce qui donne le quotient b ; 2^o, diviser la grandeur $ac \div ad \div be \div bd$ qui est sous le signe par $a \div b$, ce qui donne le quotient $c \div d$; 3^o, &c écrire pour quotient $b\sqrt{c} \div d$. Lorsque les incommensurables complexes contiennent sous le signe des incommensurables parmi leurs

termes, la division se doit faire de la même manière, en observant ce qui est de particulier * dans la division d'une incommensurable par une autre grandeur commensurable, ou incommensurable.

EXEMPLE I.

PAR exemple, si l'on propose de faire la division de $a^2\sqrt[3]{ac} - a\sqrt[3]{bc} - bc + c\sqrt[3]{bc}$ par $a\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{bc}$; on divisera, 1^o, a^2 par a , &c l'on aura le quotient a ; 2^o, on divisera $ac - a\sqrt[3]{bc} - bc + c\sqrt[3]{bc}$ par $a + \sqrt[3]{bc}$, &c l'on trouvera le quotient $c - \sqrt[3]{bc}$, 3^o, il faut écrire pour le quotient qu'on cherche $a\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{bc}$.

EXEMPLE II.

ON trouvera de la même manière, en divisant $ab\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{a^{10}}c + \sqrt[3]{bc}$ par $a\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b}$ que le quotient est $b\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$.

EXEMPLE III.

Si l'on vouloit diviser la grandeur (C.) $x^3 - px + q$ par la gran-

deur (B.) $x - \sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3} - \sqrt[3]{q + \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}p^3}}$. Pour abréger le calcul on supposeroit l'incommensurable complexe F = a, & l'incommensurable complexe G = b, & l'on changeroit par ce moyen le diviseur B en B. $x - a - b$.

$$\begin{array}{l}
 \text{dividende (C.) } x^3 - px + q \\
 \quad + ax^2 + a^2x - ap \\
 \quad + bx^2 + 2abx - bp \\
 \quad \quad + b^2x + a^3 \\
 \quad \quad \quad + 3a^2b \\
 \quad \quad \quad + 3ab^2 \\
 \quad \quad \quad + b^3
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 (B.) x - a - b \text{ diviseur.} \\
 (A.) x^2 + ax - p \text{ quotient.} \\
 \quad + bx + a^2 \\
 \quad \quad + 2ab \\
 \quad \quad \quad + b^2
 \end{array} \right\}$$

On feroit ensuite la division, & l'on trouveroit le quotient

tient A , & le reste $\rightarrow q - ap - bp \rightarrow a' \rightarrow 3a'b \rightarrow 3ab' \rightarrow b'$.

En substituant dans ce reste les valeurs de $a' \rightarrow b' = -q$, comme on l'a fait voir dans le 8^e Exemple de l'article 469, & les valeurs de $\rightarrow 3a'b \rightarrow 3ab' = \rightarrow ap \rightarrow bp$, comme on l'a montré dans le même endroit; tout ce reste entier se trouveroit égal à zéro, toutes les grandeurs dont il est composé se détruisant par des signes \rightarrow & $-$ opposés, après les substitutions. Ainsi on trouveroit que le quotient A est exact.

On substituerait ensuite dans ce quotient les valeurs de a , de b , & celles de a' , de ab & de b' , ces dernières ont été prises pour les Exemples 5^e, 6^e & 7^e de l'article 469. Et après ces substitutions le quotient A se trouveroit changé en la grandeur A du 8^e Exemple de l'article 469; & cette grandeur A seroit le quotient qu'on vouloit trouver de la grandeur C divisée par la grandeur B .

La formation des puissances des suites d'incommensurables & des incommensurables complexes qui ont des incommensurables parmi leurs termes.

478. **L**A formation des puissances de toutes les grandeurs, & par conséquent de toutes les grandeurs incommensurables, * se fait par la multiplication répétée de la grandeur qu'on veut élever à une puissance dont l'exposant est donné. On peut aussi se servir des formules des puissances de l'art. 160, comme on l'a enseigné dans les articles 171 & les suivans. C'est pourquoi les Commensurables pourront eux-mêmes élever telle suite d'incommensurables qu'ils voudront, & telles incommensurables complexes qui ont des incommensurables parmi leurs termes, qui pourront se présenter, à une puissance donnée quelconque, puisqu'il ne faut employer que la multiplication de ces sortes de grandeurs, qu'on leur a enseignée. Il est inutile de grossir ce Traité des ces calculs qui ne leur apprendroient rien de nouveau.

Remarque sur l'extraction des racines des suites d'incommensurables.

479. **L'**EXTRACTION des racines des suites d'incommensurables n'est gueres d'usage que dans l'analyse. Cette science fournit une méthode facile & générale pour faire l'extraction des racines de telle suite qu'on voudra d'incommensurables.

On trouvera cette methode expliquée dans la dernière Section du cinquième Livre de l'Analyse démontrée, page 257. On ne sauroit donner ici que des methodes particulieres pour les suites de deux termes incommensurables, de trois termes, de quatre termes, &c. Ces methodes seroient même difficiles à démontrer sans se servir de l'analyse. On a cru qu'il seroit inutile d'en prolonger ce Traité. On se contentera de mettre la methode pour extraire la racine quarrée des binomes, comme de $5 \pm 2\sqrt{6}$, dont les signes radicaux ont pour exposant 2. Voici le principe de cette methode.

430. Si l'on élève un binome $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ à la 2^e puissance, on trouvera le binome $a \pm b \pm 2\sqrt{ab}$. Cela fait voir que dans toute seconde puissance d'un binome, laquelle n'a aussi que deux termes, l'un des termes $a \pm b$ est la somme des quarrés des deux termes du binome qui en est la racine, & que l'autre terme $2\sqrt{ab}$ est le double du produit des deux termes \sqrt{a}, \sqrt{b} du binome qui en est la racine.

Mais les quarrés $a \pm b$ des deux termes de la racine $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ qui paroissent distinguez dans le quarré $a \pm b \pm 2\sqrt{ab}$, sont d'ordinaire confondus ensemble, comme dans $5 \pm 2\sqrt{6}$ qui est le quarré de $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$. C'est pourquoi la formule $a \pm b \pm 2\sqrt{ab}$ ne peut pas suffire telle qu'elle est pour donner une regle generale de l'extraction des racines 2^{es} des binomes. Voici ce qu'il y faut ajouter.

Si l'on prend le quarré $a^2 \pm 2ab \pm b^2$ du premier terme $a \pm b$, & qu'on en ôte le quarré $4ab$ du second terme $2\sqrt{ab}$, on aura $a^2 - 2ab \pm b^2$ qui est le quarré de $a - b$ difference des quarrés a & b des deux termes \sqrt{a}, \sqrt{b} de la racine.

Si l'on prend $a - b$ racine 2^e de $a^2 - 2ab \pm b^2$, & que, 1^o, on l'ajoute au 1^{er} terme $a \pm b$ du binome $a \pm b \pm 2\sqrt{ab}$, on trouvera $2a$, dont la moitié a sera le quarré du 1^{er} terme de $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. 2^o. Si l'on retranche $a - b$ de $a \pm b$, l'on trouvera $2b$, dont la moitié b sera le quarré du second terme \sqrt{b} de $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

On déduit de-là cette regle pour l'extraction de la racine quarrée des binomes.

431. Pour tirer la racine quarrée d'un binome comme $7 \pm \sqrt{48}$; 1^o, il faut ôter le quarré du moindre terme du quarré du plus grand terme, & prendre la racine quarrée du reste. (Dans cet exemple il faut ôter 48 quarré de $\sqrt{48}$ du quarré 49 du plus grand terme 7, & prendre 1 qui est la racine quarrée du reste 1.)

2°. Il faut ajouter cette racine 1° du reste au plus grand terme, ce qui donnera une somme, & retrancher cette même racine du même plus grand terme, ce qui donnera un reste. (Dans cet exemple il faut ajouter 1 à 7, & la somme sera 8, & retrancher 1 de 7, & le reste sera 6.)

3°. Il faut prendre séparément la racine 2° de la moitié de la somme & de la moitié du reste, & faire un binôme de ces deux racines, en les joignant avec le même signe $+$ ou $-$ qui joint les deux termes du binôme dont on cherche la racine; ce binôme sera la racine qu'on demande. (Dans cet exemple on prendra 2 racine 2° de 4 moitié de la somme 8, & $\sqrt{3}$ racine 2° de 3 moitié du reste 6; & l'on aura $2 + \sqrt{3}$ pour la racine 2° de $7 + \sqrt{48}$)

E X E M P L E S.

POUR tirer la racine quarrée de $y + a - 2\sqrt{ay}$, 1°. on ôtera de $y + 2ay + a^2$ quarré du 1^{er} terme $y + a$ le quarré $4ay$ du second terme $- 2\sqrt{ay}$; & l'on trouvera le reste $y^2 - 2ay + a^2$. On prendra $y - a$ racine 1° du reste $y^2 - 2ay + a^2$. 2°. On ajoutera $y - a$ à $y + a$, & la somme sera $2y$, la moitié sera y . On ôtera $y - a$ de $y + a$; le reste sera $+ 2a$, la moitié a . 3°. L'on prendra les racines \sqrt{y} , \sqrt{a} de ces moitiés, & l'on écrira $\sqrt{y} - \sqrt{a}$ pour la racine que l'on cherche.

Pour trouver la racine quarrée de $m^2 + \frac{p^2}{m^2} + 2\sqrt{4pm}$, 1°. on ôtera $4pmx^2$ de $m^2 + 2mpx^2 + \frac{p^2}{m^2}$, & l'on prendra $m^2 - \frac{p^2}{m^2}$ racine 2° du reste. 2°. On ajoutera $m^2 - \frac{p^2}{m^2}$ à $m^2 + \frac{p^2}{m^2}$, & on l'en retranchera; m^2 sera la moitié de la somme, & $\frac{p^2}{m^2}$ la moitié du reste. 3°. On prendra les racines 2° de ces moitiés, & on les écrira aussi $m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$. Ce sera la racine qu'on cherchoit.

Pour extraire la racine 2° de $-1 + \sqrt{-8}$, 1°. on ôtera -8 quarré de $+\sqrt{-8}$ de $+1$ quarré de -1 , ce qui donnera $+9$, dont on prendra la racine 2° qui est $+3$. 2°. On ajoutera $+3$ au terme -1 , & la somme sera $+2$, la moitié est $+1$. On ôtera $+3$ du même terme -1 , & l'on aura -4 , la moitié est -2 . 3°. On prendra les racines 2° de ces moitiés; ces racines sont $+1$, $\sqrt{-2}$, & l'on aura $+1 + \sqrt{-2}$ pour la racine qu'on cherche.

Pour avoir la racine 2° de $4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$, 1°. on ôtera 24

quarré de $-2\sqrt{6}$, de 32 quarré de $4\sqrt{2}$, &c le reste sera 8 ; on en prendra la racine 2^e qui est $2\sqrt{2}$. 2^e. On ajoutera cette racine à $4\sqrt{2}$, la somme sera $6\sqrt{2}$, la moitié sera $3\sqrt{2}$. On ôtera cette même racine $2\sqrt{2}$, de $4\sqrt{2}$, le reste sera $2\sqrt{2}$, la moitié sera $1\sqrt{2}$. 3^e. On prendra les racines 2^{es} de ces moitez ; ces racines sont $\sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{18}$, $\sqrt{1}\sqrt{2} = \sqrt{2}$. On écrira $\sqrt{18} - \sqrt{2}$ pour la racine qu'on cherche.

On peut par la même règle trouver la racine d'un quadrinome comme $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt[3]{60}$, (on en le réduisant à la plus simple expression) de $10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$, en le considérant comme un binome, dont on distinguera les deux termes par une ligne sur chacun. 1^o. On ôtera le quarré du second terme $2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$ qui est (en le réduisant à la plus simple expression) $100 + 40\sqrt{6}$, du quarré du premier terme $10 + 2\sqrt{6}$ qui est $124 + 40\sqrt{6}$, ce qui donnera 24, dont on prendra la racine 2^e qui est $2\sqrt{6}$. 2^o. On ajoutera $2\sqrt{6}$ au premier terme $10 + 2\sqrt{6}$ la somme sera $10 + 4\sqrt{6}$, la moitié sera $5 + 2\sqrt{6}$. On ôtera $2\sqrt{6}$ du même premier terme ; le reste sera 10, la moitié sera 5. 3^o. On prendra les racines 2^{es} de ces moitez, & l'on trouvera par la règle des

* 481. binomes * que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est la racine 1^{re} de $5 + 2\sqrt{6}$, & la racine 2^e de 5 est $\sqrt{5}$. On écrira $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ pour la racine 1^{re} du quadrinome proposé.

REMARQUE.

482. QUAND on ne peut pas trouver par la règle la racine quarrée d'un binome, ou quand on trouve pour cette racine une expression plus composée que n'est le binome proposé, on se contente d'écrire $\sqrt{}$ au devant du binome pour marquer la racine 2^e de ce binome. Par exemple, pour extraire la racine 2^e de $+ \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - p}$, il suffit d'écrire

$$\sqrt{\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}n^2 - p}}.$$

La démonstration de la règle est clairement contenue dans

* 480 le principe * dont on l'a déduite.



TABLE DES SECTIONS.

LIVRE I.

Du Calcul des grandeurs entieres.

<i>SECTION I. Des noms des principales Propositions dont on se sert dans les Mathematiques, les Axiomes generaux de ces Sciences, dont on deduit les premieres Regles du Calcul, & enfin la division de ce Traité.</i>	Page 1
<i>SECT. II. De l'Addition & de la Soustraction des grandeurs entieres.</i>	37
<i>SECT. III. De la Multiplication des grandeurs entieres.</i>	50
<i>SECT. IV. De la Division des grandeurs entieres.</i>	79
<i>SECT. V. De la composition ou de la formation des Puissances des grandeurs entieres.</i>	115
<i>SECT. VI. De la resolution des Puissances numeriques & litterales, ce qu'on nomme aussi l'extraction des racines.</i>	166

LIVRE II.

Du Calcul des grandeurs rompues, qu'on nomme aussi fractions : des comparaisons des rapports simples ; des rapports composez ; & du calcul des grandeurs incommensurables.

<i>SECTION I. Des grandeurs simples ou premieres, & des grandeurs composees ; la methode de trouver le plus grand diviseur commun à deux & à plusieurs grandeurs, & la methode de trouver tous les diviseurs d'une grandeur composee.</i>	215
<i>SECT. II. Des reductions des grandeurs rompues.</i>	253
<i>SECT. III. De l'Addition, Soustraction, Multiplication,</i>	

*Division des fractions, de la formation de leurs puissances,
 & de l'extraction de leurs racines.* 274

SECT. IV. *Sur les comparaisons des rapports géométriques,
 où sont expliquées les proportions des grandeurs en gé-
 néral.* 315

SECT. V. *Des rapports composés.* 338

SECT. VI. *Du calcul des incommensurables simples, ou qui
 n'ont qu'un signe radical.* 372

SECT. VII. *Du calcul des suites d'incommensurables.* 410

Fin de la Table.

005662227



